УДК 532.516 : 532.68

© 1998 г. В.В. Пухначев

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ИЗОЛИРОВАННОГО ОБЪЕМА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

Уравнения квазистационарного приближения в задаче о движении изолированного объема вязкой несжимаемой капиллярной жидкости выводятся из точных уравнений с помощью разложения по малому параметру квазистационарности, равному отношению стоксова времени к капиллярному. Задача содержит еще один безразмерный параметр, пропорциональный модулю сохраняющегося углового момента жидкого объема, который также считается малым. В зависимости от соотношения между этими параметрами получаются три варианта предельной задачи: традиционный и два новых. Строятся асимптотические решения возникающих задач при стремлении параметра квазистационарности к нулю.

Квазистационарное приближение – одна из важнейших приближенных моделей в теории вязких течений со свободными границами. Однако до сих пор отсутствовал даже формальный вывод уравнений квазистационарного приближения из полных уравнений гидродинамики. Кроме того, в подавляющем большинстве работ в данной области изучались плоские движения. В трехмерной задаче лишь недавно установлена локальная теорема существования решения.

1. Постановка задачи. Задача формулируется следующим образом. Требуется найти область $\Omega_t \subset \mathcal{R}^3$, $t > 0$, и решение уравнений Навье–Стокса

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

в этой области при $0 < t < T$ так, чтобы удовлетворялись начальные условия

$$\text{область } \Omega_0 \text{ задана}, \ \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \ x \in \Omega_0 \tag{1.2}$$

и краевые условия

$$V_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}, \quad x \in \Gamma_t, \quad t \in (0, T) \tag{1.3}$$

$$-p\mathbf{n} + 2\mu D\cdot\mathbf{n} = 2\sigma K\mathbf{n}, \quad x \in \Gamma_t, \quad t \in (0, T) \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{v}(x, t)$ – вектор скорости, $p(x, t)$ – давление жидкости; $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка трехмерного эвклидова пространства $\mathcal{R}^3$, Ω_t – область, занятая жидкостью в момент времени t; ρ – плотность жидкости, ν – ее кинематический коэффициент вязкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения – заданные положительные постоянные, Γ_t – граница области Ω_t, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ_t, V_n – скорость перемещения этой поверхности в направлении $\mathbf{n}$; $\mu = \rho\nu$ – динамический коэффициент вязкости жидкости, $D = [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^*]/2$ – тензор скоростей деформаций, K – средняя кривизна поверхности Γ_t; считается $K < 0$, если область Ω_t выпукла.

Поверхность Γ_t, на которой выполнены условия (1.3) (кинематическое) и (1.4) (динамическое), называется свободной границей. Первое из этих условий означает, что в каждой точке свободной границы скорость перемещения этой поверхности в направлении внешней нормали совпадает с нормальной компонентой скорости жидкости в данной точке. Если поверхность Γ_t задана уравнением $F(x, t) = 0$, то кинематическое условие может быть переписано в эквивалентной форме: $F_t + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0$ в силу $F = 0$, а первое из начальных условий (1.2) – в форме $F(x, 0) = F_0(x)$, где $F_0(x)$ – заданная функция.

Вследствие динамического условия (1.4) касательное напряжение на свободной границе равно нулю, а нормальное напряжение совпадает с капиллярным давлением. При формулировке (1.4) предполагалось, что внешнее (атмосферное) давление постоянно и эта постоянная уже включена в функцию p. Первое из уравнений (1.1) записано в предположении, что на жидкость не действуют внешние массовые силы. Кроме того, всюду в дальнейшем считается, что начальная область Ω_0 ограничена.

Это позволяет интерпретировать решение задачи (1.1) –(1.4) как описывающее движение вязкой капли по инерции. Такое движение обладает рядом интегралов. А именно, в нем сохраняется объем области Ω_t

$$\int_{\Omega_t} dx = V = \int_{\Omega_0} dx \tag{1.5}$$

полный импульс жидкости,

$$\rho \int_{\Omega_t} \mathbf{v} dx = \mathbf{I} = \rho \int_{\Omega_0} \mathbf{v}_0 dx \tag{1.6}$$

и полный момент импульса,

$$\rho \int_{\Omega_t} \mathbf{v} \times \mathbf{x} dx = \mathbf{M} = \rho \int_{\Omega_0} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{x} dx \tag{1.7}$$

Располагая величиной V, можно ввести характерный линейный масштаб $l = V^{1/3}$.

Уравнения (1.1) и условия (1.3), (1.4) инвариантны относительно преобразования Галилея. Это дает возможность перейти к новой (инерциальной) системе координат, в которой покоится центр масс капли. Таким образом, без потери общности можно считать, что величина $\mathbf{I}$ в (1.6) равна нулю, т.е. что выполнено соотношение

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{v} dx = 0 \tag{1.8}$$

при всех $t \in (0, T)$.

Задача (1.1), (1.3), (1.4) имеет семейство стационарных решений. Им соответствуют формы равновесия вращающейся капиллярной жидкости: в подходящей системе координат, вращающейся относительно исходной с постоянной угловой скоростью, коллинеарной вектору $\mathbf{M}$, жидкость покоится.

Указанные формы равновесия, вопросы их ветвления и устойчивости изучались многими авторами; соответствующие результаты можно найти в монографиях [1, 2], где имеется также подробная библиография по данному вопросу.

Что же касается нестационарной задачи (1.1)–(1.4), то первые результаты о ее локальной разрешимости в точной постановке получены совсем недавно [3]. Установлена [4] теорема существования и единственности ее решения при всех $t > 0$ в случае, когда начальная область Ω_0 близка к шару, а начальное поле скоростей $\mathbf{v}_0$ мало (в соответствующей норме). Изучена [5] стабилизация решения плоского анализа задачи (1.1)–(1.4) к состоянию квазитвердого вращения при $t \to \infty$. Наконец, был дан анализ обобщения задачи (1.1)–(1.4) на случай, когда жидкость подвержена силе самогравитации [6]. (В рассматриваемой постановке задачи этот фактор не учитывается, что правомерно при достаточно малых значениях l – см. обсуждение данного вопроса [2].) Было доказано [6], что если вектор-функция $\mathbf{v}_0$ мала, а область Ω_0 близка к шару, то трехмерная задача со свободной границей имеет решение, определенное при всех $t > 0$. Предельное состояние жидкости при $t \to \infty$ соответствует ее вращению как твердого тела с постоянной угловой скоростью. Ось вращения совпадает с направлением углового момента $\mathbf{M}$, а величина предельной угловой скорости, вместе с предельной формой равновесия жидкости, однозначно определяется заданием величин V, $M = |\mathbf{M}|$ и материальными константами ρ, σ и $\varkappa$ (гравитационная постоянная). С помощью (регулярного) предельного перехода при $\varkappa \to 0$ из результатов работы [6] получаются соответствующие утверждения для задачи (1.1)–(1.4).

Отметим еще специальный случай плоской задачи (1.1)–(1.4), в котором удается провести полное исследование качественного поведения решения без каких-либо ограничений типа малости на начальные данные [7]. В этом случае плоская область Ω_0 – кольцо, а начальное распределение скоростей обладает осевой симметрией. В процессе движения свойство вращательной симметрии сохраняется, так что область Ω_t остается кольцом – по крайней мере, для достаточно малых $t > 0$. С дальнейшим ростом t, в зависимости от начальных данных, либо внутренний радиус кольца остается строго положительным, и тогда при $t \to \infty$ движение стабилизируется к вращению кольца как твердого тела, либо в некоторый момент t^* этот радиус обращается в нуль, т.е. кольцо превращается в круг. Доказано [7], что если такое превращение произошло, то оно имеет необратимый характер: при $t > t^*$ область Ω_t остается кругом. При $t \to \infty$ движение стремится к квазитвердому вращению круга. К задаче о вращающемся кольце еще вернемся в конце работы.

2. Замена искомых функций. Далее предполагается, что сохраняющийся на решении задачи (1.1)–(1.4) вектор углового момента $\mathbf{M}$ параллелен оси x_3, т.е. $\mathbf{M} = (0, 0, M)$. Этого всегда можно добиться выбором осей исходной (инерциальной) системы координат. Кроме того, не умаляя общности можно выбрать начало координат на плоскости x_1, x_2 так, чтобы выполнялись равенства

$$\int_{\Omega_0} x_1 dx = \int_{\Omega_0} x_2 dx = 0 \tag{2.1}$$

Перейдем в соотношениях (1.1)–(1.4) к новым искомым функциям

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \omega(t)\mathbf{h}(x), \quad q = p - \rho\omega^2 |\mathbf{h}|^2/2 \tag{2.2}$$

где $\mathbf{h}(x) = (-x_2, x_1, 0)$. (Подобная замена переменных использовалась ранее [5]). Функция $\omega(t)$ выбирается из условия

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} dx = 0 \tag{2.3}$$

Вследствие (1.7), (2.2), (2.3) получаем

$$\omega(t) = M/(\rho I_t) \left(I_t = \int_{\Omega_t} r^2 dx, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 \right) \tag{2.4}$$

В дальнейшем понадобится выражение для $d\omega/dt$. Оно получается из (2.4) с использованием соленоидальности вектора $\mathbf{v}$, условия (1.3) на границе движущегося объема Ω_t и тождества $\mathbf{h} \cdot \nabla(r^2) = 0$ и имеет вид

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{M}{\rho I_t^2} \int_{\Omega_t} \mathbf{w} \cdot \nabla(r^2) dx \tag{2.5}$$

Подстановка (2.2) в (1.1) приводит к следующим уравнениям для функций $\mathbf{w}$ и q:

$$\begin{gathered} \mathbf{w}_t + \mathbf{w} \cdot \nabla\mathbf{w} + \omega'\mathbf{h} + \omega\mathbf{h} \cdot \nabla\mathbf{w} + 2\omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{w} = -\rho^{-1}\nabla q + \nu\Delta\mathbf{w} \\ \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad x \in \Omega_t, \quad t \in (0, T) \end{gathered} \tag{2.6}$$

где обозначено $\omega' = d\omega/dt$. Входящие в (2.6) функции $\omega(t)$ и ω' определяются равенствами (2.4) и (2.5). Полагая в первом из них $t = 0$, можно вычислить значение $\omega(0) = \omega_0$, поскольку область Ω_0 считается заданной.

Начальное условие для функции $\mathbf{w}$ вследствие (1.2), (2.2) имеет вид

$$\mathbf{w}(x,0) = \mathbf{w}_0(x) \equiv \mathbf{v}_0(x) - \omega_0 \mathbf{h}(x), \quad x \in \Omega_0 \tag{2.7}$$

Кинематическое условие на свободной границе (1.3) преобразуется к виду

$$V_n = (\mathbf{w} + \omega\mathbf{h}) \cdot \mathbf{n}, \quad x \in \Gamma_t, \quad t \in (0,T) \tag{2.8}$$

Наконец, динамическое условие (1.4) в терминах функций $\mathbf{w}$, q записывается так:

$$-q\mathbf{n} + 2\mu D \cdot \mathbf{n} = (\rho\omega^2 r^2/2 + 2\sigma K)\mathbf{n}, \quad x \in \Gamma_t, \quad t \in (0,T) \tag{2.9}$$

Здесь учтено, что слагаемое $\omega(t)\mathbf{h}(x)$ не вносит вклада в тензор скоростей деформаций, поэтому $D(\mathbf{v}) = D(\mathbf{w})$.

Поясним смысл перехода в задаче (1.1)–(1.4) к новым искомым функциям. Вследствие равенств (1.7), (2.2), (2.3) и соглашения о коллинеарности векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{e}_3$ для любого $t \in (0, T)$ будет выполнено соотношение

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{w} \times \mathbf{x} dx = 0 \tag{2.10}$$

выражающее закон сохранения момента импульса в терминах функции $\mathbf{w}$. Кроме того, эта вектор-функция удовлетворяет условию сохранения импульса

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{w} dx = 0 \tag{2.11}$$

Соотношения (2.10) и (2.11) играют ключевую роль в дальнейших построениях.

Докажем справедливость равенства (2.11). Применяя формулу Эйлера для вычисления производной по времени от интеграла по жидкому объему и используя равенство (1.8), получим

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \mathbf{h} dx = \int_{\Omega_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} dx = \int_{\Omega_t} (v_2\mathbf{e}_1 - v_1\mathbf{e}_2) dx = 0$$

Отсюда и из (2.1) вытекает, что

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{h} dx = \int_{\Omega_0} \mathbf{h} dx = 0$$

Последнее равенство вместе с (1.8), (2.2) и дает требуемое соотношение (2.11).

3. Критерии подобия. Переход к безразмерным переменным. Определяющими параметрами в задаче (1.1)–(1.4) являются материальные постоянные ρ, σ, $\mu = \rho\nu$ и сохраняющиеся в процессе движения величины $V = l^3$ и $M = |\mathbf{M}|$. Из этих параметров можно составить две независимые безразмерные комбинации

$$\delta = \rho\sigma l/\mu^2, \quad \varepsilon = M/(\mu l^3)$$

которые являются критериями подобия в задаче о движении вращающейся массы вязкой капиллярной жидкости. Параметр ε характеризует порядок отношения центробежных сил к силам вязкости. Параметр δ удобно интерпретировать как отношение двух характерных времен: $t_s = l^2/\nu$ (назовем его стоксовым временем) и $t_c = \mu l/\sigma$ (капиллярное время). Величина t_s характеризует время релаксации вязких напряжений в жидком объеме Ω_t. Смысл величины t_c можно понять, обратившись к условию (1.4). Из него следует, что характерная скорость движения, порожденного капиллярными силами, имеет порядок $v_c = \sigma/\mu$. Капиллярное время естественно определить как $l/v_c =$

$= \mu l/\sigma$, где характерный линейный размер $l = V^{1/3}$ предписан заданием объема капли V. Это же условие (1.4) позволяет определить масштаб давления в изучаемой задаче как $p_c = \sigma/l$.

Квазистационарное приближение в задаче о движении вязкой капли основано на предположении о том, что деформация свободной поверхности силами поверхностного натяжения происходит значительно медленнее, чем релаксация вязких напряжений к стационарному состоянию, определяемому мгновенной формой свободной границы Γ_t, на которой распределено капиллярное давление $2\sigma K$, а касательные напряжения отсутствуют. Отсюда вытекает, что естественным временным масштабом в данном приближении является $t_c = \mu l/\sigma$, причем $t_c \gg t_s = l^2/\nu$, так что параметр $\delta = t_s/t_c$ является малым.

Перейдем в соотношениях (2.6)–(2.9) к безразмерным переменным, выбирая в качестве масштабов длины l, времени $t_c = \mu l/\sigma$, скорости $v_c = \sigma/\mu$ и давления $p_c = \sigma/l$, и сохраним за безразмерными величинами их прежние обозначения. Уравнения (2.6) в новых терминах принимают форму

$$\delta(\mathbf{w}_t + \mathbf{w}\cdot\nabla\mathbf{w}) + \varepsilon\left[-\frac{1}{I_t^2}\mathbf{h}\int\limits_{\Omega_t}\mathbf{w}\cdot\nabla(r^2)dx + \frac{1}{I_t}(\mathbf{h}\cdot\nabla\mathbf{w} + 2\mathbf{e}_3\times\mathbf{w})\right] = -\nabla q + \Delta\mathbf{w} \tag{3.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{w} = 0;\quad x\in\Omega_t,\quad t\in(0,T)$$

(При получении (3.1) из (2.6) использовались выражения (2.4) и (2.5) для функций ω и ω', приведенные к безразмерному виду.)

Выражение в левой части первого уравнения (3.1) есть (безразмерное) суммарное ускорение сил инерции. В модели квазистационарного приближения это ускорение считается пренебрежимо малым по сравнению с ускорением сил вязкого взаимодействия, что дает основание заменить левую часть уравнения импульсов (3.1) нулем. Ясно, что для этого недостаточно малости лишь одного параметра δ; малым следует считать и параметр ε. Кроме того, входящий в начальное условие (1.2) вектор $\mathbf{v}_0(x)$ должен иметь порядок $v_c = \sigma/\mu$. В противном случае (т.е. когда $max|\mathbf{v}_0(x)| \gg v_c$) силы инерции с самого начала будут доминировать над вязкими силами, и описание движения капли в рамках квазистационарного приближения теряет смысл. Учитывая сказанное и используя формулу (2.4) для определения ω_0, получаем безразмерную форму начального условия (2.7)

$$\mathbf{w}(x,0) = \mathbf{w}_0(x) \equiv \mathbf{v}_0(x) - \frac{\varepsilon\mathbf{h}(x)}{\delta I_0}\quad\left(I_0 = \int\limits_{\Omega_0} r^2 dx\right) \tag{3.2}$$

в области Ω_0, которая предполагается известной.

Кинематическое условие на свободной границе (2.8) преобразуется к виду

$$V_n = \left(\mathbf{w} + \frac{\varepsilon\mathbf{h}(x)}{\delta I_t}\right)\cdot\mathbf{n},\quad x\in\Gamma_t,\quad t\in(0,T) \tag{3.3}$$

а динамическое условие (2.9) – к виду

$$-q\mathbf{n} + 2D\cdot\mathbf{n} = \left[2K + \frac{\varepsilon^2 r^2}{2\delta I_t^2}\right]\mathbf{n},\quad x\in\Gamma_t,\quad t\in(0,T) \tag{3.4}$$

Соотношения (3.1)–(3.4) формируют задачу с неизвестной границей, которая и будет предметом дальнейшего исследования. Важным свойством этой задачи является наличие законов сохранения (2.10), (2.11) и

$$\int\limits_{\Omega_t} dx = 1 \tag{3.5}$$

(последнее равенство вытекает из (1.15)).

4. Внешнее разложение. Уравнения квазистационарного приближения. Традиционная схема квазистационарного приближения состоит в замене задачи (3.1), (3.2) следующей задачей: найти область $\Omega_t \subset \mathfrak{R}^3$, $0 < t < T$, и решение $\mathbf{w}$, q стационарной системы Стокса

$$\Delta \mathbf{w} - \nabla q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \tag{4.1}$$

в этой области так, чтобы удовлетворялось условие

$$-q\mathbf{n} + 2D \cdot \mathbf{n} = 2K\mathbf{n}, \quad x \in \Gamma_t = \partial\Omega_t, \quad t \in (0, T) \tag{4.2}$$

(играющее роль краевого условия для системы (4.1), в которую время входит как параметр) и условие

$$V_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, \quad x \in \Gamma_t, \quad t \in (0, T) \tag{4.3}$$

определяющее эволюцию свободной поверхности Γ_t из ее начального положения Γ_0. При известной Γ_t решение краевой задачи (4.1), (4.2) находится однозначно, если подчинить вектор-функцию $\mathbf{w}$ дополнительным условиям (2.10), (2.11). Тем самым определен нелинейный нелокальный оператор, ставящий в соответствие поверхности Γ_t (или функции $F(x, t)$, задающей уравнение этой поверхности равенством $F = 0$) функцию $\mathbf{w}_{|\Gamma} \cdot \mathbf{n}$, после чего соотношение (4.3) превращается в эволюционное уравнение относительно функции F, для которого следует решить задачу Коши $F(x, 0) = F_0(x)$, где равенство $F_0(x) = 0$ есть уравнение поверхности Γ_0.

Основной результат проведенного ранее [8] исследования задачи (4.1)–(4.3) можно сформулировать следующим образом. Пусть Γ_0 – звездная относительно начала координат ограниченная поверхность в $\mathfrak{R}^3$. Предположим, что функция Φ, определенная на единичной сфере S^2 и осуществляющая ее отображение на поверхность Γ_0, принадлежит пространству Соболева $H^6(S^2)$. Тогда существует такое $T = T(\Gamma_0) > 0$, что при $t \in (0, T)$ задача (4.1)–(4.3), (2.10), (2.11) имеет, и притом единственное, решение. Если, сверх того, поверхность Γ_0 (в надлежащей метрике) близка к сфере, то решение указанной задачи существует при всех $t > 0$. В этом случае $\mathbf{w} \to 0$, $q \to \mathrm{const}$ при $t \to \infty$, а поверхность Γ_t с ростом t стабилизируется к сфере. (Не касаемся здесь плоского аналога задачи (4.1)–(4.3), который изучался многими авторами – см., например, работы [9–12] и цитированную в них литературу.)

Вернемся к исходной задаче (3.1)–(3.4). Она содержит два параметра, δ и ε, которые далее предполагаются малыми. Уравнения квазистационарного приближения формально получаются из соотношений (3.1)–(3.4), если в (3.1), (3.3) и (3.4) отбросить члены, явно содержащие параметры δ и ε, и одновременно отбросить начальное условие (3.2) для $\mathbf{w}$ (второе начальное условие, задающее поверхность Γ_0, при этом, конечно, сохраняется). Основанием такой процедуры является правдоподобное (но, по-видимому, ранее четко не сформулированное) предположение о том, что при малых δ на временах $t \gg t_s$, где $t_s = l^2/\nu$ – стоксово время, детали начального распределения скоростей "забываются", а эволюция свободной границы, в первом приближении по параметру δ, определяется лишь ее начальной формой.

Следует отметить, что в отличие от параметра δ, зависящего только от свойств жидкости и заданного объема $V = l^3$ области Ω_0, параметр ε содержит величину $M = |\mathbf{M}|$, характеризующую интенсивность вращения жидкости. Величина M (так же, как и V) сохраняется в процессе движения, поэтому нет оснований считать, что эта интегральная характеристика начального поля скоростей не будет влиять на поведение решения задачи (3.1)–(3.4) при больших t, даже если параметр ε мал. Для того чтобы такое влияние было несущественным, необходимо предположить, что $\varepsilon = o(\delta)$ при $\delta \to 0$. (Физически это означает, что определяемая по формуле (2.4) мгновенная угловая скорость квазитвердого вращения жидкости, заполняющей объем Ω_t и имеющей угловой момент **M**, пренебрежимо мала по сравнению с характерными значениями элементов тензора скоростей деформаций $D(\mathbf{w})$.) В этом (и только в этом) случае в соотношениях (3.1), (3.3), (3.4) возможен формальный переход к пределу $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$, приводящий к стандартной модели квазистационарного приближения (4.1)–(4.3). Если условие $\varepsilon = o(\delta)$ при $\delta \to 0$ не выполняется, данная модель нуждается в модификации.

Ниже рассмотрим два содержательных случая: $\varepsilon = \beta\delta$ и $\varepsilon = \gamma\delta^{1/2}$ (β и γ – положительные постоянные), приводящие к новым постановкам в теории квазистационарного приближения. В этом разделе исследуется первый случай; рассмотрению второго случая при дополнительном предположении о вращательной симметрии движения посвящен разд. 6.

Итак, пусть $\varepsilon = \beta\delta$ и $\delta \to 0$. Внешнее разложение решения задачи (3.1)–(3.4) по параметру δ ищется в виде формальных степенных рядов

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)} + \delta\mathbf{w}^{(1)} + \delta^2\mathbf{w}^{(2)} + \dots, \quad q = q^{(0)} + \delta q^{(1)} + \delta^2 q^{(2)} + \dots \tag{4.4}$$

Главный член разложения $\mathbf{w}^{(0)}$, $q^{(0)}$ определяется следующим образом. В области $\Omega_t^{(0)}$ (которая также подлежит определению) решается краевая задача (3.1), (3.4), в условиях которой положено $\varepsilon = \beta\delta$ и совершен предельный переход $\delta \to 0$. Фактически функции $\mathbf{w}^{(0)}$, $q^{(0)}$ образуют решение уже возникавшей второй краевой задачи (4.2) для системы Стокса (4.1). Однако замыкающее условие (4.3) сейчас заменяется условием

$$V_n^{(0)} = \left(\mathbf{w}^{(0)} + \frac{\beta\mathbf{h}(x)}{I_t^{(0)}}\right)\cdot\mathbf{n}^{(0)} \tag{4.5}$$

$$x \in \Gamma_t^{(0)} = \partial\Omega_t^{(0)}, \ t \in (0,T) \quad \left(I_t^{(0)} = \int\limits_{\Omega_t^{(0)}} r^2 dx\right)$$

вытекающим из (3.3) в предположении $\varepsilon = \beta\delta$.

Задача (4.1), (4.2), (4.5), (2.10), (2.11) является обобщением крассической задачи теории квазистационарного приближения (4.1)–(4.3), (2.10), (2.11) и переходит в нее при $\beta = 0$. Далее предполагается, что эта задача (при условии достаточной гладкости начальной поверхности Γ_0) имеет, и притом единственное, классическое решение. Данное предположение может быть обосновано, во всяком случае, если поверхность Γ_0 – звездная.

Опуская технические детали, поясним существо дела. Введем сферические координаты $s = |x|$, θ (широта), φ (долгота), предположим, что полярная ось совпадает с осью x_3 и запишем уравнение поверхности Γ_0 в форме $s = R_0(\theta, \varphi)$. Звездность начальной поверхности Γ_0 гарантирует это же свойство свободной границы Γ_t, по крайней мере для достаточно малых $t > 0$. Пусть равенство $s = R(\theta, \varphi, t)$ задает уравнение поверхности Γ_t в сферических координатах. Согласно методике работы [8], задача (4.1), (4.2), (4.5), (2.10), (2.11) сводится к нелинейной нелокальной задаче Коши для функции $Q = R - R_0$

$$\partial Q/\partial t = N(Q), \ 0 < t < T; \ Q = 0, \ t = 0 \tag{4.6}$$

Здесь $N(Q)$ – оператор, который при фиксированном t действует из некоторого шара с центром в нуле пространства Соболева $H^6(S^2)$ в пространство $H^5(S^2)$, является дифференцируемым по Фреше (более того, даже аналитическим) в точке $Q = 0$ и гладко зависит от t как от параметра.

Решающую роль в анализе задачи Коши (4.6) играет структура дифференциала Фреше $N'(0)$ оператора $N(Q)$ в точке $Q = 0$. Линейный оператор $N'(0)$ допускает представление

$$N'(0) = L + M_1 + M_2$$

L – эллиптический псевдодифференциальный оператор первого порядка, его главный член есть композиция оператора Лапласа – Бельтрами Δ_Γ на поверхности Γ_0 и оператора "Нейман – Дирихле" A для системы Стокса. Последний ставит в соответствие функции g, определенной на поверхности Γ_0, функцию $A(g) = w_n$, где w_n – нормальная компонента вектора $\mathbf{w}$ на поверхности Γ_0, а эта вектор-функция вместе со скалярной функцией q образует решение системы Стокса (4.1) в области Ω_0, подчиненное условиям (2.10), (2.11), (4.2), где правая часть последнего условия заменена на $g\mathbf{n}$.

В силу звездности Γ_0, всякая функция g, заданная на этой поверхности, может быть параметризована угловыми переменными θ, φ. Это позволяет выразить в явном виде действия операторов M_1 и M_2:

$$M_1(g) = -5\beta\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R_0^5(\theta,\varphi)\sin^3\theta d\theta d\varphi\right]^{-1}\frac{\partial g}{\partial\varphi}$$

$$M_2(g) = 25\beta\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R_0^5(\theta,\varphi)\sin^3\theta d\theta d\varphi\right]^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R_0^4(\theta,\varphi)g(\theta,\varphi)\sin^3\theta d\theta d\varphi$$

Таким образом, оператор M_1 кососимметричный, а M_2 компактный. Вместе с эллиптичностью оператора L указанные свойства гарантируют обратимость оператора $\partial/\partial t - N'(0)$. Дальнейшее рассмотрение задачи (4.6) почти повторяет рассуждения работы [8] и приводит к следующему результату: при условии $R_0 \in H^6(S^2)$ существует $T > 0$, такое что задача (4.6) имеет, и притом единственное, решение $Q \in C_w([0, T]; H^6(S^2)) \cap C^1_w([0, T]; H^5(S^2))$. (Символы $C_w([0, T]; X)$ и $C^1_w([0, T]$; обозначают соответственно пространства слабо непрерывных и слабо непрерывно дифференцируемых функций $t \in [0, T]$ со значениями в некотором банаховом пространстве X).

5. Внутреннее разложение. Условия сращивания. Построенное выше асимптотическое решение (4.4) задачи (3.1), (3.3), (3.4), вообще говоря, не удовлетворяет начальному условию (3.2). Чтобы компенсировать возникающую невязку, следует искать решение полной задачи со свободной границей для уравнений Навье – Стокса (3.1)–(3.4) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{W}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)} + \delta(\mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{W}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) + \ldots \\ q &= q^{(0)} + Q^{(0)} - s^{(0)} + \delta(q^{(1)} + Q^{(1)} - s^{(1)}) + \ldots \end{aligned} \tag{5.1}$$

где функции $\mathbf{W}^{(k)}$, $Q^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$ (элементы внутреннего разложения) зависят от x и "быстрого времени" $\tau = t/\delta$, а функции $\mathbf{u}^{(k)}$, $s^{(k)}$ – лишь от x. Задача для нахождения $\mathbf{W}^{(0)}$, $Q^{(0)}$ получается следующим образом. Выражения (5.1) подставляются в систему (3.1), в которой осуществляется переход к быстрому времени и затем полагается $\delta = 0$. При этом учитывается, что функции $\mathbf{w}^{(k)}$, $q^{(k)}$ зависят только от x, t и что $\mathbf{w}^{(0)}$, $q^{(0)}$ – решение системы (4.1). Результатом является нестационарная система Стокса, которой удовлетворяют функции $\mathbf{W}^{(0)}$, $Q^{(0)}$:

$$\mathbf{W}_\tau^{(0)} = -\nabla Q^{(0)} + \Delta\mathbf{W}^{(0)}, \quad \nabla\cdot\mathbf{W}^{(0)} = 0 \tag{5.2}$$

Систему (5.2) следует решать в полубесконечном цилиндре $x \in \Omega_0$, $\tau > 0$ при начальном условии

$$\mathbf{W}^{(0)}(x, 0) = \mathbf{W}_0(x) \equiv \mathbf{w}_0(x) - \mathbf{w}^{(0)}(x, 0) \tag{5.3}$$

причем функция $\mathbf{w}_0$ определена в (3.2), и краевом условии

$$-Q^{(0)}\mathbf{n}_0 + 2D(\mathbf{W}^{(0)})\cdot\mathbf{n}_0 = 2K_0\mathbf{n}_0, \quad x \in \Gamma_0 \tag{5.4}$$

($\mathbf{n}_0$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ_0, K_0 – средняя кривизна этой поверхности, а $D(\mathbf{W}^{(0)})$ – соответствующий тензор скоростей деформаций).

Задача (5.2)–(5.4) – это вторая краевая задача для нестационарной системы Стокса в фиксированной области. Ее разрешимость вытекает из результатов работы [4] (не уточняем условий гладкости поверхности Γ_0 и функции $\mathbf{W}_0$, а заранее предположим, что эти поверхность и функция таковы, что гарантируют нужную гладкость решения). Главный вопрос, который сейчас представляет интерес, – поведение функций $\mathbf{W}^{(0)}$, $Q^{(0)}$ при $\tau \to \infty$.

Правая часть в краевом условии (5.4) удовлетворяет условиям "самоуравновешенности"

$$\int_{\Gamma_0} K_0 \mathbf{n}_0 d\Gamma_0 = 0, \quad \int_{\Gamma_0} K_0 \mathbf{n}_0 \times \mathbf{x} d\Gamma_0 = 0 \tag{5.5}$$

выражающим равенство нулю суммарной силы и суммарного момента, приложенных к жидкому объему Ω_0. Из результатов работы [13] следует, что существует стационарное решение системы (5.2), удовлетворяющее условию (5.4). Теперь заметим, что вследствие (5.3) и равенств (2.10), (2.11) при $t = 0$, которым подчинены функции $\mathbf{w}_0(x)$ и $\mathbf{w}^{(0)}(x, 0)$, аналогичные равенства выполнены и для функции $\mathbf{W}_0$:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{W}_0 dx = 0, \quad \int_{\Omega_0} \mathbf{W}_0 \times \mathbf{x} dx = 0 \tag{5.6}$$

Известно [13], что стационарное решение задачи (5.2), (5.4), (5.6) единственно. Нетрудно видеть, что это решение совпадает с $\mathbf{w}^{(0)}(x, 0)$, $q^{(0)}(x, 0)$ (это вытекает из соотношений (4.1), (4.2), взятых в момент $t = 0$).

Для решения задачи (5.2)–(5.4), (5.6) имеет место энергетическая оценка

$$\left\| \mathbf{W}^{(0)}(x,\tau) - \mathbf{w}^{(0)}(x,0) \right\|_{L_2(\Omega_0)} = O(e^{-\lambda_1 \tau}), \quad \tau \to \infty \tag{5.7}$$

где λ_1 – наименьшее положительное собственное значение оператора Стокса в области Ω_0 с условием второго рода на ее границе. (Оценка, подобная (5.7), справедлива и в более сильных нормах, но на этом не останавливаемся.) Следствием (5.7) является равенство

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{w}^{(0)}(x,t) = \lim_{\tau \to \infty} \mathbf{W}^{(0)}(x,\tau)$$

Этот общий предел и обозначается через $\mathbf{u}^{(0)}(x)$. Поскольку аналогичная (5.7) оценка имеет место и для функции $Q^{(0)}(x, \tau) - q^{(0)}(x, 0)$, тем самым определена и функция $s^{(0)}(x)$ как совпадающий предел функций $q^{(0)}(x, t)$ и $Q^{(0)}(x, \tau)$ при $t \to 0$ и $\tau \to \infty$ соответственно. В результате все главные члены в разложениях (5.1) оказываются определенными, и получаем асимптотическое решение задачи (3.1)–(3.4) при $\delta \to 0$ в виде

$$\mathbf{w}_{as} = \mathbf{w}^{(0)}[x(y,t)t] + \mathbf{W}^{(0)}(y,t/\delta) - \mathbf{u}^{(0)}(y), \quad q_{as} = q^{(0)}[x(y,t)t] + Q^{(0)}(y,t/\delta) - s^{(0)}(y) \tag{5.8}$$

где $y \in \Omega_0$, $t \in (0, T)$, а соответствие точек y и $x \in \Omega_t^{(0)}$ устанавливается путем решения задачи Коши

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{w}^{(0)}(x,t) + \frac{\beta \mathbf{h}(x)}{I_t^{(0)}}, \quad t \in (0,\ T); \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad t = 0$$

так что совокупность переменных $y = (y_1, y_2, y_3)$ представляет аналог лагранжевых координат в пространстве $\mathfrak{R}^3$. При этом область $\Omega_t^{(0)}$ определяется в процессе решения задачи (4.1), (4.2), (4.5), (2.10), (2.11).

Отметим, что похожая схема построения приближенного решения задачи со свободной границей для уравнений Навье – Стокса (в более простой ситуации) была реализована в работе [14].

6. Вращательно симметричные движения. Введем в пространстве $\Re^3$ цилиндрические координаты $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $z = x_3$, $\phi = \mathrm{arctg}(x_2/x_1)$ и обозначим через u, v, w проекции вектора $\mathbf{w}$ на оси r, ϕ, z соответственно. Предположим, что Γ_0 – поверхность вращения с осью z и что вектор $\mathbf{w}$ в условии (3.2) не зависит от ϕ. Тогда задача (3.1)–(3.4) имеет решение, в котором функции $\mathbf{w}$, q также не зависят от ϕ, а поверхность Γ_t остается поверхностью вращения. В цилиндрических координатах справедливо представление $\mathbf{h} = (0, r, 0)$. Поэтому $\mathbf{h}\cdot\mathbf{n} = 0$ в условии (3.3), и оно упрощается

$$V_n = \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}, \quad x \in \Gamma_t, \quad t \in (0,T) \tag{6.1}$$

В этом разделе предполагается, что малые параметры ε и δ связаны соотношением $\varepsilon = \gamma\delta^{1/2}$, где $\gamma = \mathrm{const} > 0$. Тогда уравнения (3.1) в координатной записи примут вид

$$\begin{gathered}
\delta(u_t + uu_r + wu_z) - \delta^{1/2}\frac{2}{I_t}\gamma v = -q_r + \tilde{\Delta}u - \frac{u}{r^2} \\
\delta\left(v_t + uv_r + wv_z + \frac{uv}{r}\right) + \delta^{1/2}\left[\frac{2}{I_t}\gamma u - \frac{2}{I_t^2}\gamma r\int_{\Omega_t} rudx\right] = \tilde{\Delta}v - \frac{v}{r^2} \\
\delta(w_t + uw_r + ww_z) = -q_z + \tilde{\Delta}w \\
u_r + \frac{u}{r} + w_z = 0, \quad x \in \Omega_t, \quad t \in (O,T) \quad \left(\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)
\end{gathered} \tag{6.2}$$

Замечательно, что условие (3.4) теперь не содержит явно параметров δ и ε:

$$-q\mathbf{n} + 2D\cdot\mathbf{n} = \left[2K + \frac{1}{2I_t^2}\gamma^2 r^2\right]\mathbf{n}, \quad x \in \Gamma_t, \quad t \in (0,T) \tag{6.3}$$

Входящий сюда параметр $\gamma = M(\rho\sigma l^7)^{-1/2}$ – это единственный критерий подобия в задаче (1.1)–(1.4), пропорциональный M и не содержащий вязкости.

Уравнения (6.2) допускают тривиальное решение $u = v = w = 0$, $q = C = \mathrm{const}$. Ему соответствует некоторая фигура равновесия вращающейся капиллярной жидкости (напомним, что $\mathbf{w}$ – отклонение физической скорости от скорости квазитвердого вращения). Свободную поверхность такой фигуры обозначим через Γ, а область, ограниченную ею, – через Ω. Для равновесной поверхности Γ будет $V_n = 0$, т.е. условие (6.1) выполняется автоматически, как и два из трех скалярных соотношений, формирующих условие (6.3). Нетривиальным следствием (6.3) является равенство

$$2K + \frac{1}{2I_t^2}\gamma^2 r^2 + C = 0, \quad x \in \Gamma \tag{6.4}$$

фактически представляющее уравнение для определения Γ.

Заметим, что при заданном γ параметр C не может быть произвольным, поскольку в безразмерных переменных выполнено соотношение (3.5) (в котором для фигуры равновесия нужно заменить Ω_t на Ω). Таким образом, равенства (6.4), (3.5) определяют однопараметрическое семейство равновесных осесимметричных поверхностей Γ с параметром γ.

При $\gamma = 0$ поверхность Γ будет сферой радиуса $(3/(4\pi))^{1/3}$. Для малых γ справедлива асимптотика

$$C = 2\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\left[1 - \frac{9\gamma^2}{100\pi} + O(\gamma^4)\right]$$

Из результатов, изложенных ранее [1, 2], следует, что с ростом γ поверхность Γ начнет сплющиваться у полюсов, с дальнейшим увеличением γ ее средняя кривизна поменяет знак и, наконец, при некотором $\gamma_* \approx 2{,}381$ [2] каплеобразные формы равновесия перестанут существовать. Для $\gamma > \gamma_*$ возможны лишь кольцеобразные равновесные формы. Было показано [2], что все такие формы неустойчивы по отношению к неосесимметричным возмущениям, в то время как каплеобразные осесимметричные фигуры равновесия вращающейся капиллярной жидкости устойчивы при достаточно малых значениях параметра γ.

Вернемся к эволюционной задаче с вращательной симметрией. Она состоит в определении области Ω_t, ограниченной поверхностью вращения Γ_t, и решения системы (6.2) в этой области при краевых условиях (6.1), (6.3) и начальном условии

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0(x),\ x \in \Omega_0 \tag{6.5}$$

где вектор $\mathbf{w}_0$ не зависит от ϕ; для простоты предположим, что он также не зависит и от δ. В силу (3.2) это означает, что к интенсивному квазитвердому начальному вращению жидкого объема с угловой скоростью порядка $\delta^{-1/2}$ при $\delta \to 0$ добавляется не зависящее от ϕ, а в остальном произвольное (но согласованное с условием (2.10)) начальное распределение скоростей.

Предположим, что поверхность вращения Γ_0 гомеоморфна сфере, а параметр γ (определяемый начальным состоянием жидкого объема) превосходит критическое значение γ_*. Если в этих условиях решение задачи (6.1)–(6.3), (6.5) определено для всех $t > 0$, то в процессе эволюции области Ω_t ее топология изменится – односвязная свободная поверхность превратится в двухсвязную. Это следует из того факта, что вследствие диссипации кинетической энергии в движении с $D(\mathbf{w}) \neq 0$, предельным состоянием изолированного жидкого объема при $t \to \infty$ может быть только состояние квазитвердого вращения с постоянной угловой скоростью, а для $\gamma > \gamma_*$ все такие состояния соответствуют не каплеобразным, а кольцеобразным фигурам равновесия.

Насколько известно автору, процесс изменения топологии области течения в задачах подобного рода до сих пор не имеет аналитического описания. Было бы интересно изучить его в рамках квазистационарного приближения, к формулировке которого в условиях вращательной симметрии и переходим.

Требуется найти поверхность вращения Γ_t, $t \in (0, T)$, и решение $(u, v, w) = \mathbf{w}$, q стационарной системы Стокса

$$\tilde{\Delta} u - \frac{u}{r^2} - q_r = 0,\quad \tilde{\Delta} v - \frac{v}{r^2} = 0,\quad \tilde{\Delta} w - q_z = 0,\quad u_r + \frac{u}{r} + w_z = 0 \tag{6.6}$$

в области Ω_t, ограниченной этой поверхностью, так чтобы удовлетворялись условия (6.1), (6.3) и (2.10) (условие (2.11) для вращательно симметричных движений выполняется автоматически).

Схема исследования сформулированной задачи полностью аналогична изложенной в разд. 4. Однозначная разрешимость второй краевой задачи (6.3) для системы (6.6) при фиксированном t гарантируется условием (2.19) и условиями самоуравновешенности вектор-функции, стоящей в правой части (6.3), подобными (5.5) (последние в свою очередь вытекают из формулы Остроградского – Гаусса). Локальная теорема существования решения уравнения (6.1), описывающего эволюцию свободной границы, имеет место по крайней мере в случае звездной начальной поверхности Γ_0.

Решение задачи (6.1), (6.4), (6.6), (2.10) определяет главные члены внешнего разложения решения полной задачи (6.1)–(6.3), (6.5), (2.10), за которым сохраним обозначения $\mathbf{w}^{(0)}$, $q^{(0)}$. Главные члены внутреннего разложения $\mathbf{W}^{(0)}$, $Q^{(0)}$, компенсирующие невязку при подстановке $\mathbf{w}^{(0)}$ в начальное условие (6.5), и функции $\mathbf{u}^{(0)}$, $s^{(0)}$ определяются точно так же, как и в разд. 5. Асимптотическое решение полной задачи при $\delta \to 0$ имеет прежний вид (5.8) (с естественными изменениями, вызванными симметрией движения).

В известном смысле вращательно-симметричная задача богаче содержанием, чем классическая модель квазистационарного движения изолированного жидкого объема и ее модификация, рассмотренная выше. В двух последних случаях предельная форма свободной поверхности Γ_t при $t \to \infty$ может быть только сферой, а для решения задачи (6.1), (6.3), (6.6), (2.10) естественно ожидать стабилизации Γ_t с ростом t к нетривиальной фигуре равновесия Γ, определяемой при заданном γ соотношениями (6.4), (3.5) (с оговорками, сделанными выше). Кроме того, здесь удается построить следующие члены внешнего и внутреннего разложений решения полной задачи по полуцелым степеням параметра δ, однако такое построение выходит за рамки данной статьи.

Проблема обоснования асимптотики вида (5.8) решения задачи (3.1)–(3.4) при $\delta \to 0$ остается открытым даже для движений с вращательной симметрией. Исключение составляет плоский аналог задачи (6.1)–(6.3), (6.5), (2.10) (задача о вращающемся кольце, рассмотренная в [7]), где вопрос обоснования решен положительно. Можно доказать близость приближенного решения задачи о вращающемся кольце вида (5.8) к точному при $\delta \to 0$.

Автор благодарит В.А. Солонникова, многочисленные беседы с которым оказали большое влияние на содержание работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00818).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appel P.* Traité de mécanique rationnelle. T. 4. Fugures d'équilibre d'une masse liquide homogene en rotation. Paris: Gauthier – Villars, 1932. 350 p.; *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. – Л.; М.: ОНТИ, 1936. 375 с.
2. Гидромеханика невесомости / Под ред. А.Д. Мышкиса. М.: Наука, 1976. 504 с.
3. *Солонников В.А.* Разрешимость задачи об эволюции изолированного объема вязкой несжимаемой капиллярной жидкости // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1984. Т. 140. С. 179–186.
4. *Солонников В.А.* О неустановившемся движении конечной массы жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 152. С. 137–157.
5. *Солонников В.А.* Об эволюции изолированного объема вязкой несжимаемой капиллярной жидкости при больших значениях времени // Вестн. ЛГУ. 1987. Сер. 1. Вып. 3. С. 49–55.
6. *Солонников В.А.* О нестационарном движении конечной изолированной массы самогравитирующей жидкости // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 207–249.
7. *Лаврентьева О.М.* Предельные режимы движения вращающегося вязкого кольца // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1980. Вып. 44. С. 15–34.
8. *Günther M., Prokert G.* Existence results for the quasistationary motion of a free capillary liquid drop // Z. Analysis und ihre Anwendungen. 1997. V. 16. № 2. P. 311–348.
9. *Hopper R.W.* Plane Stokes flow driven by capillarity on a free surface // J. Fluid Mech. 1990. V. 213. P. 349–375.
10. *Антановский Л.К.* Бианалитическая функция напряжений-тока в плоских квазистационарных задачах капиллярной гидродинамики // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33. № 1. С. 1–11.
11. *Richardson S.* Two-dimensional slow viscous flows with time-dependent free boundaries driven by surface tension // Euro. J. Appl. Math. 1992. V. 3. № 3. P. 193–207.
12. *Prokert G.* On the existence of solutions in plane quasistationary Stokes flow driven by surface tension // Euro. J. Appl. Math. 1995. V. 6. № 5. P. 539–558.
13. *Солонников В.А.* Разрешимость трехмерной задачи со свободной границей для стационарной системы уравнений Навье – Стокса // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 84. С. 252–285.
14. *Пухначев В.В.* Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести // ПМТФ. 1977. № 3. С. 78–88.

Новосибирск

Поступила в редакцию
20.I.1998