УДК 528.56 : 531.383

© 1998 г. Цай Тицзин

БЕСПЛАТФОРМЕННАЯ ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИОННАЯ СИСТЕМА НА ОСНОВЕ КАНОНИЧЕСКОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ГРАДИЕНТОМЕТРА

Строится алгоритм идеального функционирования бесплатформенной и безгироскопной инерциальной навигационной системы, использующей в качестве исходной информации показания восемнадцати акселерометров, которые можно рассматривать в совокупности как гравитационный градиентометр.

Рассмотрим бесплатформенную инерциальную навигационную систему (БИНС), чувствительные элементы которой – акселерометры и канонический гравитационный градиентометр (КГГ). Введем правые системы координат: 1) земную систему координат $O_1\xi\eta\zeta$, начало которой совмещено с центром Земли, а ось $O_1\zeta$ направлена вдоль вектора абсолютной угловой скорости вращения Земли $\boldsymbol{\omega}_e$, а ось $O_1\xi$ – по Гринвичскому меридиану; 2) геоцентрическую систему координат O_1xyz, начало которой помещено в центр Земли, а оси параллельны соответствующим осям системы координат $Oxyz$, неподвижно связанной с объектом и вращающейся с абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Известно, что вектор ускорения силы тяжести $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ гравитационного поля Земли в земной системе $O_1\xi\eta\zeta$ не зависит от времени t. Поэтому его полная производная по времени в системе $O_1\xi\eta\zeta$ равна

$$d\mathbf{g}/dt = \nabla\mathbf{g}\cdot\mathbf{v} = G(\mathbf{r})\cdot\mathbf{v}$$

где $G(\mathbf{r})$ – тензор градиента ускорения силы тяжести, $\mathbf{v}$ – вектор скорости объекта относительно Земли. Абсолютная скорость $\mathbf{v}_a$ и относительная скорость $\mathbf{v}$ связаны следующим равенством:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор из центра Земли O_1 до начала O системы координат $Oxyz$.

Вычислив абсолютную производную по времени от обеих частей последнего равенства, получаем

$$d\mathbf{v}_a/dt = \dot{\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_e)\times\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_e\times(\boldsymbol{\omega}_e\times\mathbf{r}) \tag{1}$$

где точкой обозначена производная в системе координат O_1xyz. По второму закону Ньютона движение объекта удовлетворяет уравнению

$$d\mathbf{v}_a/dt = \mathbf{a} + \mathbf{g}' \tag{2}$$

где вектор кажущегося ускорения $\mathbf{a}$ измеряется акселерометрами, $\mathbf{g}'$ – вектор напряженности поля тяготения.

Введем тензор гравитационного градиента $T(\mathbf{r})$, т.е. $T(\mathbf{r}) = \nabla\mathbf{g}'$. На основании равенства (1) уравнение (2) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_e)\times\mathbf{v} = \mathbf{a}+\mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}' - \boldsymbol{\omega}_e\times(\boldsymbol{\omega}_e\times\mathbf{r}) \tag{3}$$

Выражая производные от векторов $\mathbf{g}$ и $\mathbf{r}$ в системе $O_1\xi\eta\zeta$ через производные в системе O_1xyz, получаем

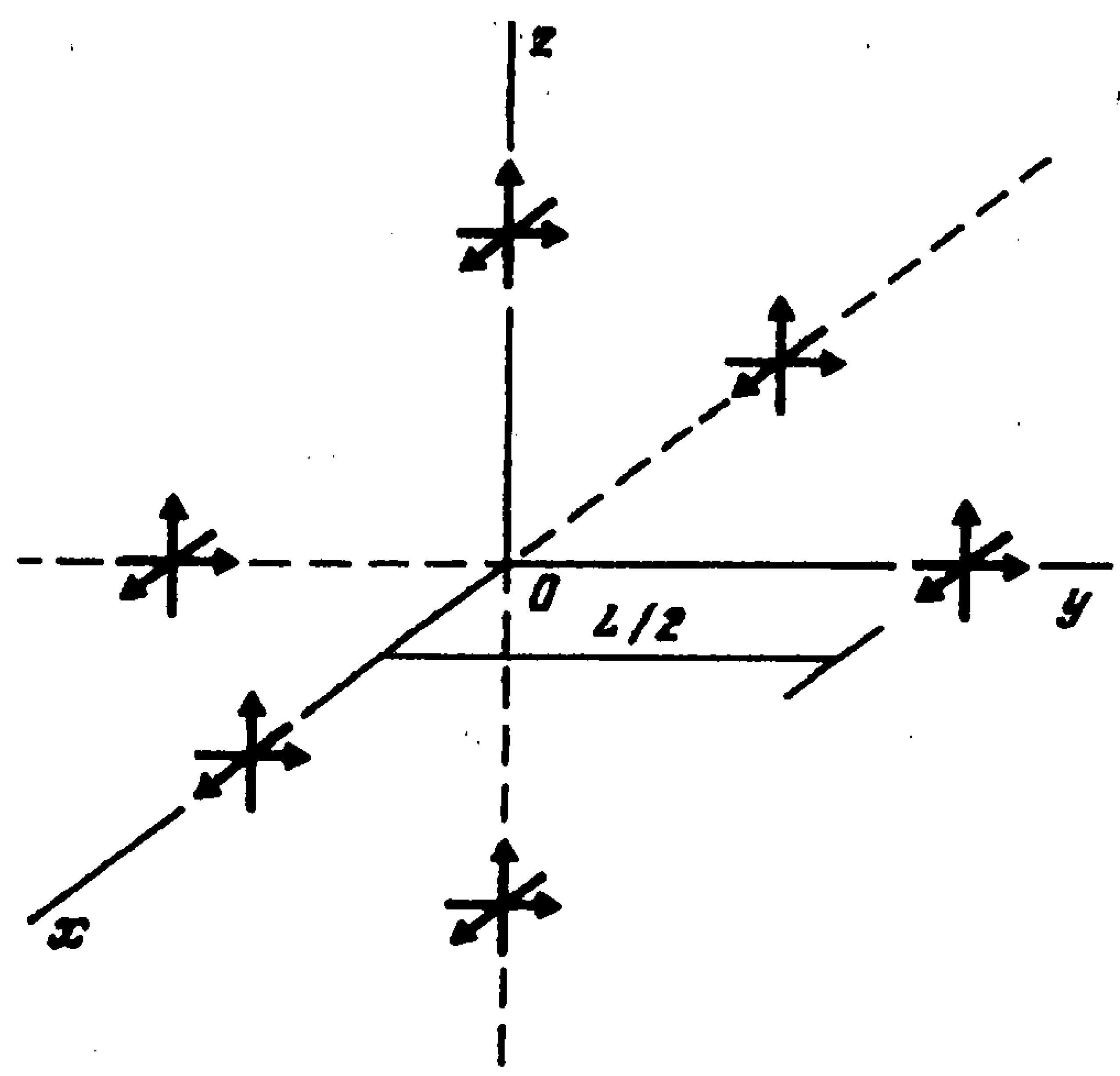
$$\dot{\mathbf{g}} + (\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_e)\times\mathbf{g} = G(\mathbf{r})\cdot\mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{r}} + (\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_e)\times\mathbf{r} = \mathbf{v} \tag{4}$$

Вычислив производную но времени в системе O_1xyz от обеих частей уравнения (3) и учтя уравнения (3) и первое уравнение (4), получаем

$$\ddot{\mathbf{v}}+2\Omega\cdot\dot{\mathbf{v}}+\left(\dot{\Omega}+\Omega^2-T(\mathbf{r})\right)\cdot\mathbf{v}=\dot{\mathbf{a}}+(\Omega-\Omega')\cdot\mathbf{a}$$

$$T(\mathbf{r})=G(\mathbf{r})+\Omega'^2 \tag{5}$$

$$\Omega=\begin{Vmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{Vmatrix},\quad \Omega'=\begin{Vmatrix}0 & -\omega_{ez} & \omega_{ey}\\ \omega_{ez} & 0 & -\omega_{ex}\\ -\omega_{ey} & \omega_{ex} & 0\end{Vmatrix}$$



(угловое ускорение вращения Земли равно нулю).

КГГ состоит из шести трехосных акселерометров или восемнадцати одноосных акселерометров высокой точности, размещенных на расстоянии $L/2$ от начала системы координат $Oxyz$ (фигура). Наблюдаемая компонента тензора гравитационного градиента приближена конечной разностью между каждой парой показаний акселерометров, имеющих одну и ту же ось системы координат.

Для одноосного акселерометра сила Кориолиса ортогональна к скорости движения чувствительной массы в акселерометре. Следовательно, можем ее опустить. Если в акселерометре используется обратная связь по силе, то считаем, что относительное ускорение чувствительной массы равно нулю. Поэтому имеем

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_o+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{\rho}-\mathbf{g}' \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор от начала системы координат $Oxyz$ до центра чувствительной массы акселерометра, $\mathbf{a}_o$ – абсолютное ускорение начала O системы координат $Oxyz$, ускорение $\mathbf{a}$ измеряется акселерометром. Если кроме силы тяжести никакие внешние силы не действуют на чувствительную массу в акселерометре, т.е. $\mathbf{a}=0$, то относительное ускорение равно правой части выражения (6) с обратным знаком.

Используя показания акселерометров $\mathbf{a}_i$ в точках p_i ($i = 1, 2, ..., 6$), из уравнения (6) получим формулу для изменения компонент тензора гравитационного градиента

$$A=T-\Omega^2-\dot{\Omega} \tag{7}$$

где

$$T=\nabla\mathbf{g}_o,\quad A=\frac{1}{L}\begin{Vmatrix}(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)_x & (\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)_y & (\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)_z\\ (\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_3)_x & (\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_3)_y & (\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_3)_z\\ (\mathbf{a}_6-\mathbf{a}_5)_x & (\mathbf{a}_6-\mathbf{a}_5)_y & (\mathbf{a}_6-\mathbf{a}_5)_z\end{Vmatrix} \tag{8}$$

Так как $\dot{\Omega}$ – антисимметричный тензор, а T, Ω^2 – симметричные тензоры, то из уравнения (7) получим угловое ускорение

$$(2L)^{-1}\left[(\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_3)_z-(\mathbf{a}_6-\mathbf{a}_5)_y\right]=\dot{\omega}_x \quad (135,\ 246,\ xyz) \tag{9}$$

(невыписанные соотношения получаются круговой перестановкой индексов).

Интегрируя эти уравнения, получим абсолютную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$.

Рассмотрим точность показаний акселерометров, составляющих КГГ. Если для КГГ требуется точность $10^{-2} \sim 10^{-4}$ Е (Этвеш, 1Е = 10^{-9} с$^{-2}$) и L = 0,1 м, то акселерометру необходимо иметь разрешающую способность $10^{-12} \sim 10^{-14}$ м/с^2. Если требуется разрешающая способность по угловому ускорению вращения $10^{-11} \sim 10^{-13}$ рад/с^2, то акселерометр должен иметь разрешающую способность $10^{-12} \sim 10^{-14}$ м/с^2.

Для КГГ на основании уравнения (7) уравнение (5) можно записать так:

$$\ddot{\mathbf{v}}+2\Omega\cdot\dot{\mathbf{v}}-A\cdot\mathbf{v}=\dot{\mathbf{a}}+(\Omega-\Omega')\cdot\mathbf{a} \tag{10}$$

где векторы **a** и **υ** относятся к центру градиентометра O, компоненты тензора A измеряются КГГ. Интегрируя уравнение (10) по времени и используя уравнения (3), получаем

$$\boldsymbol{\upsilon} = -2\int_0^t \Omega \cdot \boldsymbol{\upsilon} d\tau + \int_0^t\int_0^t \left(2\dot{\Omega} + A\right) \cdot \boldsymbol{\upsilon} d\tau d\tau + \int_0^t \mathbf{F} d\tau + \boldsymbol{\upsilon}^0$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{a} + \int_0^t (\Omega - \Omega') \cdot \mathbf{a} d\tau + \mathbf{g}^0 - \left(\Omega^0 - \Omega'^0\right) \cdot \boldsymbol{\upsilon}^0 \qquad (11)$$

Нулевым верхним индексом отмечено начальное значение.

Вектор углового ускорения одновременно измеряется КГГ. Интегрируя уравнения (9), получим угловую скорость вращения объекта

$$\omega_x = \frac{1}{2L} \int_0^t \left[\left(\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_3\right)_z - \left(\mathbf{a}_6 - \mathbf{a}_5\right)_y\right] d\tau + \omega_x^0 \quad (135,\ 246,\ xyz) \qquad (12)$$

Так как **a**, **ω**, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, A могут измеряться и вычисляться, то сначала из уравнения (11) по начальным значениям $\mathbf{r}^0, \boldsymbol{\upsilon}^0, \mathbf{g}^0$ и заданной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_e$ можно найти относительную скорость **υ**. Затем на этом основании из уравнения (3), второго уравнения (4) и уравнения (11) получим вектор ускорения силы тяжести **g** и вектор местоположения **r**

$$\mathbf{g} = -(\Omega - \Omega') \cdot \boldsymbol{\upsilon} + \int_0^t \left(2\dot{\Omega} + A\right) \cdot \boldsymbol{\upsilon} d\tau + \mathbf{F} - \mathbf{a} \qquad (13)$$

$$\mathbf{r} = \int_0^t \left(\boldsymbol{\upsilon} - (\Omega - \Omega') \cdot \mathbf{r}\right) d\tau + \mathbf{r}^0 \qquad (14)$$

Все векторы **r**, **υ** и **g** определены в системе координат $O_1\xi\eta\zeta$.

Для оценки ошибки БИНС на основе КГГ составим уравнения возмущенного движения. Варьируя уравнение (3), второе уравнение (4) и уравнение (10), получим

$$\delta\ddot{\boldsymbol{\upsilon}} + 2\Omega \cdot \delta\dot{\boldsymbol{\upsilon}} - A \cdot \delta\boldsymbol{\upsilon} = \delta A \cdot \boldsymbol{\upsilon} - 2\delta\Omega \cdot \dot{\boldsymbol{\upsilon}} + \delta\dot{\mathbf{a}} + (\Omega - \Omega') \cdot \delta\mathbf{a} + \delta\Omega \cdot \mathbf{a}$$

$$\delta\mathbf{g} = \delta\dot{\boldsymbol{\upsilon}} + (\delta\Omega + \delta\Omega') \cdot \boldsymbol{\upsilon} + (\Omega + \Omega') \cdot \delta\boldsymbol{\upsilon} - \delta\mathbf{a} \qquad (15)$$

$$\delta\dot{\mathbf{r}} + (\delta\Omega - \delta\Omega') \cdot \mathbf{r} + (\Omega - \Omega') \cdot \delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\upsilon}$$

Пусть $\delta\mathbf{a}, \delta\boldsymbol{\omega}, \delta A$ – инструментальные погрешности соответственно измерителя акселерометров и КГГ. Обозначим через $\delta\mathbf{r}$, $\delta\boldsymbol{\upsilon}$, и $\delta\mathbf{g}$ отклонения вектора местоположения, скоростей и вектора ускорения силы тяжести от их значений, соответствующих невозмущенной работе системы.

Для выявления влияния инструментальных погрешностей инерциальных измерителей на ошибки БИНС рассмотрим случай движения объекта с постоянной скоростью υ_o по экватору, когда Земля представляет собой невращающуюся сферу, т.е. $\boldsymbol{\omega}_e = 0$. Тогда

$$T = \omega_0^2 \operatorname{diag}(-1, -1, 2), \quad \mathbf{g} = [0, 0, -g]^T$$

$$\boldsymbol{\omega} = [0, \omega, 0]^T, \quad \boldsymbol{\upsilon} = [\upsilon_o, 0, 0]^T, \quad \mathbf{r} = [0, 0, R]^T$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ – частота Шулера, R – расстояние из центра Земли до точки объекта.

Предположим, что величина **ω** мала. Тогда будем пренебрегать произведениями **ω** на вариации $\delta\mathbf{r}$, $\delta\boldsymbol{\upsilon}$, $\delta\mathbf{g}$. Уравнения (15) можно записать в скалярном виде следующим образом:

$$\delta\ddot{\upsilon}_x + \omega_0^2 \delta\upsilon_x = \delta A_{xx} \upsilon_o + \delta\omega_y g, \quad \delta\ddot{\upsilon}_y + \omega_0^2 \delta\upsilon_y = \delta A_{yx} \upsilon_o - \delta\omega_x g$$

$$\delta\ddot{\upsilon}_z - 2\omega_0^2 \delta\upsilon_z = \delta A_{zx} \upsilon_o$$

$$\delta g_x = \delta\dot{\upsilon}_x - \delta a_x, \quad \delta g_y = \delta\dot{\upsilon}_y + \delta\omega_z \upsilon_o - \delta a_y \qquad (16)$$

$$\delta g_z = \delta\dot{\upsilon}_z - \delta\omega_y \upsilon_o - \delta a_z$$

$$\delta \dot{r}_x - \delta v_x = -\delta\omega_y R, \quad \delta \dot{r}_y - \delta v_y = \delta\omega_x R, \quad \delta \dot{r}_z - \delta v_z = 0$$

В правых частях этой системы уравнений инструментальные погрешности всех чувствительных элементов рассмотрим как средние значения, т.е. при постоянных $\delta\omega$, δa, δA. Поэтому считаем, что они не изменяются во времени.

Решения этой системы уравнений могут быть представлены в виде

$$\frac{\delta r_x}{R} = \frac{\delta r_x^0}{R} + \frac{\delta A_{xx}}{\omega_0^2}\omega t + \xi_1 \sin\omega_0 t - \eta_1 \cos\omega_0 t$$

$$\frac{\delta r_y}{R} = \frac{\delta r_y^0}{R} + \frac{\delta A_{yx}}{\omega_0^2}\omega t + \xi_2 \sin\omega_0 t + \eta_2 \cos\omega_0 t$$

$$\frac{\delta r_z}{R} = \frac{\delta r_z^0}{R} - \frac{\delta A_{zx}}{2\omega_0^2}\omega t + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_3 \operatorname{sh}\left(\sqrt{2}\omega_0 t\right) + \frac{1}{2}\eta_3 \operatorname{ch}\left(\sqrt{2}\omega_0 t\right)$$

$$\frac{\delta v_x}{\omega_0 R} = \frac{\delta\omega_y}{\omega_0} + \frac{\delta A_{xx}}{\omega_0^2}\,\frac{\omega}{\omega_0} + \xi_1 \cos\omega_0 t + \eta_1 \sin\omega_0 t$$

$$\frac{\delta v_y}{\omega_0 R} = -\frac{\delta\omega_x}{\omega_0} + \frac{\delta A_{yx}}{\omega_0^2}\,\frac{\omega}{\omega_0} + \xi_2 \cos\omega_0 t - \eta_2 \sin\omega_0 t$$

$$\frac{\delta v_z}{\omega_0 R} = -\frac{\delta A_{zx}}{2\omega_0^2}\,\frac{\omega}{\omega_0} + \xi_3 \operatorname{ch}\left(\sqrt{2}\omega_0 t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3 \operatorname{sh}\left(\sqrt{2}\omega_0 t\right)$$

$$\frac{\delta g_x}{g} = -\frac{\delta a_x}{g} - \xi_1 \sin\omega_0 t + \eta_1 \cos\omega_0 t$$

$$\frac{\delta g_y}{g} = \frac{\delta\omega_z}{\omega_0^2}\omega - \frac{\delta a_y}{g} - \xi_2 \sin\omega_0 t - \eta_2 \cos\omega_0 t$$

$$\frac{\delta g_z}{g} = -\frac{\delta\omega_y}{\omega_0^2}\omega - \frac{\delta a_z}{g} + \sqrt{2}\xi_3 \operatorname{sh}\left(\sqrt{2}\omega_0 t\right) + \eta_3 \operatorname{ch}\left(\sqrt{2}\omega_0 t\right)$$

$$\omega = v_0/R$$

$$\xi_1 = \frac{\delta v_x^0}{\omega_0 R} - \frac{\delta\omega_y}{\omega_0} - \frac{\delta A_{xx}}{\omega_0^2}\,\frac{\omega}{\omega_0}, \quad \xi_2 = \frac{\delta v_y^0}{\omega_0 R} + \frac{\delta\omega_x}{\omega_0} - \frac{\delta A_{yx}}{\omega_0^2}\,\frac{\omega}{\omega_0}, \quad \xi_3 = \frac{\delta v_z^0}{\omega_0 R} + \frac{\delta A_{zx}}{2\omega_0^2}\,\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\eta_1 = \frac{\delta g_x^0}{g} + \frac{\delta a_x}{g}, \quad \eta_2 = \frac{\delta\omega_z}{\omega_0^2}\omega - \frac{\delta g_y^0}{g} - \frac{\delta a_y}{g}, \quad \eta_3 = \frac{\delta g_z^0}{g} + \frac{\delta a_z}{g} + \frac{\delta\omega_y}{\omega_0^2}\omega$$

Видно, что, во-первых, ошибка горизонтального местоположения объекта, к которой приводит погрешность гравитационного градиентометра, растет во времени. Во-первых, погрешность гравитационного градиентометра δA приводит к колебательной составляющей ошибки определения горизонтальной компоненты ускорения силы тяжести, скорости и местоположения. В-третьих, в вертикальном направлении ошибки местоположения, скорости и ускорения силы тяжести неограниченно возрастают во времени.

Китай

Поступила в редакцию
30.V.1997