если под областью G_* понимать область $C(\|x\|) \geqslant \eta$ (значения новых символов, применяемых ниже, см. в [1]), то можно записать $T \leqslant (K+1)(\tau_2 - \tau_1)$, где $\tau_2 - \tau_1 = 2L/\eta$, а величина K определяется из неравенства

$$C_0 - C_* \geqslant K \min[2lL/\eta, l\eta/(2A)]$$

Автор благодарит В.С. Сергеева за критические замечания при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

Москва

Поступила в редакцию 29.I.1998

УДК 531.36 : 534.1

 В. Моауро, П. Негрини

ХАОТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВОЙНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Доказана неинтегрируемость и существование хаотических траекторий в области большой энергии для двойного математического маятника при некотором ограничении на отношение масс.

Проблема интегрируемости и неинтегрируемости лагранжевых натуральных систем с компактным двумерным конфигурационным многообразием M связана с эйлеровой характеристикой $\chi(M)$. Как известно [1, 2], при $\chi(M) < 0$ каждый аналитический первый интеграл функционально зависим с интегралом энергии. Однако такое топологическое препятствие к интегрируемости отсутствует при $\chi(M) = 0$ (M – двумерный тор). Поэтому вопрос о существовании аналитического первого интеграла, независимого от интеграла энергии, для двойного математического маятника требует дальнейшего исследования.

Неинтегрируемость двойного математического маятника была доказана [3] для значений энергии, близких к максимуму потенциальной энергии, поэтому ниже изучается другая ситуация. В отличие от [3], где используются вариационные методы, ниже применены методы теории возмущений, аналогичные использованным ранее для анализа задачи о четырех вихрях [4]. Доказано, что для достаточно малых отношений масс и достаточно больших значений энергии существуют хаотические траектории двойного маятника. Этот результат получается оценкой интеграла Мельникова.

Было получено [5] численное свидетельство существования хаотических движений для обоих энергетических режимов.

Отметим, что при некоторых предположениях было доказано [6] несуществование дополнительного аналитического первого интеграла для *физического* двойного маятника.

1. Постановка задачи. Материальная точка P_1 массы m_1 движется в вертикальной плоскости по окружности радиуса l_1 с центром O. Лагранжева координата φ_1 – угол между вертикалью и отрезком OP_1. Точка P_2 массы m_2 движется в вертикальной плоскости на постоянном расстоянии l_2 от P_1. Лагранжева координата φ_2 – угол между OP_1 и P_1P_2. Будем рассматривать "быстрые движения" маятника, соответствующие большой кинетической энергии. Выполним замену времени $\tau = \omega^{-1/2}t$, где ω – большой параметр. Тогда функция

Лагранжа примет вид

$$L(\varphi_1, \varphi_2, \dot\varphi_1, \dot\varphi_2) = T(\varphi_2, \dot\varphi_1, \dot\varphi_2) + \frac{q}{\omega} U(\varphi_1, \varphi_2) \tag{1.1}$$

$$T = ((m_1 + m_2) l_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos\varphi_2 + m_2 l_2^2)\dot\varphi_1^2 / 2 + m_2 l_2 (l_2 + l_1 \cos\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + m_2 l_2^2 \dot\varphi_2^2 / 2$$

$$U = (m_1 + m_2) l_1 \cos\varphi_1 + m_2 l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

где точка означает дифференцирование по τ, g – ускорение силы тяжести.

2. Невозмущенная система. С точностью до несущественного множителя $(m_1 l_1^2)^{-1}$ функция Гамильтона, соответствующая функции Лагранжа (1.1), имеет вид

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 \tag{2.1}$$

$$H_0 = \frac{\mu l^2 p_1^2 - 2\mu l C p_1 p_2 + B p_2^2}{2\mu l^2 A}$$

$$H_1 = -(1+\mu)\cos\varphi_1 - \mu l \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$C = l + \cos\varphi_2, \quad B = 1 + \mu(1 + l^2 + 2l\cos\varphi_2), \quad A = 1 + \mu\sin^2\varphi_2$$

$$l = \frac{l_2}{l_1}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \varepsilon = \frac{l_1^3 m_1^2 g}{\omega}$$

Будем считать ε малым параметром. Для невозмущенного гамильтониана H_0 обобщенный импульс p_1 – первый интеграл.

Зафиксируем положительное число E и рассмотрим ограничение невозмущенной системы, соответствующей функции Гамильтона H_0, на уровень энергии $H_0 = E$. Методом Уиттекера эта система сводится к двум гамильтоновым системам с одной степенью свободы, соответствующим функциям Гамильтона

$$K_0^{\pm}(p_2, \varphi_2, E, \mu) = \frac{\sqrt{\mu} C p_2 \pm \sqrt{A(2E\mu l^2 - p_2^2)}}{l\sqrt{\mu}}$$

определенным в области $D = \{(p_2, \varphi_2) \in R^2 : |p_2| < \sqrt{2E\mu} l\}$.

Рассмотрим гамильтонову систему, соответствующую $K_0 = K_0^+$ (другой случай рассматривается аналогично):

$$\frac{dp_2}{d\varphi_1} = \frac{\partial K_0}{\partial \varphi_2}, \quad \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -\frac{\partial K_0}{\partial p_2}$$

Эта система имеет устойчивое положение равновесия

$$\varphi_2 = 0, \quad p_2 = l(l+1)\mu\sqrt{2E}(1 + \mu(l+1)^2)^{-1/2}$$

и гиперболические равновесия

$$\varphi_2 = \pm\pi, \quad p_2^\infty = l(l-1)\mu\sqrt{2E}(1 + \mu(l-1)^2)^{-1/2}$$

Гиперболические положения равновесия связаны сепаратрисами

$$p_2^{\pm} = \frac{\mu l \sqrt{2E}}{B}\left(C\sqrt{1 + \mu(l-1)^2} \pm \sqrt{2lAC}\right) \tag{2.2}$$

При достаточно малых μ сепаратрисы содержатся в D. Для определенности рассмотрим верхнюю сепаратрису. Уравнения движения вдоль нее имеют вид

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{B\sqrt{2lC}}{\sqrt{A(1 + \mu(l-1)^2)} - \mu\sqrt{2lC^3}}$$

а решение $\varphi_2(\varphi_1, \delta, \mu)$ получается обращением интеграла:

$$\varphi_1(\varphi_2, \delta, \mu) = \delta + s(\varphi_2) + O(\mu), \quad s(\varphi_2) = \frac{1}{2\sqrt{l}} \ln \frac{1+\sin(\varphi_2/2)}{1-\sin(\varphi_2/2)} \tag{2.3}$$

где δ – начальное значение.

3. Интеграл Мельникова. Вернемся к полному гамильтониану (2.1). Решим уравнение $H = E$ относительно p_1:

$$p_1^{\pm} = \frac{\sqrt{\mu}Cp_2 \pm \sqrt{A(2(E-\varepsilon H_1)\mu l^2 - p_2^2)}}{l\sqrt{\mu}}$$

Величина ε должна быть достаточно малой. Ограничение гамильтоновой системы на уровень энергии $H = E$ в окрестности сепаратрисы (2.2) сводится к системе с полутора степенями свободы и функцией Гамильтона

$$K(p_2, \varphi_2, \varphi_1, E, \mu, \varepsilon) = K_0(p_2, \varphi_2, E, \mu) + \varepsilon K_1(p_2, \varphi_2, \varphi_1, E, \mu) + \ldots$$

$$K_1(p_2, \varphi_2, \varphi_1, E, \mu) = -H_1(\varphi_1, \varphi_2, \mu)\partial K_0/\partial E$$

Представляя сепаратрису (2.2) невозмущенной системы в виде

$$p_2 = p_2(\varphi_2, \mu), \quad \varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1, \delta, \mu)$$

запишем интеграл Мельникова

$$M(\mu, \delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial K_0}{\partial \varphi_2}\frac{\partial K_1}{\partial p_2} - \frac{\partial K_0}{\partial p_2}\frac{\partial K_1}{\partial \varphi_2} \right\}_{\substack{p_2 = p_2(\varphi_2, \mu) \\ \varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1, \delta, \mu)}} d\varphi_1$$

Представив выражение в фигурных скобках следующим образом:

$$\left(\frac{\partial K_0(p_2, \varphi_2, E, \mu)}{\partial E} - \frac{\partial K_0(p_2^{\infty}, \pi, E, \mu)}{\partial E} \right) \frac{\partial H_1(\varphi_1, \varphi_2, \mu)}{\partial \varphi_1} +$$

$$+ \frac{\partial K_0(p_2^{\infty}, \pi, E, \mu)}{\partial E} \left(\frac{\partial H_1(\varphi_1, \varphi_2, \mu)}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial H_1(\varphi_1, \pi, \mu)}{\partial \varphi_1} \right)$$

и используя явные выражения для K_0 и H_1, получим

$$M = \mu\sqrt{\frac{2}{E}}\, I \sin\delta + o(\mu)$$

$$I = \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2}\sqrt{2l(1+\cos x)} + l - 1 + \cos x \right) \cos s(x)\, dx$$

Используя равенства (2.3) и

$$\int_0^{\pi} \cos x \cos s(x)\, dx = \frac{1}{l}\int_0^{\pi} \cos s(x)\, dx$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2l(1+\cos x)} \cos s(x)\, dx = 2l\int_0^{\pi} \sin x \sin s(x)\, dx$$

получим

$$I = 3lI_1 + (l - 1 + l^{-1})I_2$$

$$I_1 = 2\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iku} \frac{\mathrm{sh}\, u}{\mathrm{ch}^3 u} du, \quad I_2 = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iku}}{\mathrm{ch}\, u} du; \quad k = \frac{1}{\sqrt{l}}$$

Вычислим интегралы I_1 и I_2 с помощью вычетов, выбирая путь интегрирования в виде малой окружности с центром $z = 0$ внутри полосы $\{z \in C : \operatorname{Im} z \in [-\pi/2, \pi/2]\}$. Окончательно найдем

$$I = 2\pi\left(3\operatorname{ch}\frac{\pi}{2\sqrt{l}} + \frac{l^2 - l + 1}{l\sqrt{l}}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2\sqrt{l}}\right)\Big/\operatorname{sh}\frac{\pi}{\sqrt{l}}$$

Поскольку $I > 0$ при $l > 0$, доказана следующая теорема.

Теорема. Для любого $l > 0$ существует $\mu(l) > 0$ и аналитическая функция $\delta : (0, \mu(l)) \to R$, $\lim_{\mu \to 0}\delta(\mu) = 0$, такая, что $\delta(\mu)$ – простой нуль интеграла Мельникова.

Следовательно, при очень большой энергии, т.е. для достаточно малых ε, существует трансверсальная гомоклиническая точка ν_ε, т.е. точка трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий отображения Пуанкаре Ψ_ε системы с функцией Гамильтона H. Отсюда вытекает сопряженность некоторой степени Ψ_ε на инвариантном подмножестве в окрестности множества $\overline{\cup_{n \in Z}\Psi_\varepsilon^n(\nu_\varepsilon)}$ со сдвигом Бернулли на множестве бесконечных последовательностей из двух символов [7, 8]. В частности, система не имеет аналитических первых интегралов, функционально независимых с интегралом энергии.

Работа выполнена при поддержке Итальянского совета по исследованиям (CNR-GNFM) и Министерства университетов (MURST).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В.* Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во удм. ун-та, 1995. 429 с.
2. *Bolotin S.V.* Homoclinic orbits of geodesic flows on surfaces // Russian J. of Math. Phys. 1993. V. 1. N 3. P. 275–288.
3. *Bolotin S.V., Negrini P.* A variational criterion for non-integrability // Russian J. of Math. Phys. 1997. V. 5. N 4. P. 415–439.
4. *Castilla M.S., Moauro V., Negrini P., Oliva W.M.* The four positive vortices problem: Regions of chaotic behaviour and the non-integrability // Ann. Inst. Poincaré. Phys. Théor. 1993. V. 59. N 1. P. 99–115.
5. *Richter P.H., Scholz H.J.* Chaos in classical mechanics: the double pendulum // Stochastic Phenomena and Chaotic Behaviour in Complex Systems. Berlin: Sringer, 1984. P. 86–96.
6. *Буров А.А.* О несуществовании дополнительного интеграла задачи о тяжелом двухзвенном маятнике // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 168–171.
7. *Moser J.* Stable and Random Motions in Dynamical Systems. Ann. Math. Studies. Princeton: Univ. Press, 1973. V. 77. 198 p.
8. *Smale S.* Diffeomorphisms with many periodic points. Differential and Combinatorial Topology. Princeton: Univ. Press. 1965. V. 17. P. 63–80.

Италия

Поступила в редакцию
15.V.1997