

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. Т.И. Белянкова, И.И. Ворович, В.В. Калинин

**НИЗКОЧАСТОТНЫЕ РЕЗОНАНСЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОГО ТЕЛА  
С ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДОЙ**

Рассматриваются продольные колебания упругого стержня, имеющего на одном конце значительную сосредоточенную массу, к которой прикладывается заданная гармоническая нагрузка. Другой конец стержня соединен с жестким штампом, находящимся в безотрывном контакте с полуограниченной упругой средой. Доказывается ряд лемм, позволяющих определить свойства систем с упрощенными граничными условиями, которые являются мажорирующими по отношению к исследуемым характеристикам исходной системы. Тем самым удается наглядно представить влияние параметров системы на условия возникновения резонансов. Сформулированы условия возникновения неограниченных резонансов. Получены аналитические соотношения для определения количества резонансных частот.

Было установлено [1] существование неограниченных низкочастотных резонансов при взаимодействии массивного тела с полуограниченной средой. При определенных условиях они могут возникать при контакте упругих тел конечных размеров с упругим основанием, что было отмечено [2] при исследовании изгибных колебаний упругой балки на поверхности слоя. Ниже рассматривается иная модель ограниченного тела, использование которой позволило наглядно представить механическую природу возникновения резонансов при взаимодействии упругого тела конечных размеров с полуограниченной средой.

1. Рассматривается упругая двухмассовая система (далее система), которая включает упругий стержень, связывающий массивное тело  $M_1$  с жестким, занимающим на поверхности среды область  $\Omega$ , штампом  $M_2$ . Основанием служит полуограниченная среда (далее среда), имеющая критическую частоту распространения волн (слой, пакет слоев и т.д.). Система совершает вертикальные колебания под действием гармонической нагрузки, которая приложена к телу  $M_1$  (зависимость от времени принята в виде  $e^{i\omega t}$ ), трение в области контакта отсутствует.

Исследование резонансных свойств системы сводится к исследованию краевой задачи, которая в безразмерных переменных (временной множитель здесь и далее опущен) имеет вид

$$w_{xx} = -\sigma^2 w \tag{1.1}$$

$$x = l: -m_1 \kappa_2^2 w = F - ES w_x \tag{1.2}$$

$$x = 0: -m_2 \kappa_2^2 w = ES w_x - Pw, \quad P = \iint_{\Omega} q(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{1.3}$$

Здесь  $F$  – амплитуда внешней нагрузки,  $\kappa_2^2 = \rho \mu^{-1} a^2 \omega^2$  – приведенная к параметрам среды частота колебаний,  $\rho, \mu$  – плотность и модуль упругости материала среды,  $\sigma = \sigma_0 \kappa_2$  – приведенная частота колебаний стержня, где  $\sigma_0^2 = \rho_0 E^{-1}$ ,  $E, \rho_0$  – модуль Юнга

и плотность материала стержня, приведенные к соответствующим параметрам материала среды,  $m_n$  ( $n = 1, 2$ ) – масса тела  $M_n$ ,  $q(x_1, x_2)$  – напряжения в области контакта, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$kq = \iint_{\Omega} k(x_1 - \xi, x_2 - \eta)q(\xi, \eta)d\xi d\eta = 1, (x_1, x_2) \in \Omega \quad (1.4)$$

$$k(x_1, x_2) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha, \beta)e^{-i(\alpha x_1 + \beta x_2)} d\alpha d\beta$$

Вид функций  $K(\alpha, \beta)$ , правило выбора контуров  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  для различных контактных задач, методы решения интегральных уравнений типа (1.4), а также свойства этих решений приведены в [3, 4].  $P(\kappa_2)$  – реакция основания на единичное перемещение штампа, вещественная в диапазоне частот  $[0, \kappa^*]$  и комплекснозначная функция вне этого диапазона;  $\kappa^*$  – первая критическая частота распространения волн. Это обстоятельство определяет особенности резонансного взаимодействия ограниченных упругих тел с полуограниченными средами. В частности, значение критической частоты определяет границу области существования неограниченных резонансов. Краевую задачу (1.1)–(1.3) будем называть задачей 1.

Далее введем в рассмотрение частные случаи условий (1.2) и (1.3):

$$x = l: F - ES w_x = 0 \quad (1.5)$$

$$x = 0: w = 0 \quad (1.6)$$

Краевую задачу (1.1), (1.2), (1.6) будем называть задачей 2, краевую задачу (1.1), (1.5), (1.6) – задачей 3. В механическом смысле задачи 2 и 3 описывают колебания "закрепленной" системы или "закрепленного" стержня соответственно.

Решение задачи 1 имеет вид ( $w_n$  – амплитуда колебаний тела  $M_n$ )

$$w_1 = F[\gamma_0 \gamma_1 + E\sigma] \Delta_0^{-1}, \quad w_2 = FE\sigma(\cos\sigma l \Delta_0)^{-1} \quad (1.7)$$

где

$$\gamma_0 = \operatorname{tg}\sigma l, \quad \gamma_1 = P - m_2 \kappa_2^2, \quad \gamma_2 = E\sigma(\gamma_0 + \gamma_3^{-1}) \Delta_1^{-1}, \quad \gamma_3^{-1} = m_1^0 \sigma \quad (1.8)$$

$$\Delta_0 = E\sigma \Delta_1 (\gamma_1 - \gamma_2), \quad \Delta_1 = 1 - \gamma_0 \gamma_3^{-1}, \quad m_1^0 = m_1 \rho_0^{-1}$$

Из (1.7), (1.8) следует, что резонансными частотами системы, взаимодействующей с упругим основанием, являются собственные значения (СЗ)  $\kappa_n^0$  краевой задачи 1, которые удовлетворяют уравнению

$$\Delta_0(\kappa_2) = 0 \quad (1.9)$$

Неограниченный резонанс системе, контактирующей с упругим основанием, доставляют вещественные  $\kappa_n^0$ .

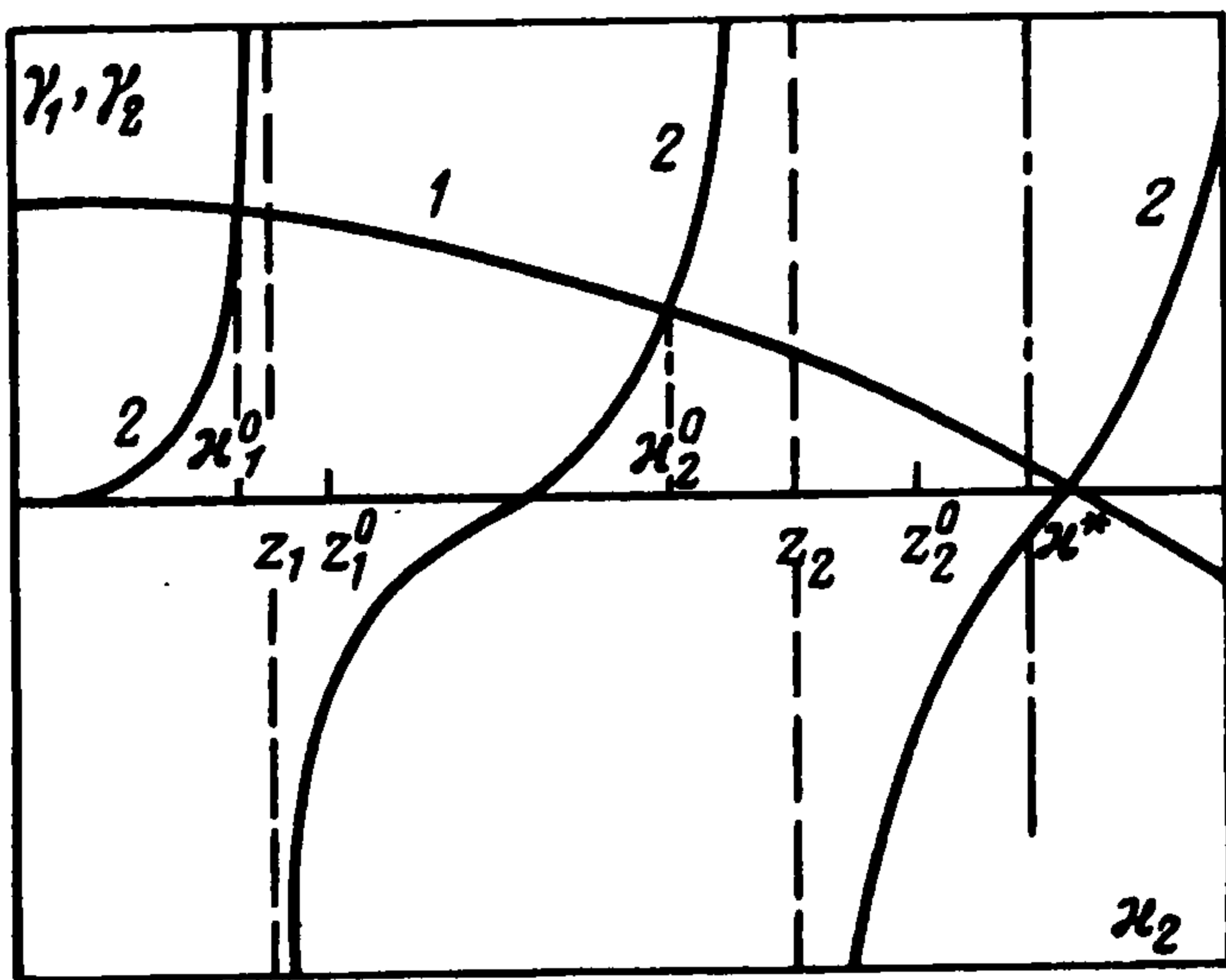
*Лемма 1.* Вещественные корни  $\kappa_n^0$  уравнения (1.9) удовлетворяют неравенству  $\kappa_n^0 < \kappa^*$ .

Лемма вытекает из того факта, что при комплексных значениях  $P(\kappa_2)$  уравнение (1.9) не может иметь вещественных корней.

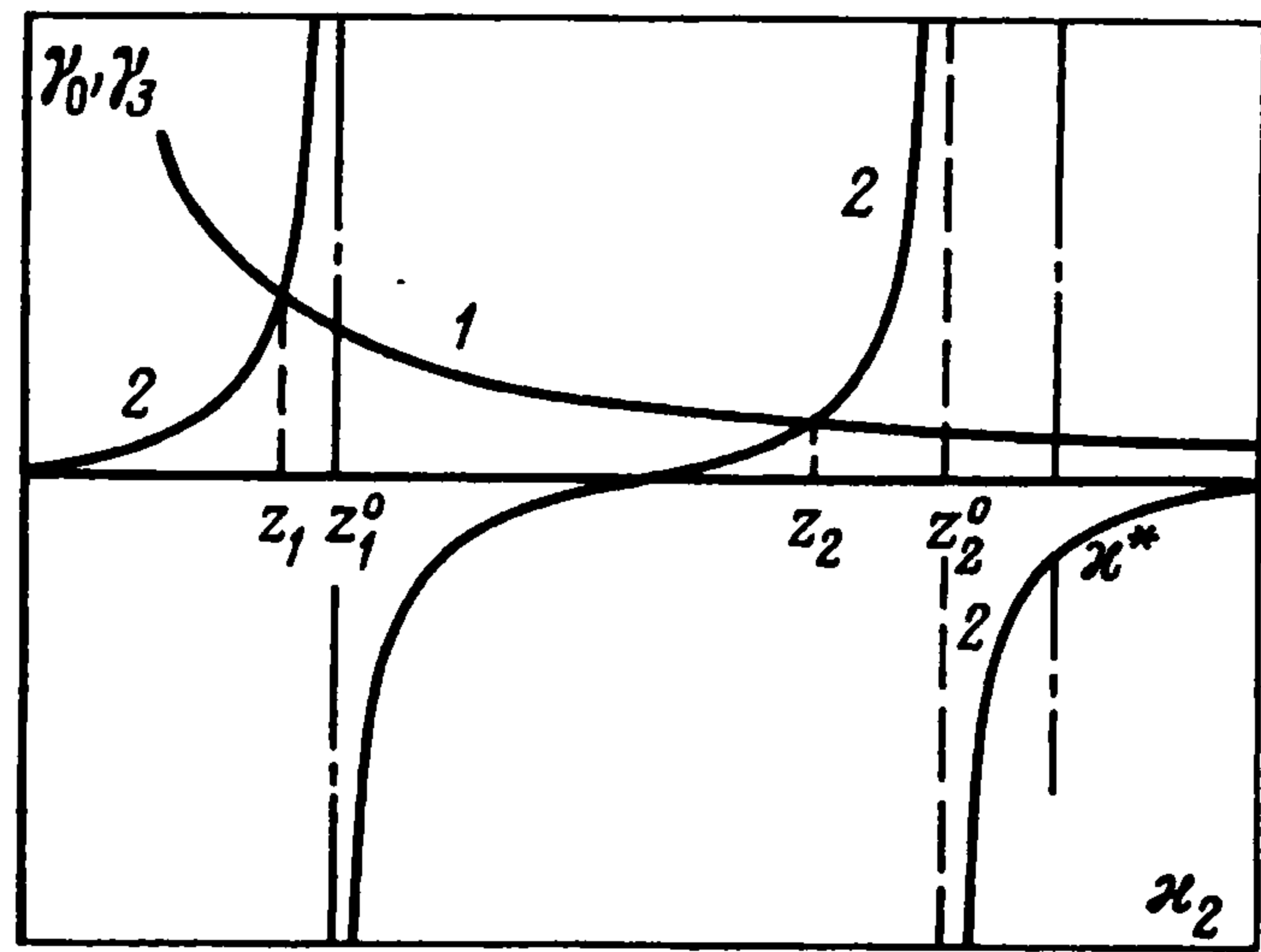
СЗ  $z_n$  краевой задачи 2 удовлетворяют уравнению

$$\Delta_1(\kappa_2) = 0 \quad (1.10)$$

СЗ  $z_n^0$  краевой задачи 3 – корни уравнения  $\cos\sigma l = 0$ . В силу свойств задач 2 и 3  $z_n$  и  $z_n^0$  являются вещественными, причем  $z_n^0 = (n - 1/2)\pi\sigma_0^{-1}l^{-1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Пусть  $N$  – количество СЗ  $z_n$ ,  $N_0$  – количество СЗ  $z_n^0$ , принадлежащих интервалу  $[0, \kappa^*]$ , т.е.  $z_N \leq \kappa^*$  и  $z_{N+1} > \kappa^*$ ,  $z_{N_0}^0 \leq \kappa^*$  и  $z_{N_0+1}^0 > \kappa^*$ , где  $N_0 = [\kappa^* \pi^{-1} \sigma_0 l + 1/2]$  ( $[a]$  – целая часть  $a$ ).

Заметим, что в случае упругого слоя с защемленной нижней гранью  $\kappa^* = \pi/2$  [3, 4], т.е.

$$N_0 = [(\sigma_0 l + 1)/2] \quad (2.1)$$

*Теорема.* Количество  $N^*$  неограниченных резонансов  $\kappa_n^0$  системы, контактирующей с упругой средой, удовлетворяет неравенству  $N^* \geq N_0$ . При этом  $N^* = N_0 + 1$ , если выполнено одно из неравенств  $\gamma_1(\kappa^*) \leq \gamma_2(\kappa^*)$  или  $\gamma_0(\kappa^*) \geq \gamma_3(\kappa^*)$ ,  $N^* = N_0 + 2$ , если выполнены оба неравенства,  $N^* = N_0$ , если не выполнено ни одно из неравенств.

Для доказательства установим связь между СЗ краевых задач 1, 2 и 3 и их количеством.

*Лемма 2.* СЗ задач 1 и 2 на интервале  $[0, \kappa^*]$  удовлетворяют неравенству  $\kappa_n^0 \leq z_n$ .

Из (1.8) следует, что  $z_n$  – полюсы функции  $\gamma_2(\kappa_2)$  (кривые 2 фиг. 1). Лемма вытекает из непрерывности  $\gamma_2(\kappa_2)$  на интервале  $[z_{k-1}, z_k]$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots; z_0 = 0$ ) и ограниченности  $\gamma_1(\kappa_2)$  (кривая 1 фиг. 1).

*Лемма 3.* СЗ задач 2 и 3 удовлетворяют неравенству  $z_n \leq \kappa_n^0$ .

Для доказательства преобразуем (1.10) к виду

$$\gamma_0(\kappa_2) - \gamma_3(\kappa_2) = 0$$

Согласно (1.8)  $\kappa_n^0$  – полюсы функции  $\gamma_0(\kappa_2)$  (кривые 2 фиг. 2). Справедливость леммы следует из характера поведения функций  $\gamma_0(\kappa_2)$  и  $\gamma_3(\kappa_2)$  (кривая 1 фиг. 2) на интервале  $[z_{k-1}^0, z_k^0]$  ( $k = 1, 2, 3, \dots; z_0^0 = 0$ ).

Из лемм 2 и 3 вытекает, что замена жесткого основания на упругое, равно как и нагружение "закрепленного" стержня массой приводит к понижению его резонансных частот:  $\kappa_n^0 \leq z_n \leq \kappa_n^0$ .

Связь между количеством СЗ задач 1, 2 и 3 на интервале  $[0, \kappa^*]$  устанавливается следующими леммами.

*Лемма 4.* Если  $\gamma_1(\kappa^*) \leq \gamma_2(\kappa^*)$ , то  $N^* = N + 1$ , в противном случае  $N^* = N$ .

Согласно лемме 2  $\kappa_N^0 \in [0, z_N]$ . Из характера поведения  $\gamma_1(\kappa_2)$  и  $\gamma_2(\kappa_2)$  на интервале  $[z_N, \kappa^*]$  следует, что  $\kappa_{N+1}^0 \in [z_N, \kappa^*]$  при  $\gamma_1(\kappa^*) \leq \gamma_2(\kappa^*)$ .

*Лемма 5.* Если  $\gamma_3(\kappa^*) \leq \gamma_0(\kappa^*)$ , то  $N = N_0 + 1$ , в противном случае  $N = N_0$ .

В силу леммы 3  $z_{N_0}^0 \in [0, z_{N_0}^0]$ . Аналогично  $z_{N_0+1}^0 \in [z_{N_0}^0, \kappa^*]$  при  $\gamma_0(\kappa^*) \geq \gamma_3(\kappa^*)$ .

Лемма 5 завершает доказательство теоремы.

Использование теоремы позволяет наглядно представить влияние параметров системы на условия возникновения резонансов, что делает возможным без проведения сложного анализа динамического контакта системы с упругим основанием устанавливать количество низкочастотных неограниченных резонансов и при необходимости изменять это количество, целенаправленно подбирая параметры системы.

*Следствие 1.* При  $m_1 = 0$  количество неограниченных резонансов  $N^* = N_0 + 1$ , если  $\gamma_1(\kappa^*) \leq \gamma_2(\kappa^*)$ . В противном случае  $N^* = N_0$ .

Следствие вытекает из теоремы 1, если принять во внимание, что при  $m_1 = 0$  СЗ задач 2 и 3 совпадают.

*Следствие 2.* Если  $\sigma_0 l > 1/2$ , то система при контакте с упругой средой имеет не менее одного неограниченного резонанса при любом значении массы штампа  $m_2$ .

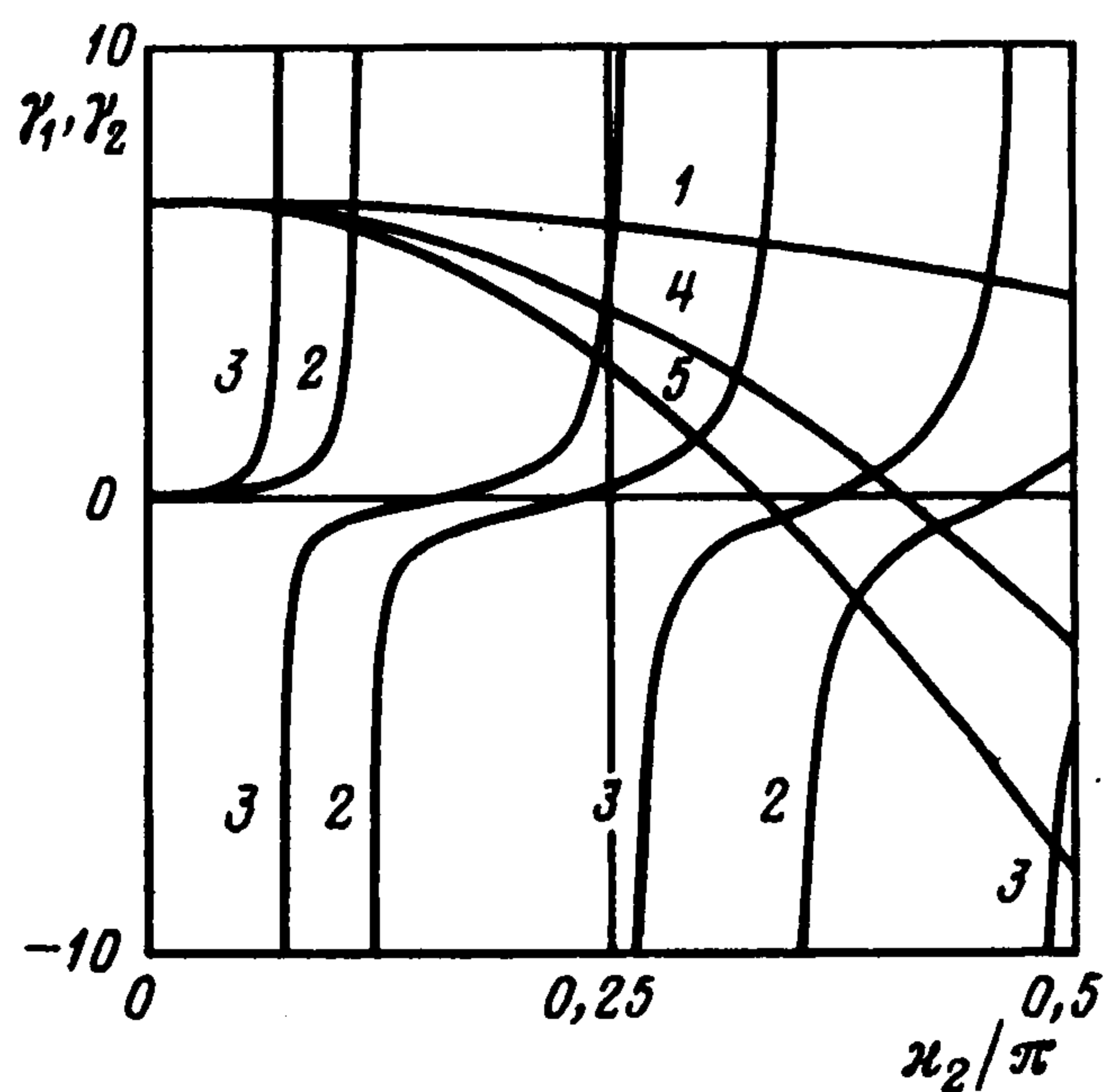
*Следствие 3.* Если  $m_2 > P(\kappa^*)\kappa^{*-2}$ , то система при контакте с упругой средой имеет не менее одного неограниченного резонанса при любом значении длины стержня.

*Замечание.* Величина  $m_1$  и  $m_2$  влияет не только на количество резонансов, но и на значения резонансных частот, причем  $m_2$  непосредственно влияет на  $\kappa_n^0$  (фиг. 1), а  $m_1$  — опосредованно, через значения  $z_n$  (фиг. 2).

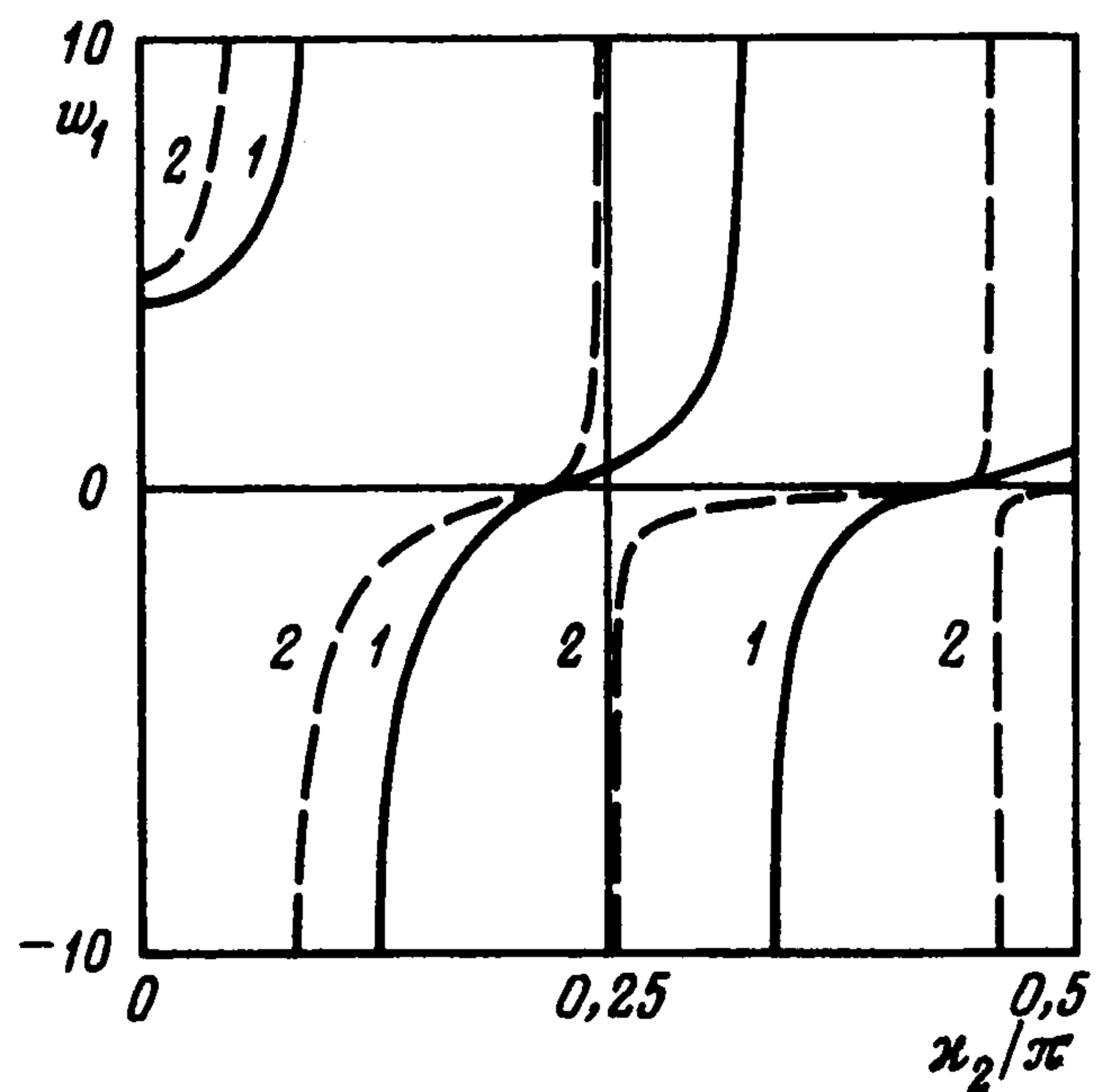
1°. При любых значениях  $m_2$  имеем  $z_{n-1} < \kappa_n^0 < z_n$ . Увеличение  $m_2$  приводит к уменьшению  $\kappa_n^0$ . При малых значениях  $m_2$  влияние изменения этих значений на резонансные частоты увеличивается с возрастанием номера резонансной частоты. С увеличением значения  $m_2$  (по мере приближения  $\kappa_n^0$  к  $z_{n-1}$ ) изменение значений  $\kappa_n^0$  замедляется и приобретает асимптотический характер, сначала для более высоких, а затем распространяется на низкие резонансные частоты. В конечном счете при достаточно больших значениях  $m_2$ , изменение этих значений сказывается лишь на первом резонансе.

2°. При любых значениях  $m_1$  имеем  $\zeta_n^0 < z_n < z_n^0$ , где  $\zeta_n^0$  — нули функции  $\gamma_0(\kappa_2)$ . Увеличение  $m_1$  приводит к уменьшению значений  $z_n$ , что в свою очередь определяет уменьшение резонансных частот  $\kappa_n^0$ . Скорость изменения  $z_n$  при малых  $m_1$  возрастает с увеличением номера резонансной частоты. При увеличении  $m_1$  (по мере приближения  $z_n$  к  $\zeta_n^0$ ) изменение  $z_n$  замедляется и приобретает асимптотический характер, не достигая  $\zeta_n^0$ . Как и ранее, это имеет место сначала для более высоких, а затем охватывает низкие резонансные частоты. В конечном счете при достаточно больших значениях  $m_1$  их изменение влияет лишь на первый резонанс.

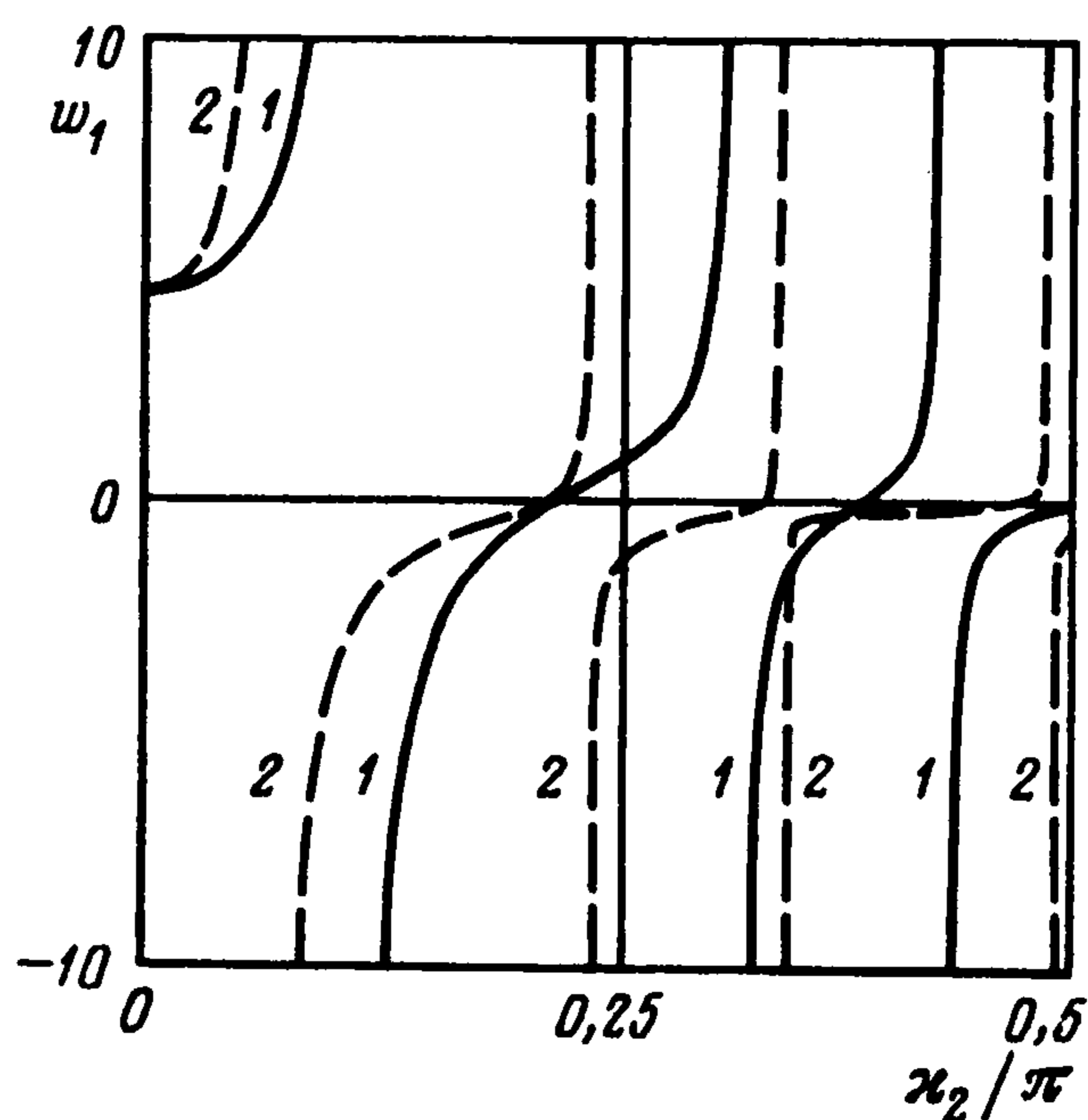
3. В качестве примера рассмотрим плоскую задачу о колебаниях упругой двухмассовой системы на поверхности упругого слоя толщины  $h$  с заземленной нижней гранью. Система представляет собой жесткий, полосовой, занимающий в плане область  $|x_1| \leq a$  штамп  $M_2$ , соединенный с помощью стержня конечной длины  $l$  с массивным телом  $M_1$ . Модуль Юнга и плотность материала стержня равны соответственно  $E$  и  $\rho_0$ . Предполагается, что штамп, стержень и тело  $M_1$  совершают поступательные вертикальные колебания под действием гармонической нагрузки, которая приложена к телу  $M_1$ . Краевая задача, описывающая движение элементов, имеет вид (1.1), (1.2) с тем отличием, что реакция среды  $P(\kappa_2)$  в этом



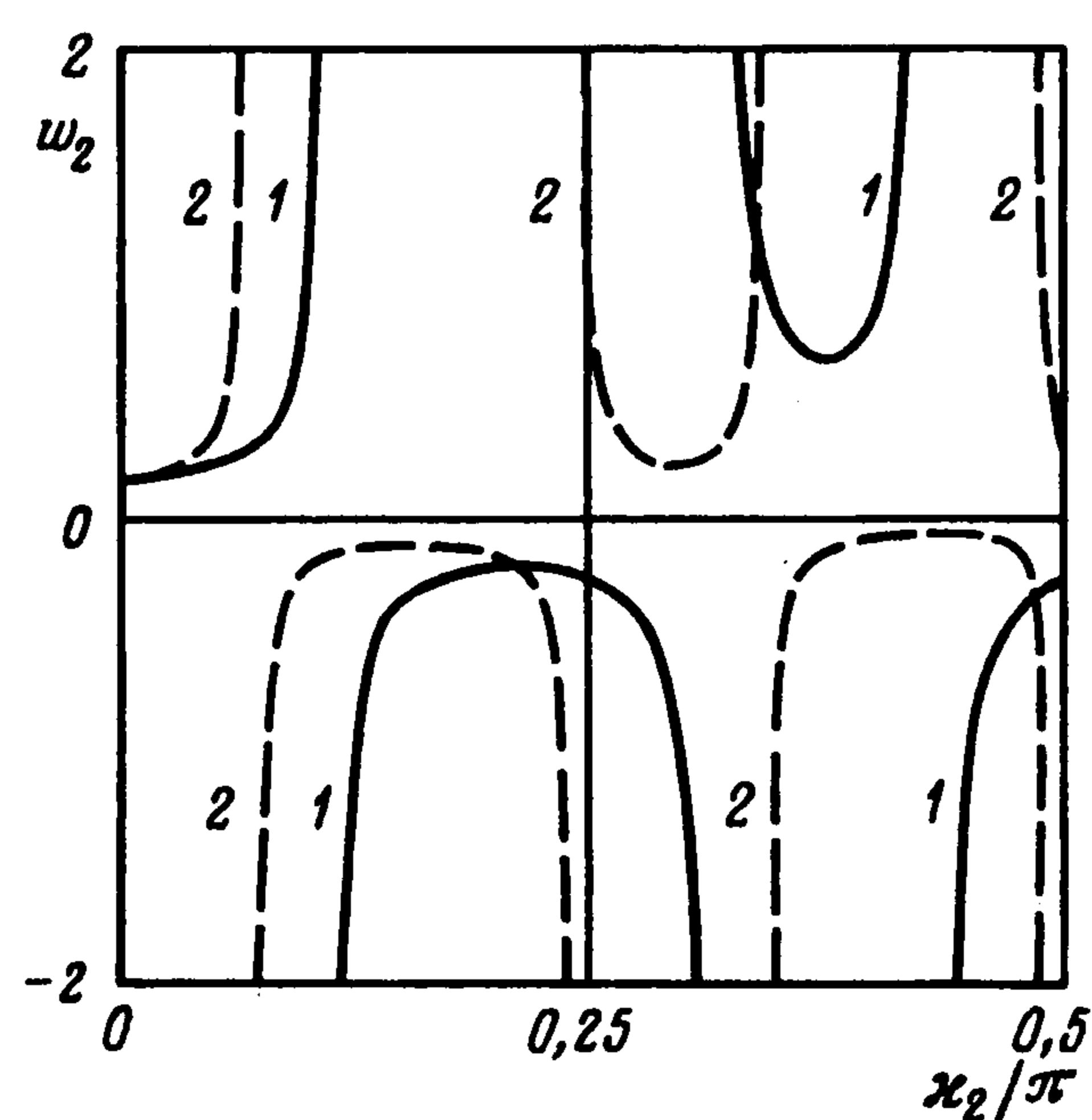
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

случае представляется выражением

$$P = \int_{-a}^a q(x_1) dx_1 \quad (3.1)$$

Контактные напряжения  $q(x_1)$  удовлетворяют интегральному уравнению

$$\int_{-a}^a k_{33}(x_1 - \zeta) q(\zeta) d\zeta = 1, \quad k_{33}(s) = \int_{\Gamma_1} K_{33}(\alpha) e^{-i\alpha s} d\alpha \quad (3.2)$$

Вид функции  $K_{33}(\alpha)$  для задачи о колебаниях жесткого штампа на поверхности слоя с заземленным основанием хорошо известен в литературе и здесь не приводится. Для решения интегрального уравнения (3.2) применяется метод факторизации [3, 4]. Функция  $q(x_1)$  и реакция основания (3.1) описываются известными формулами [3–6].

На фиг. 3 представлены графики функций  $\gamma_1(\kappa_2)$  и  $\gamma_2(\kappa_2)$ , иллюстрирующие влияние значений  $m_1$  и  $m_2$  на резонансные свойства упругой двухмассовой системы, контактирующей с упругим основанием. Параметры стержня имеют значения, при которых  $\sigma_0 l = 4,32$ . В этом случае из (2.1) имеем  $N_0 = 2$ . Цифрами 1, 4, 5 обозначены кривые  $\gamma_1(\kappa_2)$  при массе  $m_2 = 0, 3, 5$ , цифрами 2, 3 – кривые  $\gamma_2(\kappa_2)$  при значении массы  $m_1 = 0, 3$  соответственно. Можно убедиться, что  $\gamma_0(\kappa^*) \geq \gamma_3(\kappa^*)$  при  $m_1 = 3$ , если учесть [3, 4], что  $\kappa^* = \pi/2$ .

Из графиков следует, что при данных значениях параметров стержня возможны следующие ситуации:

конфигурация а:  $m_1 = 0, m_2 = 0$  (кривые 1, 2 фиг. 3); из следствия 1 вытекает, что система имеет два резонанса, поскольку  $\gamma_1(\kappa^*) > \gamma_2(\kappa^*)$ ;

конфигурация б:  $m_1 = 0, m_2 = 3$  (кривые 4, 2 фиг. 3); из следствия 1 вытекает, что система имеет три резонанса, поскольку  $\gamma_1(\kappa^*) \leq \gamma_2(\kappa^*)$ ;

конфигурация в:  $m_1 = 3, m_2 = 0$  (кривые 1, 3 фиг. 3); из теоремы следует, что система имеет три резонанса, так как  $\gamma_0(\kappa^*) \geq \gamma_3(\kappa^*)$  и  $\gamma_1(\kappa^*) > \gamma_2(\kappa^*)$ ;

конфигурация г:  $m_1 = 3, m_2 = 5$  (кривые 5, 3 фиг. 3); из теоремы следует, что система имеет четыре резонанса, так как  $\gamma_1(\kappa^*) \leq \gamma_2(\kappa^*)$  и  $\gamma_0(\kappa^*) \geq \gamma_3(\kappa^*)$ .

На фиг. 4, 5 представлены графики перемещений  $w_1$  в зависимости от частоты. Цифрами 1, 2 на фиг. 4 обозначены кривые  $w_1$ , соответствующие конфигурациям а и в системы, цифрами 1, 2 на фиг. 5 обозначены кривые  $w_1$ , соответствующие конфигурациям б и г системы. Из графиков следует, что при данном значении  $\sigma_0 l$  система с конфигурацией а имеет только две резонансные частоты (кривая 1 фиг. 4). С увеличением  $m_1$  значения резонансных частот уменьшаются. При  $m_1 = 3$  (конфигурация в, кривая 2 фиг. 4) система имеет три изолированных резонанса. Расчеты показали, что дальнейшее увеличение  $m_1$  приводит к некоторому уменьшению значений резонансных частот, увеличивается добротность системы (в малой окрестности резонансной частоты наблюдается значительный рост амплитуды колебаний), однако количество резонансов не изменяется.

Сравнивая кривые 1 фиг. 4 и фиг. 5, видим, что увеличение  $m_2$  приводит к смещению резонансов в низкие частоты. При  $m_2 = 3$  (конфигурация б) появляется третий резонанс. Расчеты показали, что дальнейшее увеличение  $m_2$  в этом случае приводит лишь к сдвигу резонансов в область низких частот, добротность системы изменяется мало, количество резонансов остается прежним.

Сравнивая кривые 2 фиг. 4 и фиг. 5, видим, что увеличение  $m_2$  (конфигурация г) приводит к смещению резонансов в область низких частот, появляется четвертый резонанс. Дальнейшее увеличение  $m_2$  не влияет на количество резонансов.

На фиг. 6 представлены кривые  $w_2$ , иллюстрирующие смещение штампа в зависимости от частоты. Цифрами 1, 2 обозначены кривые, соответствующие конфигурациям б и г системы. Как следует из графиков, характер поведения  $w_2$  аналогичен характеру поведения  $w_1$  с тем отличием, что отсутствуют частоты "антирезонанса", т.е. частоты, на которых амплитуда колебаний обращается в нуль.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
2. Ворович Е.И., Пряхина О.Д. Об одном эффективном методе решения задачи о колебаниях упругой балки на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 96–101.
3. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
4. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
5. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Динамика массивного тела, осциллирующего на поверхности предварительно напряженного слоя // Изв. РАН МТТ. 1998. № 2. С. 89–101.
6. Калинин В.В., Полякова И.Б. О возбуждении волн в слое с начальными напряжениями // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 320–326.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
26.IX.1997