

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова

**РЕЗОНАНСНЫЕ ЧАСТОТЫ РАССЕЯНИЯ УПРУГИХ ВОЛН  
ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ТРЕЩИНАМИ**

Рассматривается дифракция упругих волн на произвольных в плане пространственных трещинах. На основе разработанного ранее метода решения возникающих здесь систем интегральных уравнений [1] анализируется зависимость резонансных частот рассеяния от формы трещины. Приводятся численные результаты, показывающие заметное влияние формы на распределение резонансных полюсов в комплексной плоскости частоты, теоретически позволяющее использовать данную информацию при решении обратных задач дефектоскопии (определение размеров и формы трещины по отраженному сигналу).

Определение размеров и формы дефекта (в частности, трещины) по отраженному волновому полю является одной из основных задач ультразвуковой дефектоскопии материалов, соединений и конструкций. В случае, когда длина зондирующих волн значительно меньше размеров дефекта, эта проблема решается в рамках лучевого приближения (геометрической оптики) [2]. Однако во многих практически важных случаях диаметр дефекта соизмерим или меньше длины волны и отраженный сигнал дает "размытое" изображение, не позволяющее непосредственно определить его размеры и форму. Поэтому здесь для восстановления формы дефекта необходимо использовать специальные алгоритмы решения обратных задач, основанные на минимизации некоторой целевой функции-невязки при варьировании размеров и формы отражающего объекта [3].

В силу того что на каждом шаге минимизации решается прямая задача дифракции, решение обратной задачи нередко связано с большими вычислительными затратами, а главное, в общем случае такие задачи относятся к классу некорректных, требующих специальной регуляризации для достижения устойчивой численной сходимости [4]. Как известно, одним из эффективных путей регуляризации обратных задач является сужение множества, на котором проводится поиск решения (в рассматриваемом случае множества допустимых форм трещины). Такое сужение возможно при использовании некоторой дополнительной информации об ожидаемых свойствах решения. Для обратных волновых задач это может быть, например, информация о резонансных свойствах исследуемого объекта.

Основными характеристиками, используемыми в ультразвуковой дефектоскопии, являются время прихода эхо-сигнала (для локации положения объекта), диаграммы рассеяния и коэффициент отражения энергии (для определения его ориентации, размеров и формы). Коэффициент отражения энергии  $\Sigma = E_1/E_0$ , где  $E_1$  – энергия рассеянного поля, а  $E_0$  – энергия, переносимая падающей волной через площадку той же площади, что и трещина, как и диаграмма рассеяния зависит от формы трещины, вида падающей волны, угла падения и частоты. При вещественных значениях круговой частоты  $\omega$  установившихся колебаний  $ue^{-i\omega t}$  значения  $\Sigma(\omega)$  конечны. Однако если аналитически продолжить решение в комплексную плоскость частоты  $\omega$ , то в некоторых точках  $\omega_k (k = 1, 2, \dots)$  нижней полуплоскости  $\Sigma(\omega)$  неограниченно растет. Важно, что значения  $\omega_k$ , называемые комплексными резонансными полюсами или собственными частотами рассеяния, являясь точками спектра соответствующих интегральных операторов (см. [1]), зависят только от свойств материала и области  $\Omega$ , занимаемой трещиной, и не зависят от угла падения (ориентации) и (с некоторыми уточнениями) от вида падающей волны. Таким образом, объем информации, необходимый для идентификации формы трещины по рассеянному полю, может быть резко

уменьшен, если: 1) предварительно получить распределение полюсов в зависимости от формы, 2) уметь выделять резонансные частоты из регистрируемого отраженного сигнала.

Данные соображения легли в основу так называемого метода сингулярных разложений (Singularity Expansion Method – SEM), первоначально возникшего в связи с задачами локации объектов электромагнитными волнами [5]. В 70–80-е годы появилось множество работ, предлагающих различные способы использования резонансных частот рассеяния скалярных электромагнитных и акустических волновых полей для определения формы и свойств рассеивателя (см. обзор [6]). Позже метод был распространен и на векторный случай упругих волн [7], однако достигнутые здесь успехи значительно скромнее. В первую очередь это объясняется сложностью решения соответствующих прямых задач эластодинамики. Так для рассматриваемой дифракции на пространственных трещинах к настоящему времени значения резонансных полюсов получены только для круговых [8] и близких к круговым (эллиптических) [9,10] трещин. Развитый авторами [1] метод позволяет варьировать форму трещины в достаточно широких пределах. Ниже приводятся результаты, демонстрирующие изменение картины распределения полюсов при сильном отличии формы трещины от круговой.

Рассматривается дифракция заданного волнового поля  $u_0(x)e^{-i\omega t}$  на трещине, занимающей в упругом пространстве плоскую область  $\Omega$ . Задача сводится к системе двумерных интегральных уравнений Винера–Хопфа по области  $\Omega$  с гиперсингулярным ядром. Метод их решения и используемые обозначения даны в [1]. Очевидно, значения искомого резонансного полюса  $\omega_k$  отраженного поля  $u_1(x, \omega)$  аппроксимируются значениями параметра  $\omega$ , при которых обращается в нуль  $\Delta(\omega) = \det A(\omega)$  – определитель матрицы системы линейных алгебраических уравнений

$$A(\omega)c(\omega) = f(\omega) \quad (1)$$

возникающей в результате дискретизации (система (1.6) [1]).

Соответствующие собственные формы рассеяния  $u_{1,k}(x, \omega_k)$  определяются при этом через собственные векторы  $c_k$ :  $A(\omega_k)c_k = 0$ . Они, как и резонансные полюса, не зависят от причин, вызывающих волновую эмиссию (от правой части  $f$ ), поэтому информация о собственных формах рассеяния также может быть использована для идентификации объекта. Более того, имеется сообщение о строго доказанном взаимнооднозначном соответствии между размерами и формой трещины с одной стороны и первым резонансным полюсом и соответствующей формой рассеяния с другой<sup>1</sup>. Следует заметить, что не все нули определителя  $\Delta(\omega)$  являются полюсами решения  $c(\omega)$  системы (1), а тем самым и полюсами  $u_1(x, \omega)$ . Проведенные расчеты показывают, что в решении  $c^{(n)}(\omega) = \Delta^{(n)}(\omega)/\Delta(\omega)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) более половины из них тождественно устраняются совпадающими нулями миноров, входящих в  $\Delta^{(n)}(\omega)$ .

Известно, что решение гармонической задачи при вещественных  $\omega$  обладает свойством  $u_1(x, -\omega) = u_1^*(x, \omega)$  (звездочкой здесь и далее обозначена операция комплексного сопряжения). Это свойство обеспечивает вещественнозначность решения  $v_1$  соответствующей нестационарной задачи при представлении его в виде интеграла Лапласа–Фурье (частотная развертка):

$$v_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} u_1(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2)$$

При аналитическом продолжении в комплексную плоскость  $\omega$  данное свойство принимает вид

$$u_1(x, \tilde{\omega}) = u_1^*(x, \omega) \quad (3)$$

Волной обозначена операция перехода к комплексным значениям, симметричным

<sup>1</sup> Labreuche C. Inverse Obstacle scattering based on resonant frequencies (INRIA Conference on inverse problems of wave propagation and diffraction, Aix–les–Bains, France, Sept. 23–27, 1996).

относительно мнимой оси:  $\tilde{\omega} = -\omega^*$  [11]. Из (3) следует, что полюса  $u_1(\omega)$  располагаются в нижней полуплоскости  $\text{Im } \omega \leq 0$  симметрично относительно мнимой оси  $\text{Re } \omega = 0$ . В верхней полуплоскости полюсов нет, иначе нарушался бы принцип причинности. А именно, замыкание контура интегрирования в (2) вверх при  $t < t_0$ , где  $t_0$  – время прихода переднего фронта отраженного поля в точку  $x$ , давало бы ненулевые значения  $v_1$  в виде суммы вычетов в этих полюсах. В дальнейшем под  $\omega_k$  понимаются только неустраняемые полюса, расположенные в правом нижнем квадранте  $\text{Re } \omega > 0, \text{Im } \omega \leq 0$ .

При  $t > t_0$  замыкание контура интегрирования в представлении (2) в нижнюю полуплоскость дает решение в виде вклада вычетов и интеграла по берегам разрезом  $L$  (если имеются точки ветвления):

$$\begin{aligned} v_1(t) &= -i \sum_k [\text{res } u_1(\omega)|_{\omega=\omega_k} e^{-i\omega_k t} + \text{res } u_1(\omega)|_{\omega=\tilde{\omega}_k} e^{-i\tilde{\omega}_k t}] - \frac{1}{2\pi} \int_L u_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= 2 \sum_k \text{Im}[\text{res } u_1(\omega)|_{\omega=\omega_k} e^{-i\omega_k t}] - \frac{1}{2\pi} \int_L u_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (4)$$

Вообще говоря, подынтегральная функция в (2) может содержать экспоненциальные составляющие вида  $e^{-i\omega(t-t_n)}$ ,  $t_n > t_0$ , убывающие при  $t_0 < t < t_n$  в верхнюю полуплоскость. Поэтому в интервале  $t_0 < t < \max t_n$  (физически до прихода сигнала от всех точек излучающего объекта) контур замыкается вниз только для части составляющих  $u_1(\omega)$ . Примеры построения нестационарного решения в этом случае имеются [11], здесь не будем останавливаться на этом вопросе.

При учете вклада симметричных полюсов  $\tilde{\omega}_k$  в представлении (4) использованы свойства  $\text{res } u(\omega)|_{\omega=\tilde{\omega}_k} = -[\text{res } u(\omega)|_{\omega=\omega_k}]^*$  и  $e^{-i\tilde{\omega}_k t} = (e^{-i\omega_k t})^*$  и предполагается, что полюса  $\omega_k$  однократные и не лежат на мнимой оси. При наличии же полюсов на мнимой оси контур  $L$  должен огибать их таким образом, чтобы они оставались вне замкнутого контура (их вклад является комплексным, что недопустимо для вещественного нестационарного решения  $v_1(t)$ ).

Сумма вычетов в (4) представляет собой набор экспоненциально затухающих гармонических колебаний  $v_k(x, t) = \{v_k^{(1)}, v_k^{(2)}, v_k^{(3)}\}$  вида

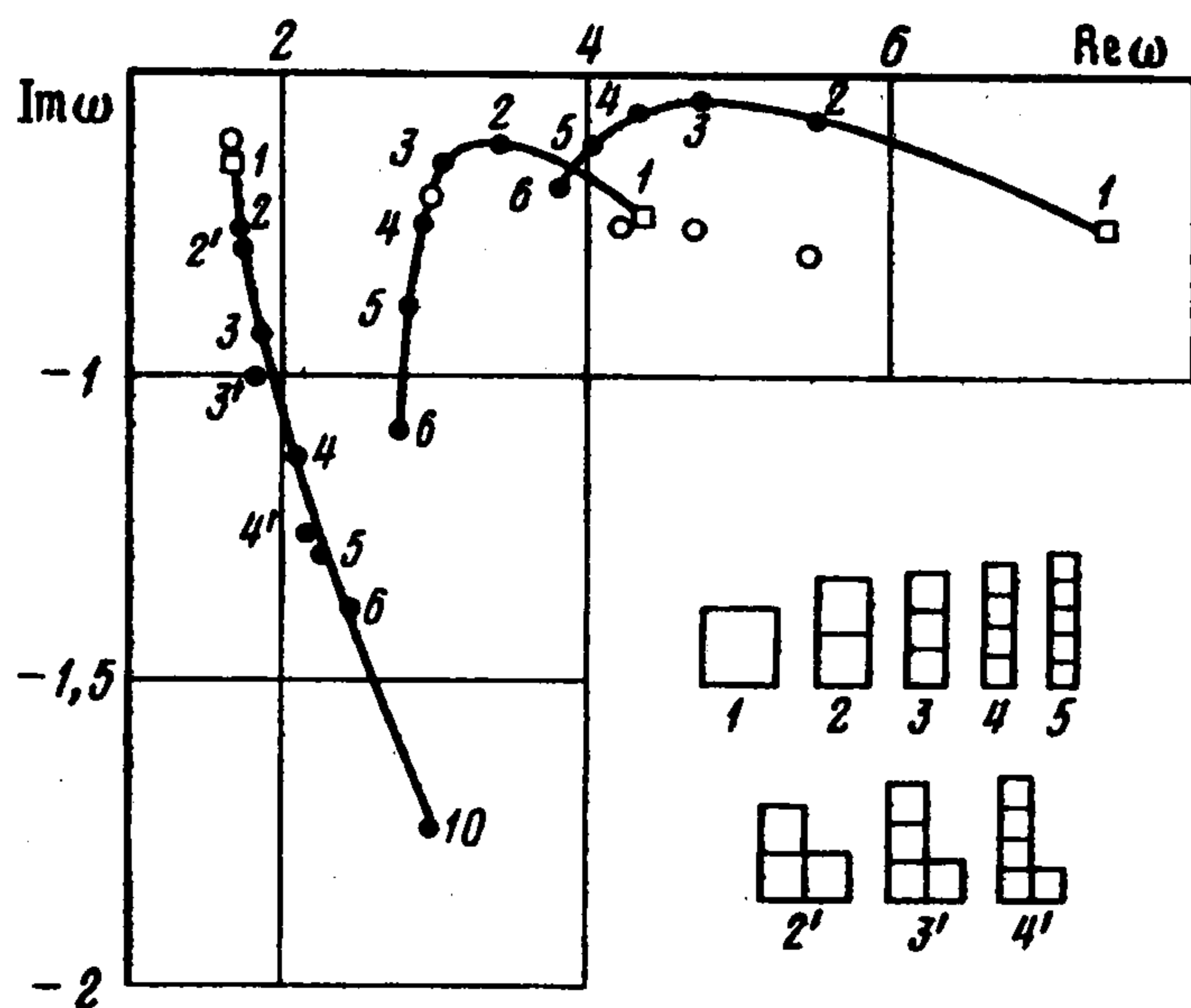
$$v_k^{(l)}(x, t) = 2a_k^{(l)}(x) e^{-\beta_k t} \sin(\theta_k^{(l)} - \alpha_k t) \quad (5)$$

где  $\alpha_k^{(l)}, \theta_k^{(l)}$  – модуль и аргумент комплексных компонент вычета:  $\text{res } u^{(l)}|_{\omega=\omega_k} = a_k^{(l)} e^{i\theta_k^{(l)}}$ , а  $\alpha_k, \beta_k$  – вещественная и мнимая части полюсов:  $\omega_k = \alpha_k - i\beta_k$ ;  $\alpha_k, \beta_k > 0$ , дающие соответственно круговую частоту и декремент затухания этих гармоник.

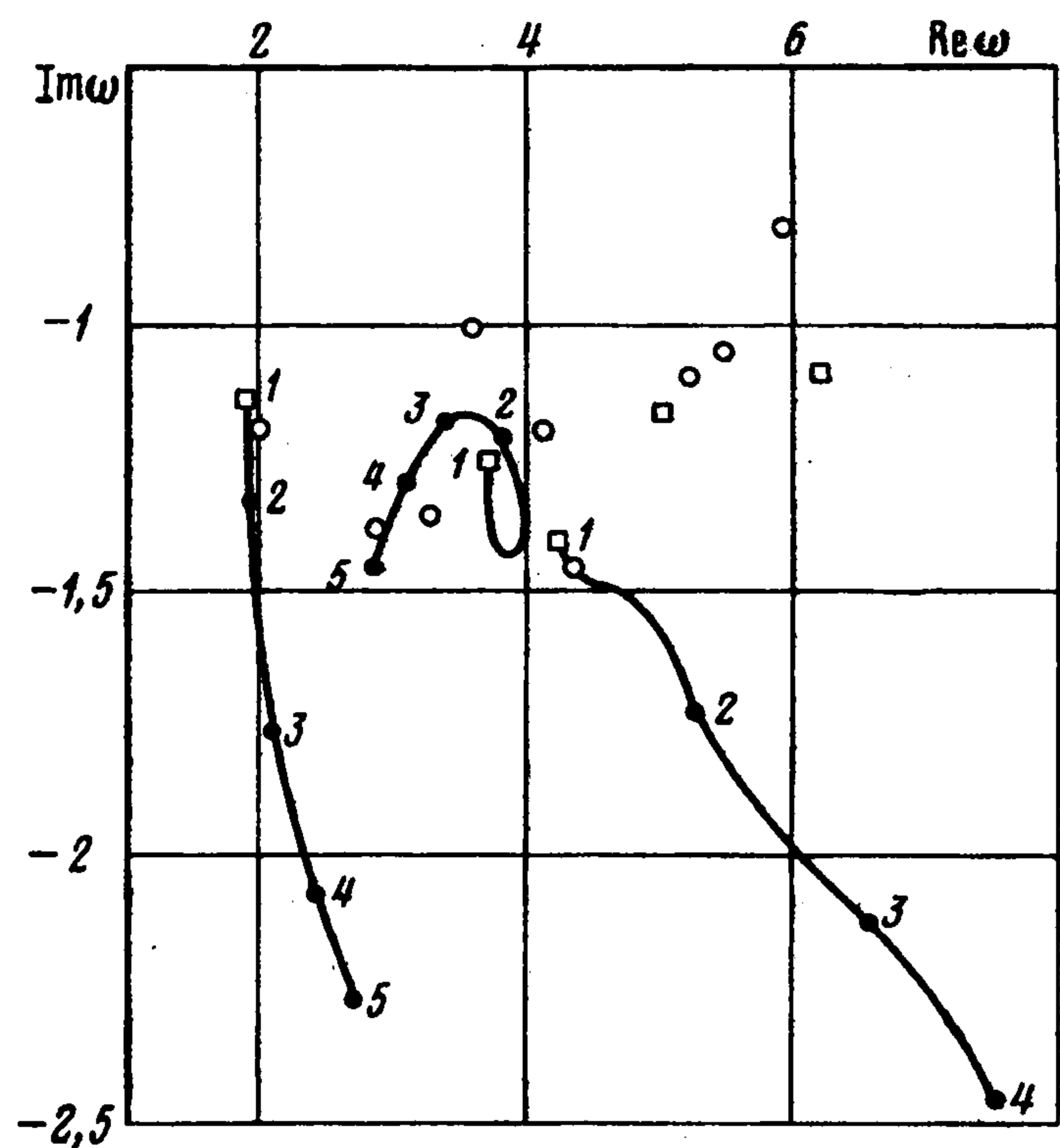
В практике неразрушающего контроля сигналы вида (5), испускаемые трещинами, регистрируются методами акустической эмиссии.

В случае однородного изотропного пространства структура матрицы-ядра интегральных уравнений такова, что система фактически распадается на две независимые относительно нормальной и касательных компонент скачка смещений (см. (1.4) [1]). Соответственно система (1) также распадается на две независимые и  $\Delta(\omega) = \Delta_1(\omega)\Delta_2(\omega)$ , где  $\Delta_1(\omega), \Delta_2(\omega)$  – определители этих систем для нормальной и касательных компонент.

Таким образом, для изотропной однородной среды множество резонансных полюсов состоит из двух определяемых независимо наборов  $\omega_k^{(1)}$  и  $\omega_k^{(2)}$  (корней функций  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ ), которые называют полюсами первого и второго типа [9]. Обычно отраженное поле несет резонансы обоих типов, кроме частных случаев нормального падения на



Фиг. 1



Фиг. 2

трещину  $P$ - или  $S$ -волны, когда отражаются также только  $P$ - или  $S$ -волны с резонансными частотами только первого или второго типа соответственно. Для трещин, расположенных в плоскости склейки разнородных материалов (в общем случае для вертикально-неоднородных сред), такого распада на две независимые системы нет, хотя и в этом случае можно условно отнести полюса к первому или второму типу, проследив их соответствие при непрерывном изменении свойств материалов от составного к однородному полупространству.

Численный поиск резонансных полюсов в комплексной плоскости осуществлялся методом парабол (методом Мюллера) с контролем числа найденных корней аналитических функций  $\Delta_1(\omega)$ ,  $\Delta_2(\omega)$  по принципу аргумента. Достоверность результатов контролировалась сопоставлением с известными результатами для круговой трещины [8,9].

На фиг. 1,2 приводятся численные результаты соответственно для полюсов первого и второго типа в комплексной плоскости безразмерной частоты  $\omega = 2\pi f r_0 / v_S$  ( $f$  – размерная частота,  $v_S$  – скорость  $S$ -волн,  $r_0 = \sqrt{S_\Omega / \pi}$  – характерный линейный размер,  $S_\Omega$  – площадь трещины, для круговой области  $r_0$  совпадает с ее радиусом); коэффициент Пуассона  $\nu = 0,25$ . Светлые кружки – резонансные полюса для круговой трещины, полученные ранее<sup>2</sup>, квадраты – для квадратной трещины той же площади. Число светлых кружков больше, так как для круговой трещины приведены и устранимые полюса. Сопоставление показывает, что неустраиваемые резонансные частоты для круга и квадрата достаточно близки. Главным фактором здесь является площадь трещины. Отметим, что для двух подобных областей  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ , различающихся только площадями  $S_1$  и  $S_2$ , картины распределения полюсов также подобны с коэффициентом подобия  $k = \sqrt{S_1 / S_2} : \omega^{(2)} = k \omega^{(1)}$ . Благодаря выбранной выше нормировке частоты, площадь любой области  $\Omega$  в безразмерных единицах (отнесенных к  $r_0$ ) совпадает с площадью единичного круга  $S_0 = \pi$ , что удобно для анализа влияния формы.

На фиг. 1, 2 показаны траектории движения трех первых неустраиваемых полюсов первого и второго типа при непрерывном изменении формы области от квадрата к вытянутому прямоугольнику. Цифрами 1,2,... показано положение полюсов для прямоугольных областей с соотношениями сторон 1:1, 1:2 и т.д. Видно, что удлинение трещины значительно изменяет картину распределения полюсов, в то время как для квадрата и круга они

<sup>2</sup> Alves C. Étude numérique de la diffraction d'ondes acoustiques et élastiques par une fissure plane de forme quelconque. Problèmes directs et inverses // These de doctorat de L'école Polytechnique, Compiegne, France. 1995.

отличались несущественно. Следует также отметить, что изменение положения первого полюса первого типа в зависимости от эксцентриситета эллиптических трещин [9] согласуется с траекторией смещения для прямоугольных трещин вниз и вправо (фиг. 1).

Наряду с прямоугольными трещинами рассматривались также *L*-образные (формы показаны в правой нижней части фиг. 1). Наличие выступа несущественно отклоняет положение полюса от траектории, полученной для трещин прямоугольной формы (см., например, точки 2' – 4' на фиг. 1). Главным фактором, влияющим на положение резонансных полюсов, является, по-видимому, соотношение длины и основного поперечного размера.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00457).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 282–289.
2. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 271 с.
3. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Berlin, etc.: Springer, 1992. 305 p.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
5. Baum C.E. The singularity expansion method // Transient Electromagnetic Fields / Ed. L.E. Felsen. N.Y.: Springer, 1976. P. 129–179.
6. Überall H., Moser P.J., Murphy J.D., Nagl A., Igiri G., Subrahmanyam J.V., Gaunard G.C., Brill D., Delsanto P.P., Alemar J.D., Rosario E. Electromagnetic and acoustic resonance scattering theory // Wave Motion. 1983. V. 5. N 4. P. 307–329.
7. Bollig G., Langenberg K.J. The singularity expansion method as applied to the elastodynamic scattering problem // Wave Motion. 1983. V. 5. N 4. P. 331–354.
8. Eriksson A.S. Natural frequencies of a penny-shaped crack with spring boundary condition // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62. N 1. P. 59–63.
9. Alves C., Ha Duong T. Numerical experiments on the resonance poles associated to acoustic and elastic scattering by a plane crack // Proc. 3rd Intern. Conf. on Math. and Numer. Aspects of Wave Propagation / Ed. G. Cohen. Philadelphia: SIAM, 1995. P. 544–553.
10. Капцов А.И., Шифрин Е.И. Решение динамических задач об эллиптической трещине в упругом пространстве с помощью аппроксимаций Паде // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 511–519.
11. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.

Краснодар

Поступила в редакцию  
17.X.1997