УДК 531.36:534.1

© 1998 г. А.П. Блинов

ОБ ОЦЕНКЕ ВРЕМЕНИ ДВИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В предположении лишь знакоотрицательности производной от функции Ляпунова для автономных систем второго порядка и для некоторых систем более высокого порядка получена оценка времени, необходимого для того, чтобы фазовые точки динамической системы достигли заданной конечной области, содержащей асимптотически устойчивое решение, из любого начального положения, принадлежащего заданной области.

Ранее [1] оценка времени сверху была получена в случае, когда функция Ляпунова имеет определенно-отрицательную производную.

1. Пусть начало координат (точка O) является асимптотически устойчивым решением системы уравнений

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \tag{1.1}$$

для которой известна положительно-определенная функция Ляпунова $V(x, y)$, такая, что вдоль решений $\dot{V}(x, y) \leqslant 0$.

Дадим оценку времени движения любой фазовой точки, лежащей на границе области G_0, определяемой уравнением $V(x, y) = C_0$, до границы заданной области G_*, определяемой уравнением $V(x, y) = C_*$.

Линии семейства $V(x, y) = C$, соответствующие параметру C, а также их длины будем обозначать $l(C)$.

Пусть начало координат – особая точка типа устойчивого фокуса и фазовая точка, совпадающая при $t = 0$ с точкой A_0 (фигура), за время t_0 делает один полный обход начала координат по траектории длины γ, причем эта траектория не замкнута. (Под полным обходом здесь понимается движение, при котором начало и конец траектории γ лежат на одной и той же линии ортогонального к $l(C)$ семейства $L(\beta)$.)

Пусть $l(C)$ – семейство гладких выпуклых кривых при $C \leqslant C_0$ и траектория γ выпукла относительно точки O, тогда

$$\gamma \leqslant l(C_0) \tag{1.2}$$

Непосредственно в этом можно убедиться, если $l(C_0)$ – окружность радиуса ρ_0, а γ – логарифмическая спираль, причем разность между приращениями дуг окружности и спирали равна

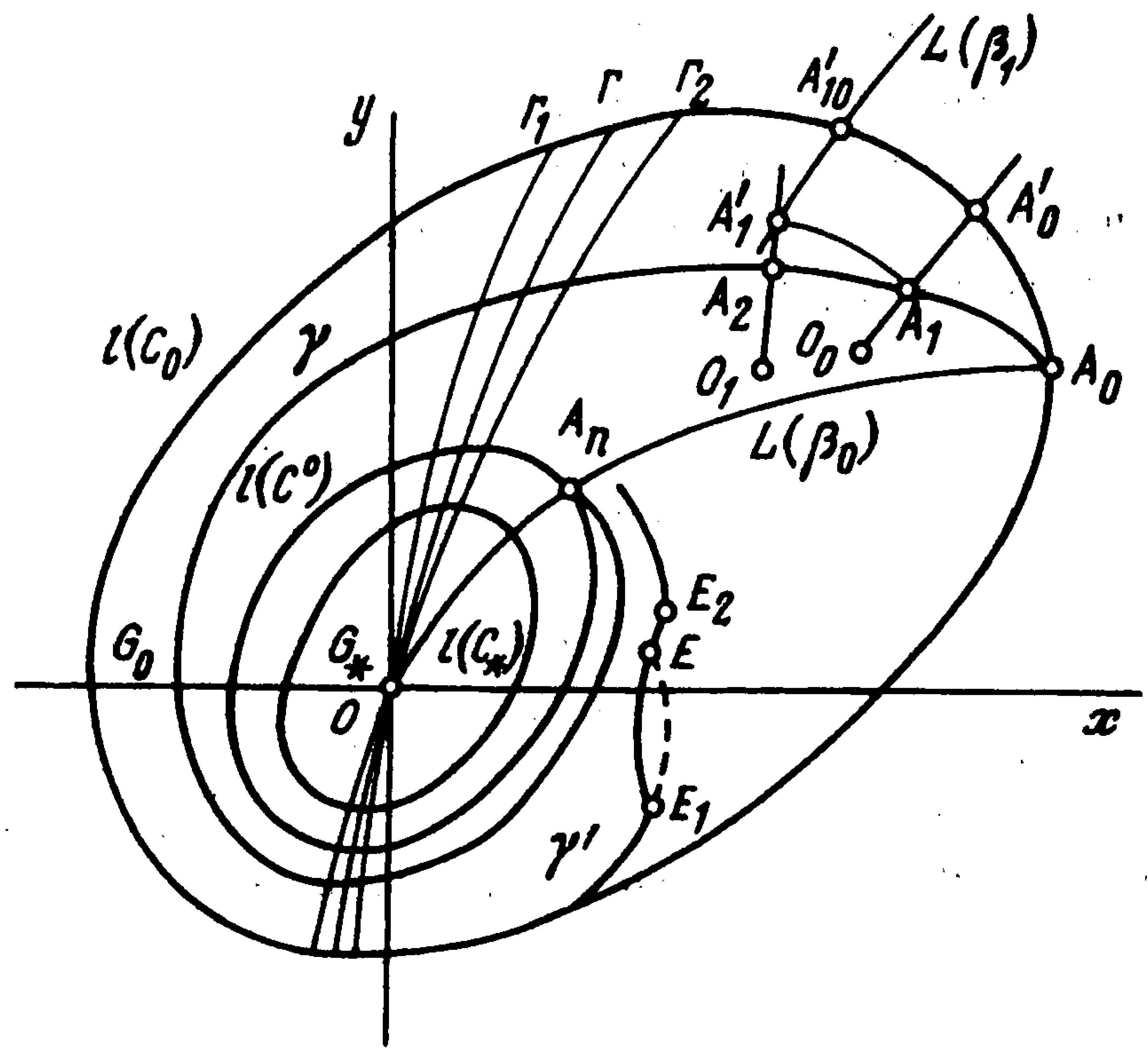
$$\rho_0(1 - \cos\alpha_0)\,\varphi + O(\varphi^2),$$

где α_0 – острый угол между касательными к окружности и спирали, φ – полярный угол радиус-вектора, отсчитываемый от точки пересечения кривых в сторону свертывания спирали.

В общем случае пусть Γ – линия (или несколько линий), на которой $\dot{V}(x, y) = 0$, а Γ_1 и Γ_2 – линии, полученные, например, из Γ поворотом на малый угол (или представленные в виде $y = (1 \pm \delta)\,\Phi'(x)$, где $y = \Phi(x)$ – уравнение линии Γ, а δ – малое положительное число (фигура)).

Пусть B – набор секторов, заключенных между линиями Γ_1 и Γ_2 и содержащих Γ. На линии Γ дуги γ и $l(C)$ касаются. Поэтому внутри B они равны с точностью $o(\delta)$. Вне областей B и G_* траектория γ пересекает линии $l(C)$ под углом $\alpha_C \geqslant \alpha_0 > 0$.

Пусть O_0 – центр кривизны для $l(C_0)$ в точке $A_0 \notin B$. В малом круге K_0 радиуса δ_0 с центром в этой точке семейство линий $l(C)$ можно аппроксимировать семейством ок-



ружностей с общим центром O_0, а линию γ – логарифмической спиралью с точностью $o(\delta_0)$. Луч, проведенный из точки O_0 через точку $A_1 \in \gamma \cap K_0$, отсечет на $l(C_0)$ дугу A_0A_0', которая должна быть больше дуги A_0A_1 линии γ. Если $A_1 \notin B$, определим центр кривизны O_1 линии $l(C_1) \ni A_1$ и круг K_1 радиуса δ_1, точку $A_2 \in \gamma \cap K_2$ и луч O_1A_2. Этот луч отсечет на $l(C_1)$ дугу A_1A_1', которая должна быть меньше дуги $A_1A_2 \in \gamma$, так как последняя также аппроксимируется элементом логарифмической спирали.

Пусть $L(\beta_1)$ – линия семейства $L(\beta)$, проходящая через точку A_1', пересекается с линией $l(C_0)$ в точке A_{10}'. В силу выпуклости $l(C)$ дуга $A_0'A_{10}'$ больше дуги A_1A_1'. Если $A_1 \in B$, то в качестве точки A_2 можно взять пересечение γ с Γ_1.

Так, продолжая двигаться вдоль γ, линия $l(C_0)$ разобьется на сумму дуг A_0A_0', $A_0'A_{10}', \ldots$, $A_{n-1}'A_n$, каждая из которых с точностью $o(\delta_k)$ больше соответствующего элемента линии γ. Переходя к пределу при $n \to \infty$ ($\max(\delta, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n) \to 0$), получим неравенство (1.2).

Аналогичные рассуждения приводят к неравенству

$$l(C_*) \leqslant \gamma \tag{1.3}$$

Принятое выше предположение о выпуклости кривой γ можно отбросить, если последняя пересекает все линии $l(C)$ под острым углом ($\alpha_C < \pi/2$).

В самом деле, пусть между точками E_1 и E_2 некоторая траектория γ' вогнута (фигура). По предположению, в точке E_1 угол $\alpha_1 > \alpha_0$. Тогда из точки E_1 можно выпустить луч под углом $\alpha_0/2$ к касательной к γ', который пересечет дугу E_1E_2 в некоторой точке E. Отобразив дугу E_1E зеркально относительно указанного луча, получим выпуклую дугу E_1E (штриховая линия на фигуре), которая пересекает линии $l(C)$ под острыми углами. Следовательно, к этой дуге можно применить приведенные выше рассуждения. Описанную процедуру можно повторить в точке E, если последняя не лежит в секторе B. Таким образом, через конечное число шагов прийдем в точку E_2.

Покажем теперь, что для механических систем с одной степенью свободы условие $\alpha_C < \pi/2$ выполняется.

Движение такой системы описывается уравнениями

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -b(x, y) - c(x)$$

где $b(x, y) \geqslant 0$ и $c(x) \geqslant 0$ – соответственно диссипативные и консервативные силы. Угол α_C между вектором v фазовой скорости и вектором v_0 к линии $l(C)$, которая в этом случае также описывается данным уравнением при $b(x, y) \equiv 0$, остается острым, пока скалярное произведение $\mathbf{v}\mathbf{v}_0 \geqslant 0$ или $y^2 + c^2(x) + c(x)b(x,y) \geqslant 0$, что заведомо выполняется. Для уравнений общего вида требование $\mathbf{v}\mathbf{v}_0 \geqslant 0$ остается.

За время t_0 параметр C_0 уменьшится на величину ΔC ($\Delta C > 0$). На основании неравенств (1.2) и (1.3) можно составить следующие неравенства

$$l(C^0)/W_M < t_0 < l(C_0)/W_m \tag{1.4}$$

$$C^0 = C_0 - \Delta C,\ \ W_m = \inf_{G_{00}} W,\ \ W_M = \sup_{G_{00}} W,\ \ W = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

($G_{00} = G_0 \backslash G^0$ – кольцевая область между линиями $l(C_0)$ и $l(C^0)$.)

Часто значение W_M достигается на линии $l(C_0)$. Для некоторого упрощения этот случай далее и будет рассматриваться.

Время движения t_B фазовой точки через секторы B можно оценить неравенством $t_B \leqslant l_B/W_B$, где l_B – сумма длин кусков линии $l(C_0)$, лежащих в B, а $W_B = \inf W$ в области $B_0 = B \cap G_{00}$.

Тогда

$$\Delta C = -\int_0^{t_0} \dot{V} dt \geqslant \mu(t_0 - t_B),\ \ \mu = \inf_{B_0} |\dot{V}|$$

или при учете (1.4)

$$\Delta C \geqslant \mu[l(C^0)/W_M - l_B/W_B] \tag{1.5}$$

Решение этого неравенства зависит от выбора ширины полосы B, т.е. выбором l_B правую часть можно максимизировать. Но на первом шаге выбор l_B должен быть таким, чтобы правая часть (1.5) была неотрицательна при любом $\Delta C \leqslant C_0 - C_*$. Для этого достаточно взять $l_B = l_{B_*} = l(C_*)W_{m^*}/W_M$, $W_{m^*} = \inf W$ в области $G_{0_*} = G_0 \setminus G_*$.

Обозначим ΔC_* некоторое (лучшее максимальное) при $l_{B^*} \leqslant l_B \leqslant l(C_0)$ значение ΔC, удовлетворяющее неравенству (1.5).

Замечание. Правая часть (1.5) при фиксированном l_{B^*} растет, начиная с нуля, а левая часть $\Delta C = C_0 - C^0$ убывает при увеличении C^0 от C_* до C_0. Поэтому найдется значение $C^0 = C^{0*}$, при котором неравенство (1.5) перейдет в равенство. Соответствующее значение ΔC можно принять за ΔC_*, но можно и еще максимизировать ΔC новым выбором l_B в промежутке $[l_{B_*}, l_{B_0}]$, $l_{B_0} = l(C^{0*})W_{m0}/W_M$, $W_{m0} = \inf W$ в области между линиями $l(C_0)$ и $l(C^{0*})$ (вместо фиксации $l_B = L_{B_*}$, как было сделано на первом шаге).

Для времени t_0 можно дать следующую оценку:

$$\max[\Delta C_*/M;\ l(C_*)/W_M] \leqslant t_0 \leqslant \min[(C_0 - C_*)/\mu + l_B/W_B;\ l(C_0)/W_{m^*}] \tag{1.6}$$

$M = \sup[\Delta C_*/M;\ l(C_*)/W_M]$ в области G_{0_*}.

Далее, исходя из значения $C = C_0 - \Delta C_*$, получим оценку времени движения фазовой точки на втором витке и т.д. до попадания в область G_*. (Таким образом, в процессе оценки времени движения фазовой точки до попадания в область G_* оценивается сверху как время движения на витке, так и число витков).

Приведенные оценки пригодны и для неустойчивого фокуса или узла, если интересоваться временем ухода из области G_{0^*}.

Пример. Пусть движение маятника с диссипативной и нелинейной упругой связью в безразмерном виде задано уравнениями

$$\dot{x} = y,\ \ \dot{y} = -y - 2x^3$$

Здесь $W=[y^2+(y+2x^3)^2]^{1/2}$, $V=(x^4+y^2)/2$, $\dot V=-y^2$ и линии $V(x,y)=C$ выпуклы.

Пусть $C_0 = 10$, $C_* = 5$. Тогда $l(C_*) = 16{,}8$ (графическое решение), $W_{m^*} = W_B \cong 4{,}5$, $W_M = 18{,}9$, $l_{B_*} = 4$.

В качестве сектора B возьмем полосу между прямыми $y = \pm 1$. Тогда $\mu = 1$.

Примем $C^0 = 9$. Тогда $l(C^0) = 20{,}8$, $W_B = 6{,}0$. При этом правая часть (1.5) равна 0,43, что пока еще меньше $\Delta C = C_0 - C^0 = 1$. Поэтому на следующем шаге положим $C^0 = 9{,}5$. Вновь вычисляя правую часть (1.5), получим ее величину 0,55, что позволяет принять $\Delta C_* \approx 0{,}5$. Тогда согласно (1.6) получим $0{,}9 \leqslant t_0 \leqslant 5{,}37$.

2. Для многомерных динамических систем в условиях применимости теоремы Кордуняну [1] для оценки T – времени движения фазовой точки до попадания в заданную область можно воспользоваться известными результатами ([1], п.п. а), б) с. 67). В самом деле, из п. а) [1] имеем

$$a(\|x\|)\leqslant u(t;t_0,V(t_0,x_0))$$

(t_0 – начальный момент времени). Фиксируя конечную область попадания как $\|x\|\leqslant b$, получим

$$a(b)\leqslant u(t_0+T,\ t_0,\ V(t_0,x_0)) \tag{2.1}$$

Из последнего неравенства и следует оценка для T.

Пример 1 (аналог примера из [1] с. 68). Рассмотрим систему

$$\dot x=(-Et+A(t,x))x$$

где E – единичная матрица, $A(t, x)$ – кососимметричная матрица. Пусть $V=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$. Тогда $\dot V=2x_1(-tx_1)+2x_2(-tx_2)+\ldots=-2Vt$.

Решение $u = 0$ скалярного уравнения сравнения $\dot u=-2ut$ (здесь $\omega(t, u) = -2ut$ и неравенство $\dot V\leqslant\omega(t,V)$ выполняется) асимптотически устойчиво, так как общее решение $u = C\exp(-t^2)$.

Положим $t_0=0$; $\|x_0\|=e^2$; $b=1$. Так как $u(t_0)=u(t_0;t_0,V(t_0,x_0))$, то $u(t_0)=V(t_0,x_0)=\|x_0\|^2=e^4$. С другой стороны, $u(t_0)=C\exp(-t_0^2)$, откуда $C=e^4$ и $u(T)=\exp(4-T^2)$.

Учитывая, что в данном случае $a(\|x\|)=V=\|x\|^2$, из неравенства (2.1) получим

$$T\leqslant 2$$

Так как в этом примере функция $\dot V$ определенно-отрицательна, можно получить оценку T из неравенства

$$\Delta V=-\int_0^T\dot V dt=2\int_0^T Vtdt\geqslant \inf_{G_{0*}}V\cdot T^2 \tag{2.2}$$

$$\Delta V=e^4-1,\ \inf_{G_{0*}}V=2;\ T\leqslant 5$$

Пример 2. Для системы

$$\dot x=(-E\sin^2 t+A(t,x))x$$

имеем $\dot V=-2V\sin^2 t$, и нельзя применить неравенство (2.2). Но применяя (2.1), получим $T\leqslant 4{,}5$.

В условиях применимости теоремы В.М. Матросова ([1], с. 58, 59) можно также получить оценку T, используя основные оценки при доказательстве данной теоремы. В самом деле, если под областью G_* понимать область $C(\|x\|)\geqslant\eta$ (значения новых символов, применяемых ниже, см. в [1]), то можно записать $T \leqslant (K+1)(\tau_2-\tau_1)$, где $\tau_2-\tau_1 = 2L/\eta$, а величина K определяется из неравенства

$$C_0 - C_* \geqslant K \min[2lL/\eta, l\eta/(2A)]$$

Автор благодарит В.С. Сергеева за критические замечания при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.I.1998

УДК 531.36 : 534.1

© 1998 г. В. Моауро, П. Негрини

ХАОТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВОЙНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Доказана неинтегрируемость и существование хаотических траекторий в области большой энергии для двойного математического маятника при некотором ограничении на отношение масс.

Проблема интегрируемости и неинтегрируемости лагранжевых натуральных систем с компактным двумерным конфигурационным многообразием M связана с эйлеровой характеристикой $\chi(M)$. Как известно [1, 2], при $\chi(M) < 0$ каждый аналитический первый интеграл функционально зависим с интегралом энергии. Однако такое топологическое препятствие к интегрируемости отсутствует при $\chi(M) = 0$ (M – двумерный тор). Поэтому вопрос о существовании аналитического первого интеграла, независимого от интеграла энергии, для двойного математического маятника требует дальнейшего исследования.

Неинтегрируемость двойного математического маятника была доказана [3] для значений энергии, близких к максимуму потенциальной энергии, поэтому ниже изучается другая ситуация. В отличие от [3], где используются вариационные методы, ниже применены методы теории возмущений, аналогичные использованным ранее для анализа задачи о четырех вихрях [4]. Доказано, что для достаточно малых отношений масс и достаточно больших значений энергии существуют хаотические траектории двойного маятника. Этот результат получается оценкой интеграла Мельникова.

Было получено [5] численное свидетельство существования хаотических движений для обоих энергетических режимов.

Отметим, что при некоторых предположениях было доказано [6] несуществование дополнительного аналитического первого интеграла для *физического* двойного маятника.

1. Постановка задачи. Материальная точка P_1 массы m_1 движется в вертикальной плоскости по окружности радиуса l_1 с центром O. Лагранжева координата φ_1 – угол между вертикалью и отрезком OP_1. Точка P_2 массы m_2 движется в вертикальной плоскости на постоянном расстоянии l_2 от P_1. Лагранжева координата φ_2 – угол между OP_1 и P_1P_2. Будем рассматривать "быстрые движения" маятника, соответствующие большой кинетической энергии. Выполним замену времени $\tau = \omega^{-1/2}t$, где ω – большой параметр. Тогда функция