

УДК 539.375

© 1998 г. К.Ф. Черных

О НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

Излагаются полученные в последние годы результаты автора по созданию общей (физически и геометрически) нелинейной теории трещин.

В основах широко используемой линейной теории трещин имеется явное несоответствие между объектом исследования и используемым математическим аппаратом. С одной стороны, здесь наиболее интересны окрестности сингулярных точек области (концы трещин и линейных включений, угловые точки вырезов и включений, точки приложения сосредоточенных сил и моментов, оси дислокаций и дисклинаций), в окрестностях которых реализуются большие деформации и повороты. С другой стороны, используется линейная теория упругости (либо геометрически линейная теория пластичности), для которых такая ситуация явно "противопоказана".

Казалось бы, линейная теория здесь неприменима. Однако длительная и небезуспешная практика ее использования предостерегает от столь категоричного заключения. Поэтому желательно было прежде всего выявить область обоснованного применения линейной теории.

Обычно говоря о нелинейной теории трещин, имеют в виду физическую нелинейность (чаще всего пластичность). Геометрическая же нелинейность рассматривается в сравнительно небольшом числе работ. Зачастую при этом вводятся различные упрощающие предположения, справедливость и область применимости которых не выясняются. В целом известные автору публикации носят фрагментарный характер. И самое главное, используемые при этом истинные напряжения непригодны для рассмотрения сингулярных проблем [1–3].

Была предпринята попытка построения последовательной общей (физически и геометрически) нелинейной теории трещин [1, 2]. Основное внимание уделялось наименее исследованной геометрической нелинейности. Использовалось в основном сопоставление точных решений эталонных краевых задач, полученных по линейной и нелинейной теориям упругости.

Нахождение точных решений потребовало большой предварительной работы по созданию предельно простой (но без потери общности) версии нелинейной теории упругости. Прежде всего это дальнейшее развитие комплексного метода, поиск новых типов граничных условий, обоснование выбора энергетической пары тензоров, новые версии двумерных проблем. К последним относятся: унифицированная плоская задача, обобщенная антиплоская деформация, осесимметричная деформация тел вращения, теория оболочек типа Кирхгофа и Рейсснера, дислокации Вольтерры.

Решающим, однако, для получения точных решений нелинейных краевых задач явилось введение новых моделей материалов (законов упругости): редуцированного стандартного, типа неогуковского, малосжимаемого и гибридного (удовлетворяющего макрозакону сжимаемости материала и микрозакону взаимодействия частиц). Найденные с их помощью результаты были подтверждены асимптотиками в окрестностях сингулярных точек, полученными с использованием комплексных инвариантных интегралов, распространенных и на жесткие включения.

Предлагаемая статья посвящена краткому изложению полученных автором результатов, в том числе и новых, ранее не опубликованных. Обозначения и терминология отвечают принятым в [4].

1. В нелинейной теории упругости широко используются:
 комплексные координаты

$$\zeta = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2, \quad \bar{\zeta} = \dot{x}_1 - i\dot{x}_2, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2$$

дифференцирование по ним

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} - i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} \right)$$

и комплексные компоненты тензоров

$$T_1 = t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), \quad T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21})$$

$$T_3 = t_{13} + it_{23}, \quad T_4 = t_{31} + it_{32}, \quad T_5 = t_{33}$$

Здесь и ниже индексом \circ снабжаются величины, отнесенные к недеформированной конфигурации тела, а без него – к деформированной. Так \dot{x}_i, x_i – прямоугольные декартовы координаты материальной точки до и после деформации.

2. Обобщенной плоской деформации отвечают [1, 4]

$$z = z(\zeta, \bar{\zeta}), \quad x_3 = \lambda \dot{x}_3 \quad (2.1)$$

($\lambda = \lambda_3 = \text{const}$ – кратность удлинений в поперечном направлении); однородное уравнение равновесия

$$\frac{\partial \{F^{-1} J \Sigma\}_1}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \{F^{-1} J \Sigma\}_2}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.2)$$

Здесь $\{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_i$ – комплексные компоненты тензора номинальных напряжений.

Имеют место статическое граничное условие

$$\{F^{-1} J \Sigma\}_1 e^{i\dot{\gamma}} + \{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_2 e^{i\dot{\gamma}} = 2[\sigma_{\dot{\nu}\dot{\nu}}(\dot{s}) + i\sigma_{\dot{\nu}i}(\dot{s})] e^{i\dot{\gamma}} \quad (2.3)$$

и условия жесткого края

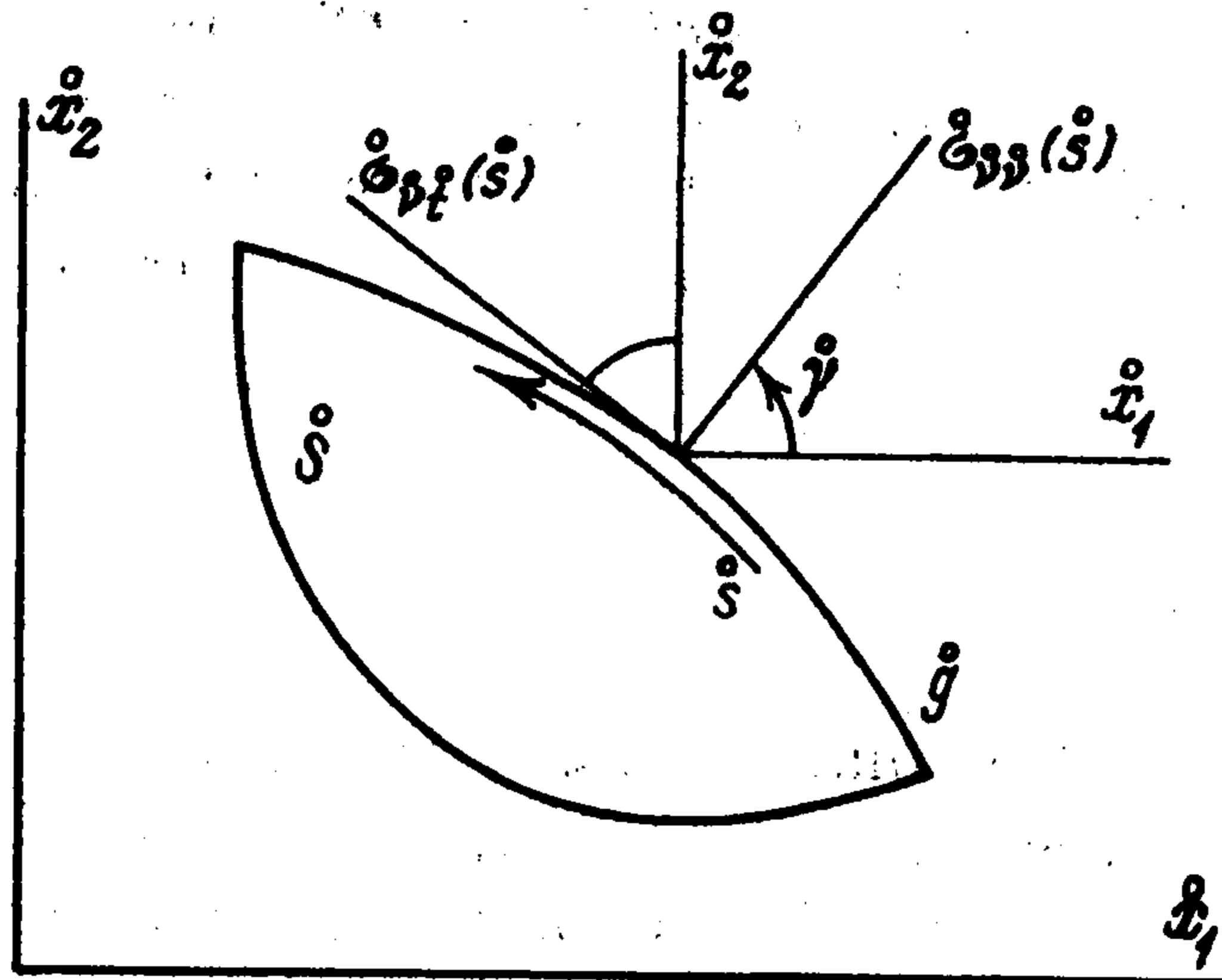
$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{i\dot{\gamma}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\dot{\gamma}} = e^{i\dot{\gamma}} \quad (2.4)$$

Здесь $\dot{\gamma}$ – угол между нормалью к недеформированному граничному контуру области (фиг. 1), а $\sigma_{\dot{\nu}\dot{\nu}}(\dot{s}), \sigma_{\dot{\nu}i}(\dot{s})$ – заданные на контуре нормальное и тангенциальное напряжения.

Тензор условных значений $\dot{\Sigma}$ (симметричный тензор Био) и тензор истинных напряжений Σ (тензор напряжений Коши) связаны с тензором номинальных напряжений $\{F^{-1} \cdot J \Sigma\}$ соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_1 &\equiv \dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} = \text{Re} \left[\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \{F^{-1} J \Sigma\}_1 \right] \\ \dot{\Sigma}_2 &\equiv \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} + i2\sigma_{12} = \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \{F^{-1} J \Sigma\}_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\dot{\Sigma}_5 \equiv \dot{\sigma}_{33} = \{F^{-1} J \Sigma\}_{33}$$



Фиг. 1

$$\lambda \Delta \Sigma_1 \equiv \lambda \Delta (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_1 + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \{F^{-1} J \Sigma\}_2$$

$$\lambda \Delta \Sigma_2 \equiv \lambda \Delta (\sigma_{11} - \sigma_{22} + i 2 \sigma_{12}) = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_1 + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \{F^{-1} J \Sigma\}_2 \quad (2.6)$$

$$\lambda \Delta \Sigma_5 \equiv \lambda \Delta \sigma_{33} = \lambda \{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_{33}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} = \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \quad (2.7)$$

— кратность изменения площади области, связанная с кратностью объема J соотношением

$$J = \lambda \Delta \quad (2.8)$$

Для несжимаемого изотропного материала имеют место зависимости

$$\{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_1 = \left[\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \zeta|} + q \right] \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

$$\{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_2 = \left[\left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \bar{\zeta}|} - q \right] \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}$$

$$\{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_{33} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \frac{2q}{\lambda^2} \quad (2.9)$$

$$J = 1$$

$$\Phi = \Phi \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|, \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|, \lambda \right)$$

Здесь Φ – упругий потенциал (плотность энергии деформации), а $q(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ – статически определяемая функция, типа всестороннего сжатия. Для сжимаемого материала в (2.9) следует опустить q и условие несжимаемости. Зависимости для плоского напряженного состояния тонкой пластины лишь незначительно отличаются от приведенных выше [4].

3. Обобщенной антиплоской деформации отвечают

$$z = c\zeta, \quad x_3 = \lambda \dot{x}_3 + w(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (3.1)$$

Здесь c, λ – положительные постоянные, а $w(\zeta, \bar{\zeta})$ вещественная функция.

В отличие от линейного случая, которому отвечают лишь две компоненты напряжения (σ_{13}, σ_{23}), здесь присутствуют все шесть компонент. Более того, в общем случае антиплоская задача переопределена. В случае несжимаемого материала переопределенность пропадает для материала "типа неогукковского"

$$\Phi = \Phi(I_c) = \Phi\left(\lambda^2 + 2c^2 + 4\frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\zeta}}\right) \quad (3.2)$$

Здесь I_c – первый инвариант тензора деформации Коши. Частным случаем выявленного закона является неогукковский, для которого

$$\Phi = \frac{E}{6}(I_c - 3) = \frac{E}{6}\left(\lambda^2 + 2c^2 + 4\frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\zeta}}\right) \quad (3.3)$$

Последнему отвечают следующие выражения искомых величин через функцию комплексной переменной $\Psi(\zeta)$:

$$w = \frac{1}{2}\left[\int \Psi(\zeta)d\zeta + \int \overline{\Psi(\zeta)}d\bar{\zeta}\right]$$

$$\Sigma_3 \equiv \sigma_{13} + i\sigma_{23} = \frac{1}{3}E\lambda^{-1/2}\overline{\Psi(\zeta)}, \quad \sigma_{33} = \frac{1}{3}E[\Psi(\zeta)\overline{\Psi(\zeta)} + \lambda^2 - \lambda^{-1}]$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$$

$$\dot{\Sigma}_1 \equiv \dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} = \frac{E}{3}\left[\frac{\cos \omega}{\lambda + \lambda^{-1/2}}\Psi(\zeta)\overline{\Psi(\zeta)}\right]$$

$$\dot{\Sigma}_2 \equiv \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} + i2\dot{\sigma}_{12} = \frac{E}{3}\frac{\cos \omega}{\lambda + \lambda^{-1/2}}\overline{\Psi(\zeta)}^2 \quad (3.4)$$

$$\dot{\Sigma}_3 \equiv \dot{\sigma}_{13} + i\dot{\sigma}_{23} = \frac{E}{3}\cos \omega\overline{\Psi(\zeta)}$$

$$\dot{\sigma}_{33} = \frac{E}{3}\cos \omega\left[-\frac{1}{\lambda^{5/2} + \lambda}\Psi(\zeta), \overline{\Psi(\zeta)} + \lambda - \lambda^{-2}\right]$$

$$\left(\cos \omega = \frac{\lambda + \lambda^{-1/2}}{\sqrt{(\lambda + \lambda^{-1/2})^2 + 4\Psi(\zeta)\overline{\Psi(\zeta)}}}\right)$$

Однородное статическое условие имеет вид

$$\Psi e^{i\dot{\gamma}} + \overline{\Psi e^{i\dot{\gamma}}} = 0 \quad (3.5)$$

а условие жесткого края

$$\Psi e^{i\dot{\gamma}} - \Psi e^{-i\dot{\gamma}} = 0, \quad \lambda = 1 \quad (3.6)$$

Существенно, что при общей нелинейности плоской и антиплоской проблем разрешающие уравнения (2.3), (2.4), (3.5) и (3.6) линейны, так что для решения краевых задач пригоден весь арсенал методов линейной теории. Анизотропный материал рассмотрен в [5, 6, 7].

4. В плоской задаче был детально рассмотрен материал с упругим потенциалом

$$\Phi = \sigma^* \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 + \alpha \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \quad (4.1)$$

Здесь σ^* , α – упругие постоянные. В главных осях деформации принятому материалу отвечает следующая связь между главными кратностями удлинений λ_i и главными условными напряжениями $\dot{\sigma}_i$:

$$\dot{\sigma}_1 - \sigma^* = \sigma^* \frac{(\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1)}{2} + \alpha \frac{(\alpha_1 - 1) - (\lambda_2 - 1)}{2}$$

$$\dot{\sigma}_2 - \sigma^* = \sigma^* \frac{(\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1)}{2} - \alpha \frac{(\alpha_1 - 1) - (\lambda_2 - 1)}{2}$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, т.е. при отсутствии деформации, $\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 = \sigma^*$. Таким образом, имеем дело с предварительно напряженным линейным материалом. Его можно рассматривать как редуцированный стандартный материал (он же материал Джона, гармонический, полуполинейный) при

$$\sigma^* = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \alpha = \frac{E}{1+\nu}$$

Принятие потенциала (4.1) позволило ввести функции Гурса–Колосова $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, через которые искомые функции выражаются так:

$$z = \int \Phi(\zeta) d\zeta + \int \overline{\Psi(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \Phi(\zeta), \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \overline{\Psi(\zeta)}$$

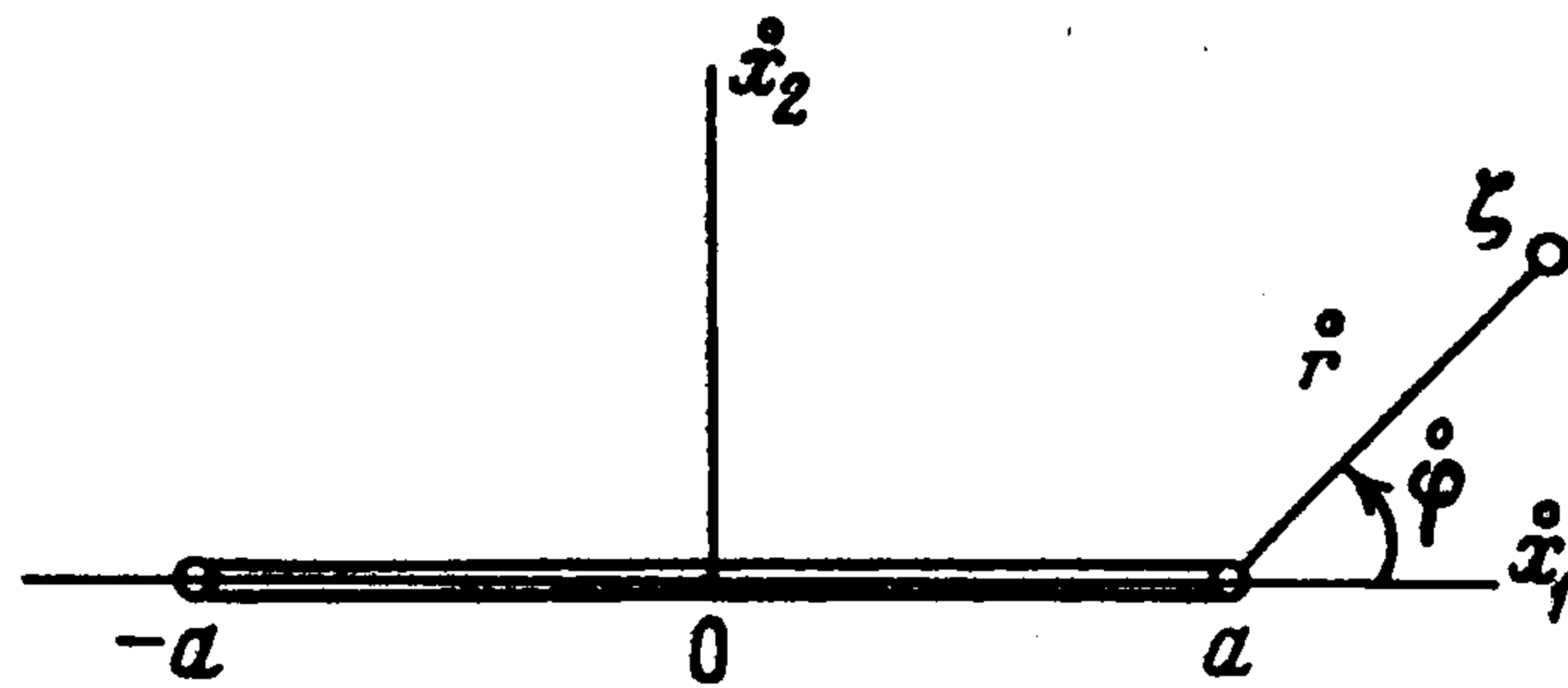
$$\{F^{-1} \cdot \mathcal{J}\Sigma\}_1 = 2\sigma^* \Phi(\zeta), \quad \{F^{-1} \cdot \mathcal{J}\Sigma\}_2 = 2\alpha \overline{\Psi(\zeta)} \quad (4.2)$$

$$\dot{\Sigma}_1 = 2\sigma^* |\Phi(\zeta)|, \quad \dot{\Sigma}_2 = 2\alpha \overline{\Phi(\zeta)\Psi(\zeta)} |\Phi(\zeta)|^{-1}$$

$$\lambda \Delta \Sigma_1 = 2 \left[\sigma^* \Phi(\zeta) \overline{\Phi(\zeta)} + \alpha \Psi(\zeta) \overline{\Psi(\zeta)} \right]$$

$$\lambda \Delta \Sigma_2 = 2(\sigma^* + \alpha) \Phi(\zeta) \overline{\Psi(\zeta)}$$

$$\left(\Delta = |\Phi(\zeta)|^2 - |\Psi(\zeta)|^2 \right)$$



Фиг. 2

Статическое граничное условие принимает вид

$$\sigma^* \Phi(\zeta) e^{i\gamma} + \alpha \Psi(\zeta) e^{i\gamma} = [\sigma_{\vartheta\vartheta}(\dot{s}) + i\sigma_{\vartheta\varphi}(\dot{s})] e^{i\gamma} \quad (4.3)$$

а условие жесткого края

$$\Phi(\zeta) e^{i\gamma} - \Psi(\zeta) e^{i\gamma} = e^{i\gamma} \quad (4.4)$$

Линейные разрешающие уравнения (4.3) и (4.4) при общей нелинейности задачи позволили получить точные решения эталонных краевых задач. Их сопоставление с соответствующими решениями по линейной теории выявило "в чистом виде" влияние геометрической нелинейности. Это относится и к обобщенной антиплоской деформации для неогуковского материала.

5. Полученные в разд. 2–4 зависимости были использованы прежде всего для выяснения влияния геометрической нелинейности и непригодности истинных напряжений для использования в сингулярных проблемах.

Так, в плоской задаче для истинных напряжений в окрестности конца прямолинейной трещины в сжимаемом материале имеем (фиг. 2):

для трещины нормального отрыва

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma^*} \sim -\frac{1-2\nu}{\nu} \lambda^{-1}, \quad \frac{\sigma_{11}}{\sigma^*} \sim \frac{\sigma_{12}}{\sigma^*} \sim 0 \quad (5.1)$$

для трещины поперечного сдвига

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma^*} \sim -\frac{1-2\nu}{\nu} \lambda^{-1}, \quad \frac{\sigma_{22}}{\sigma^*} \sim \frac{\sigma_{12}}{\sigma^*} \sim 0 \quad (5.2)$$

В случае несжимаемого материала имеем:

для трещины нормального отрыва

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma^*} \sim \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\dot{\sigma}_{22}^\infty}{\sigma^*} \right)^2 \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^1, \quad \frac{\sigma_{11}}{\sigma^*} \sim \frac{\sigma_{12}}{\sigma^*} \sim 0 \quad (5.3)$$

для трещины поперечного сдвига

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma^*} \sim \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\dot{\sigma}_{12}^\infty}{\sigma^*} \right)^2 \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^1, \quad \frac{\sigma_{22}}{\sigma^*} \sim \frac{\sigma_{12}}{\sigma^*} \sim 0 \quad (5.4)$$

Для жесткого линейного включения в сжимаемом материале (фиг. 2)

$$\frac{\Sigma_1}{\sigma^*} \equiv \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sigma^*} \sim \frac{4(1-\nu)|A|^2}{\lambda \left[\Delta / (a / (2\dot{r}))^{1/2} \right]} \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\Sigma_2}{\sigma^*} \equiv \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22} + i2\sigma_{12}}{\sigma^*} \sim \frac{4(1-\nu)A^2}{\lambda \left[\Delta / (a/(2\dot{r}))^{1/2} \right]} \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^{1/2}$$

$$[\Delta / (a/2\dot{r})^{1/2}] = (A\bar{B} + \bar{A}B - \bar{A})e^{-i\dot{\phi}/2} + (\bar{A}B + A\bar{B} - A)e^{i\dot{\phi}/2}$$

$$\left\| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\| = \mp \frac{1}{2} + \frac{\dot{\sigma}_{11}^{\infty} + \dot{\sigma}_{22}^{\infty}}{4\sigma^*} \pm \frac{\dot{\sigma}_{11}^{\infty} - \dot{\sigma}_{22}^{\infty} + i2\sigma_{12}^{\infty}}{4\alpha} \quad (5.5)$$

То же в несжимаемом материале

$$\frac{\Sigma_1}{\sigma^*} \sim 4(1-\nu)|A|^2 \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^1, \quad \frac{\Sigma_2}{\sigma^*} \sim 4(1-\nu)A^2 \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^1 \quad (5.6)$$

Для трещины продольного сдвига в несжимаемом (неогуковском) материале имеем

$$\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}^{\infty}} \sim -\sin \frac{\dot{\phi}}{2} \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^{1/2}, \quad \frac{\sigma_{23}}{\sigma_{23}^{\infty}} \sim \cos \frac{\dot{\phi}}{2} \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^{1/2}, \quad \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{23}^{\infty}} \sim \lambda \frac{\sigma_{23}^{\infty}}{\mu} \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^1 \quad (5.7)$$

Для жесткого линейного включения при антиплоской деформации

$$\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{13}^{\infty}} \sim \cos \frac{\dot{\phi}}{2} \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^{1/2}, \quad \frac{\sigma_{23}}{\sigma_{13}^{\infty}} \sim \sin \frac{\dot{\phi}}{2}, \quad \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{13}^{\infty}} \sim \frac{\sigma_{13}^{\infty}}{\mu} \left(\frac{a}{2\dot{r}} \right)^{1/2} \quad (5.8)$$

Полученные выражения показывают непригодность истинных напряжений для использования в нелинейной теории трещин. Из выражений (5.1) и (5.2) усматривается, что для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига в сжимаемом материале асимптотика истинных напряжений не зависит от внешней нагрузки (σ_{22}^{∞} , σ_{12}^{∞}). Кроме того, σ_{11} и σ_{22} обращаются в бесконечность при традиционно "безопасном" значении $\nu = 0$. Да и знак минус не соответствует характеру напряженно-деформированного состояния.

Более того, выражения (5.1) и (5.2) справедливы и для плоскости с луночными и клиновыми вырезами (включениями). Тем самым асимптотика истинных напряжений не зависит и от угла раствора выреза (включения).

Одним из решающих доводов в пользу использования истинных напряжений часто выдвигается их конечность в конце трещины. Прежде всего это не так при физической нелинейности материала. Но даже при линейном материале выражения (5.1) – (5.8) показывают, что показатель сингулярности m (показатель степени в выражении $(a/2\dot{r})^m$) может принимать различные значения: $m = 0$ (конечность напряжений), $m = 1/2$ (стандартная сингулярность, отвечающая линейной теории) и $m = 1$ (сингулярность, значительно превышающая стандартную).

Перечисление указанных дефектов можно существенно расширить, распространив его на дислокации и дисклинации в кристаллах, сосредоточенные воздействия, анизотропные и армированные материалы. Как показывают многочисленные рассмотренные автором и его последователями примеры, условные напряжения (симметричные напряжения Био) свободны от отмеченных недостатков. Обсуждались [2, 3] дефекты истинных напряжений общего характера. Статья [3] заканчивается так: «... Только боязнь ввести еще больший беспорядок в и без того чрезвычайно запутанную терминологию не позволяет выделенную энергетическую пару "условные

напряжения–кратность удлинений" назвать единственно истинными напряжениями и деформациями".

6. Сравним поведение условных (σ_{ij}°) и линейных (σ_{ij}) напряжений. Так, в случае сжимаемого материала для трещины нормального отрыва имеем в локальных полярных координатах (фиг. 2) асимптотики:

для условных напряжений

$$\left\| \begin{array}{c} \sigma_{rr}^\circ \\ \sigma_{\varphi\varphi}^\circ \\ \sigma_{\varphi r}^\circ \end{array} \right\| \sim \frac{k_I^\circ}{\sqrt{2\pi r}} \left\| \begin{array}{c} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ \cos^2 \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \end{array} \right\| \quad (k_I^\circ = \sigma_{22}^\infty \sqrt{\pi a}) \quad (6.1)$$

для линейных напряжений

$$\left\| \begin{array}{c} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{\varphi r} \end{array} \right\| \sim \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\| \begin{array}{c} \cos \frac{\varphi}{2} (1 + \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \\ \cos^3 \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{array} \right\| \quad (k_I = \sigma_{22}^\infty \sqrt{\pi a}) \quad (6.2)$$

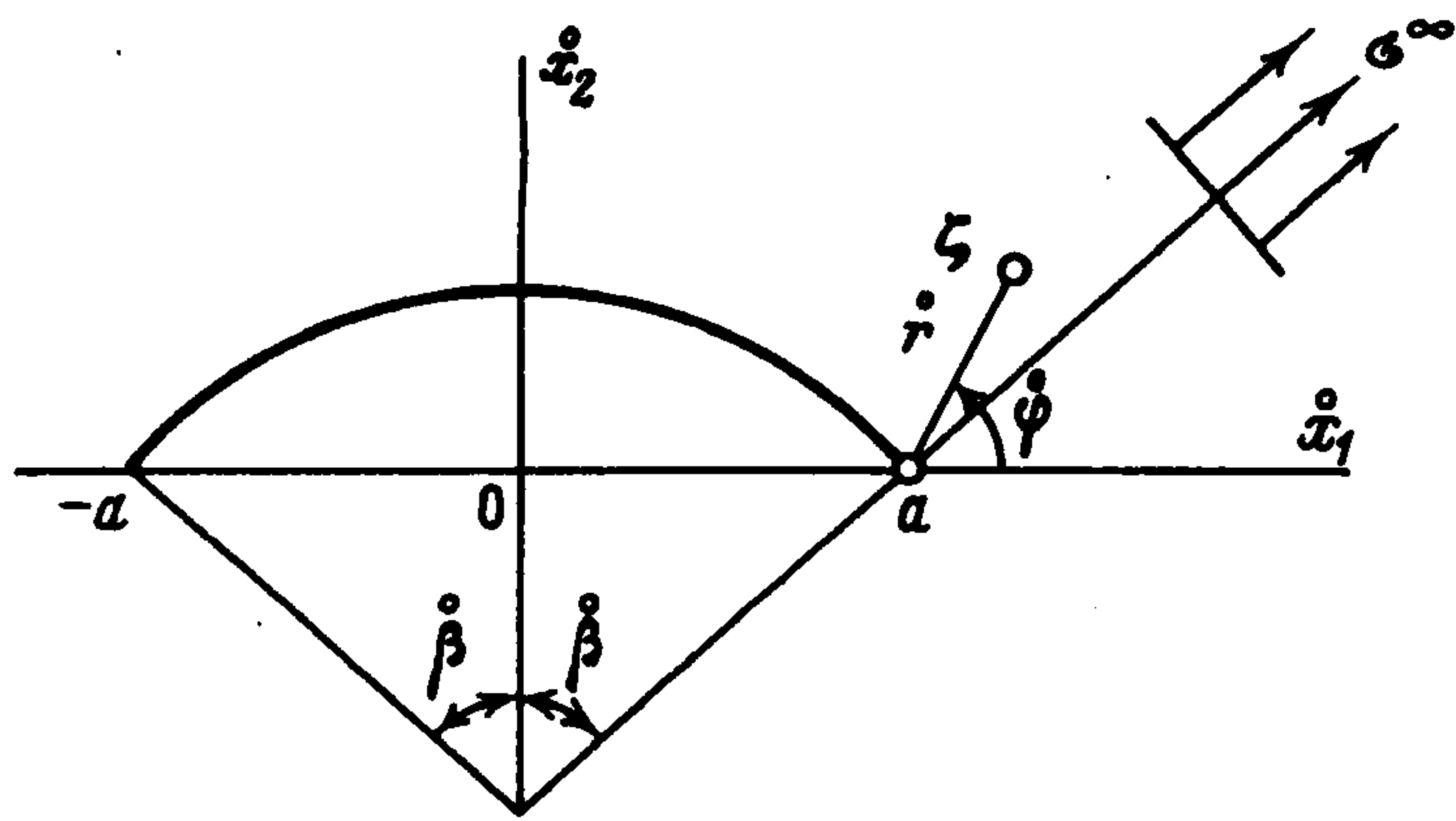
Для трещины поперечного сдвига асимптотики для условных напряжений отличаются от (6.1) заменой σ_{22}^∞ на σ_{12}^∞ , а для линейных напряжений имеем

$$\left\| \begin{array}{c} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{\varphi r} \end{array} \right\| \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\| \begin{array}{c} \sin \frac{\varphi}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \\ -3 \sin \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \end{array} \right\| \quad (k_{II} = \sigma_{12}^\infty \sqrt{\pi a}) \quad (6.3)$$

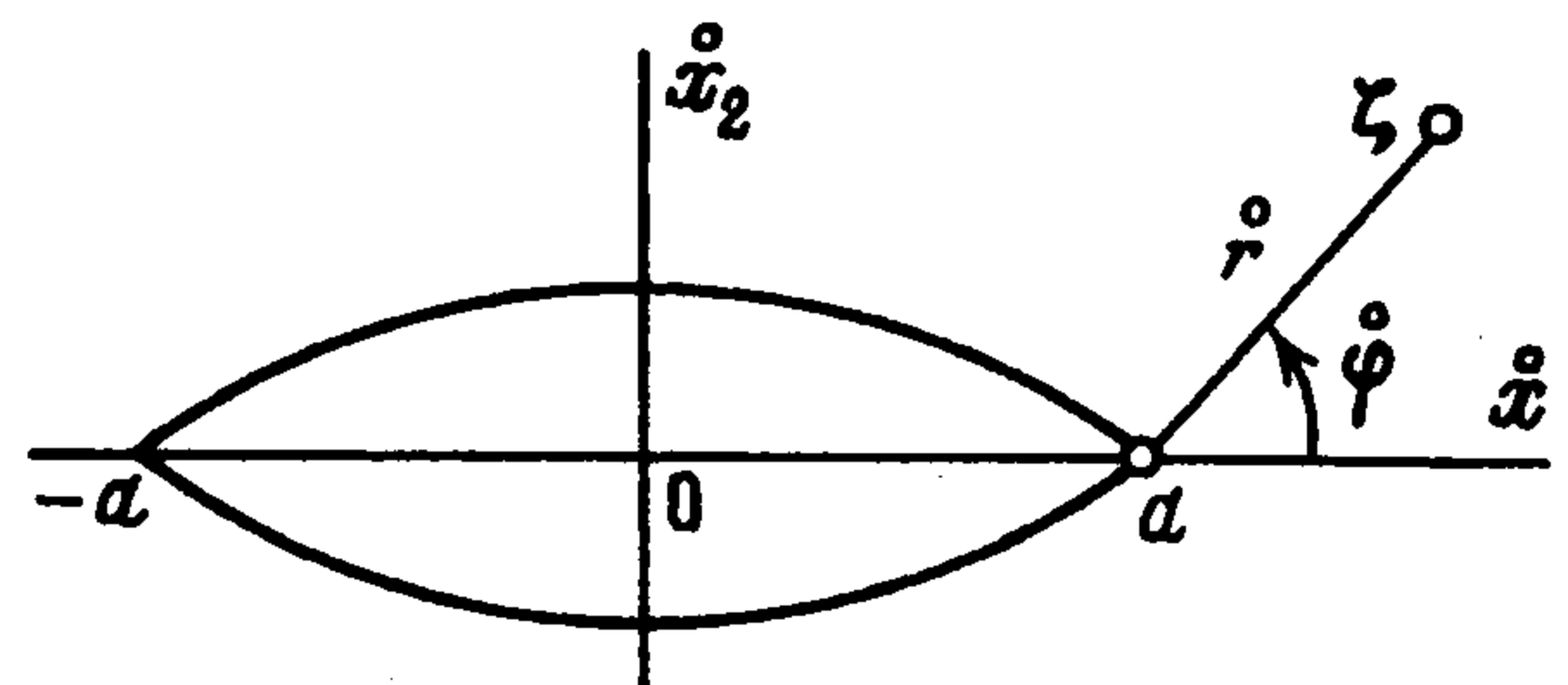
Из этих соотношений усматривается, что при $\sigma_{22}^\infty \approx \sigma_{22}^\infty$, $\sigma_{12}^\infty \approx \sigma_{12}^\infty$, т.е. при умеренных напряжениях на бесконечности (что обычно выполняется) можно считать совпадающими коэффициенты интенсивности напряжений. Отсюда и напрашивается вывод (имеющий, по-видимому, общий характер): использование линейной теории трещин обоснованно в проблемах, где определяющим является единственный параметр – коэффициент интенсивности напряжений.

Вместе с тем различие в зависимостях от полярного угла $\varphi(\varphi)$ даже в такой симметричной задаче, как трещина нормального отрыва (6.1) – (6.2), может существенно повлиять на рассмотрение более тонких вопросов теории. Так, в условии хрупкого разрушения Кейли–Тайсона–Котрелла [2] учет геометрической нелинейности вносит поправку порядка 30%. Сравнение соответствующих выражений для трещины поперечного сдвига обнаруживает еще большее различие в зависимостях от полярного угла.

7. Для рассмотренной А.А. Христенко дуговой трещины со свободными от нагрузки берегами (фиг. 3) и напряжением на бесконечности σ^∞ , направленном по нормали к трещине в ее конце, имеем для условных напряжений асимптотики, отличающиеся



Фиг. 3



Фиг. 4

от (6.1) заменой $\dot{\varphi}$ на $\dot{\varphi} + \dot{\beta}$ и k_1° на $k^\circ \cos(\dot{\beta}/2)$. Таким образом, влияние кривизны конца трещины учитывается множителем $\cos(\dot{\beta}/2)$. Отсюда следует, что отвечающая значению $\dot{\beta} = 0$ прямолинейная трещина опаснее соответствующих криволинейных.

Для рассмотренной З.Н. Литвиненковой плоскости с вырезом в виде симметричной лунки [2] с углом раствора $2\dot{\beta}$ (фиг. 4) имеем

$$\left\| \begin{array}{l} \dot{\sigma}_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}} \\ \dot{\sigma}_{\dot{\varphi}\dot{\rho}} \\ \dot{\sigma}_{\dot{\rho}\dot{\rho}} \end{array} \right\| \sim 16k^2 \sqrt{(\dot{\sigma}_{22}^\infty)^2 + (\dot{\sigma}_{12}^\infty)^2} \left(\frac{2a}{\dot{r}} \right)^{1-k} \left\| \begin{array}{l} \sin^2(1-k)\dot{\varphi} \\ -\cos^2(1-k)\dot{\varphi} \\ \sin(1-k)\dot{\varphi} \cos(1-k)\dot{\varphi} \end{array} \right\| \quad (7.1)$$

$$\left(k = \frac{\pi}{2(\pi - \dot{\beta})} \right)$$

и показатель сингулярности определяется формулой

$$m(\dot{\beta}) = \frac{1/2 - \dot{\beta}/\pi}{1 - \dot{\beta}/\pi} \quad (7.2)$$

Выписанное выражение справедливо и для плоскости с клиновым вырезом (включением). Это позволяет считать, что показатель сингулярности не зависит от конкретного вида окрестности угловой точки, а определяется лишь величиной угла раствора.

Интересен случай клинового выреза, когда один его берег заделан, а другой свободен от нагрузки. При этом

$$m(\dot{\beta}) = \frac{3/4 - \dot{\beta}/\pi}{1 - \dot{\beta}/\pi} \quad (7.3)$$

В случае развернутого угла $m(\pi/2) = 1/2$. Этому отвечает точка смены граничного условия на гладком участке границы области.

8. Любопытный результат был получен при рассмотрении трещины продольного сдвига. Для нее имеют место следующие асимптотики:

Линейные напряжения

$$\begin{vmatrix} \sigma_{r3} \\ \sigma_{\phi 3} \end{vmatrix} \sim \frac{k_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{vmatrix} \sin \frac{\phi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \end{vmatrix} \quad (k_{III} = \sigma_{23}^{\infty} \sqrt{\pi a}) \quad (8.1)$$

условные напряжения

$$\begin{vmatrix} \sigma_{rr}^{\circ} \\ \sigma_{\phi\phi}^{\circ} \\ \sigma_{\phi r}^{\circ} \end{vmatrix} \sim \frac{k_{III}^{\circ}}{\sqrt{2\pi r}} \lambda^{1/2} \begin{vmatrix} \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ \cos^2 \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \end{vmatrix} \quad (8.2)$$

$$\sigma_{33}^{\circ} \sim \frac{k_{III}^{\circ}}{\sqrt{2\pi r}} (-\lambda^{-1}) \quad (k_{III}^{\circ} = \sigma_{23}^{\infty} \sqrt{\pi a})$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{r3}^{\circ} \\ \sigma_{\phi 3}^{\circ} \end{vmatrix} \sim \mu(\lambda + \lambda^{-1/2}) \begin{vmatrix} \sin \frac{\phi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \end{vmatrix}$$

Из приведенных соотношений усматриваются любопытные особенности трещины продольного сдвига. Так, не имеющие аналогов в линейной теории условные напряжения σ_{rr}° , $\sigma_{\phi\phi}^{\circ}$, $\sigma_{\phi r}^{\circ}$, σ_{33}° обладают стандартной сингулярностью и структурой,

аналогичной таковой для величин при трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига. Это подсказывает путь унификации критериев разрушения для всех трех типов трещин. В то же время единственным линейным напряжениям σ_{r3} , $\sigma_{\phi 3}$, имеющим стандартные сингулярности, отвечают конечные условные напряжения.

9. При нелинейном подходе существенно различие между следящей нагрузкой (нормальным давлением σ_0) и "мертвой" (нормальной к недеформированному разрезу σ^{\wedge}).

Для нормального давления разрез переходит [8] в окружность радиуса

$$R = \frac{R_0}{1 - \sigma_0 / \alpha}, \quad R_0 = \frac{(1 + \sigma^* / \alpha)a}{2} \quad (9.1)$$

и имеет место асимптотика на конце трещины

$$\frac{\sigma_{\phi\phi}^{\circ}}{\sigma^*} \Big|_{\phi=0} \sim \frac{2 + (\alpha / \sigma^* - 1)(\sigma_0 / \alpha)}{2(1 - \sigma_0 / \alpha)} \left(\frac{a}{2r} \right)^{1/2} \quad (9.2)$$

Для первоначально нормальной нагрузки

$$R = R_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma^*} \frac{\sigma^{\wedge}}{\alpha} \right), \quad R_0 = \frac{(1 + \sigma^* / \alpha) a}{2} \quad (9.3)$$

$$\left. \frac{\sigma_{\phi\phi}^{\circ}}{\sigma^*} \right|_{\phi=0} \sim \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma^*} \frac{\sigma^{\wedge}}{\alpha} \right) \left(\frac{a}{2r^{\circ}} \right)^{1/2} \quad (9.4)$$

Таким образом, рассмотренным нагрузкам отвечают существенно различные результаты.

При линейном подходе справедлива асимптотика (9.4). Для формы же деформированной трещины имеем вовсе неприемлемый результат: горизонтальный разрез переходит в вертикальный с перехлестыванием берегов.

10. Наиболее контрастно различие между решениями по линейной и нелинейной теориям проявляется для трещин смешанного типа. Как, для рассмотренной выше прямолинейной трещины имеем для условных напряжений асимптотики, отличающиеся от (6.1) заменой k_I° на $\sqrt{(k_I^{\circ})^2 + (k_{II}^{\circ})^2}$.

Согласно критерию нормального отрыва (Эрдогана–Си) из выражения для $\sigma_{\phi\phi}^{\circ}$ следует, что независимо от отношения $k_{II}^{\circ} / k_I^{\circ}$ трещина должна страгиваться "вдоль себя", т.е. по материальному волокну $\phi=0$, продолжающему разрез. Этот странный, на первый взгляд, результат находится в явном противоречии с "наблюдаемым" в подтверждение линейной теории изломом трещины смешанного типа.

При геометрически нелинейном подходе этот кажущийся парадокс получает естественное объяснение [1, 2]. Трещина действительно страгивается вдоль материального волокна, продолжающего разрез. Но одновременно происходит большой поворот окрестности конца трещины. Взаимодействие этих двух эффектов и создает видимость излома. Отметим, что сказанное относится к хрупкому разрушению. В проведенных на резиновых пластинах экспериментах после снятия нагрузки излом не обнаруживается. Трещина страгивается в направлении своего продолжения и затем плавно изгибается. Отметим, что правило большого пальца руки [2], рассматриваемое в линейной теории как грубо приближенное, при нелинейном подходе выполняется точно.

Далее, согласно выражению для $\sigma_{\phi\phi}^{\circ}$ нелинейный критерий нормального отрыва формулируется следующим образом

$$\sqrt{(k_I^{\circ})^2 + (k_{II}^{\circ})^2} = k_{IC} \quad \text{при } \phi = 0$$

и совпадает с критерием Ирвина.

11. При линейном подходе применительно к трещине нормального отрыва был сформулирован дискретный критерий разрушения (фиг. 2) [9.10]

$$\frac{1}{D} \int_0^D \sigma_{22}(\xi, 0) d\xi \leq \sigma_c \quad (\xi = x_1 - a) \quad (11.1)$$

где D – атомный диаметр, а σ_c – идеальная прочность материала. Фактически в [9, 10] рассматривались (умеренно) большие деформации. Кроме того, при разрыве атомной решетки не учитывалась ее поперечная деформация, что отмечалось и в [11].

Поэтому, строго говоря, критерий (11.1) следует видоизменить, принимая

$$\frac{1}{D} \int_0^D \sigma_{22}(\xi, 0) d\xi \leq \sigma_c \quad (\xi = x_1 - a) \quad (11.2)$$

Этот критерий естественным образом обобщается на случай произвольной трещины (выреза):

$$\frac{1}{D} \int_0^D \sigma_{\phi\phi}^{\phi\phi}(\xi, 0) d\xi \leq \sigma_c \quad (11.3)$$

Здесь вначале находится направление (ϕ) , в котором величина $\sqrt{2\pi r} \sigma_{\phi\phi}^{\phi\phi}$ имеет максимальное значение, а ξ – расстояние вдоль этого направления. В общем случае D – характерный структурный размер рассматриваемого материала (композита).

12. Для учета общей (геометрической и физической) нелинейности был предложен [1, 2] малосжимаемый материал n -го порядка, для которого

$$\Phi = \frac{En^{-2}}{1+\nu} \left[-(\Pi_{\Lambda^n} - 1) + \Psi(I_{\Lambda^n}) \right] \quad (12.1)$$

$$(I_{\Lambda^n} = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n, \quad \Pi_{\Lambda^n} = \lambda_1^n \lambda_2^n \lambda_3^n = J^n)$$

Здесь λ_i – главные кратности удлинений, $\Psi(I_{\Lambda^n})$ – произвольная вещественная функция, "ответственная" за формоизменение, а инвариант Π_{Λ^n} простейшим (линейным) образом учитывает малое изменение объема, J – кратность изменения объема, n – постоянная, характеризующая нелинейность материала.

Условия

$$\Psi'(3) = 1, \quad \Psi''(3) = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \quad (12.2)$$

обеспечивают переход при малых деформациях закона упругости в закон Гука. В плоской задаче при $n = 1$ уравнение равновесия сводится к квадратурам

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\chi[\xi(\zeta, \lambda) \overline{\xi(\zeta, \lambda)}; \lambda] \xi(\zeta, \lambda)}{\xi(\zeta, \lambda)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \int \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[\frac{\chi[\xi(\zeta, \lambda) \overline{\xi(\zeta, \lambda)}; \lambda]}{\xi(\zeta, \lambda)} \right] \xi(\zeta, \lambda) d\zeta + \eta'(\bar{\zeta}, \lambda) \quad (12.3)$$

$$z = \frac{\int \chi[\xi(\zeta, \lambda) \overline{\xi(\zeta, \lambda)}; \lambda] \xi(\zeta, \lambda) d\zeta}{\xi(\zeta, \lambda)} + \eta(\bar{\zeta}, \lambda)$$

Здесь $\xi(\zeta, \lambda)$, $\eta(\zeta, \lambda)$ и вещественная $\chi[\cdot]$ – произвольные функции. Их разумный выбор дают семейства точных решений (геометрически и физически) нелинейной плоской задачи.

13. Полученные при создании нелинейной теории трещин результаты естественным образом были использованы для нелинейного рассмотрения прямолинейных краевых дислокаций, клиновой дисклинации и сосредоточенных воздействий. Были рассмотрены анизотропные материалы (главным образом, ортотропные и трансверсально-изотропные, в том числе кристаллы кубической и гексагональной сингоний). Здесь также были выявлены многочисленные дефекты истинных напряжений и их отсутствие в условных

напряжениях. Полученные результаты существенно (зачастую качественно) отличаются от своих линейных аналогов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00-739) и Государственного фонда поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (96-15-96066).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости и ее применение к физически и геометрически нелинейной механике трещин // Успехи механики. 1989. Т. 12. Вып. 4. С. 51–75.
2. Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука, 1996, 288 с.
3. Новожилов В.В., Черных К.Ф. Об "истинных" мерах напряжений и деформаций в нелинейной механике деформируемого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 73–79.
4. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
5. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
6. Черных К.Ф. Плоская задача нелинейной анизотропной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 47–55.
7. Chernykh K.F. Nonlinear Theory of Anisotropic Elasticity. New York: Beggel Publishing House, 1998. 190 p.
8. Черных К.Ф., Петренко И.В. Следящая нагрузка в нелинейной плоской задаче // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 4. С. 145–148.
9. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 212–222.
10. Новожилов В.В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 797–812.
11. Нотт Дж. Механика разрушения // Атомистика разрушения. М.: Мир, 1987 С. 145–176.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
27.III.1996