УДК 539.3

© 1998 г. Г.Я. Попов

ЗАДАЧИ КОНЦЕНТРАЦИИ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ДЕФЕКТОВ В СФЕРИЧЕСКИ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Рассматривается сферически слоистая среда, упругие параметры которой скачкообразно меняются на сферических поверхностях, с дефектами в виде трещин или тонких жестких включений. Метод решения задач концентрации возле таких дефектов базируется на введении в качестве основных неизвестных линейных комбинаций смещений и напряжений, что позволило эффективно преодолеть трудности, связанные с наличием произвольного числа слоев. Метод излагается сначала для неограниченной упругой среды и дефектов сферического очертания, расположенных на поверхностях смены упругих параметров (межфазные дефекты), затем указывается путь обобщения на случай упругой среды конечных размеров, дефектов других очертаний и расположенных не на указанных поверхностях. Детализация метода проведена применительно к случаю двуслойной среды с межфазной трещиной при действии на среду центра кручения в начале координат. Проблема сведена к интегральному уравнению, дан эффективный метод его решения и получена формула для коэффициента интенсивности напряжений.

Осесимметричные задачи концентрации напряжений в двуслойной среде с трещиной рассмотрены ранее [1, 2].

1. Введение новых неизвестных функций и отыскание их трансформант. Компоненты поля смещений $u_r = u_r(r,\theta,\varphi)$, $u_\theta = u_\theta(r,\theta,\varphi)$, $u_\varphi = u_\varphi(r,\theta,\varphi)$ обозначим так: $2G[u_r,u_\theta,u_\varphi] = [u,v,w]$ (G,μ – модуль сдвига и коэффициент Пуассона) и условимся помечать частную производную по r штрихом, по θ – точкой, по φ – запятой. Введем вместо смещений v, w, новые неизвестные $z(r,\theta,\varphi)$ и $z^*(r,\theta,\varphi)$, а вместо касательных напряжений $\tau_{r\theta} \equiv \tau_\theta$ и $\tau_{r\varphi} \equiv \tau_\varphi$ функции $\tau(r,\theta,\varphi)$ и $\tau^*(r,\theta,\varphi)$ согласно формулам

$$\sin\theta \begin{Vmatrix} z \\ z^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} v \sin\theta \\ w \sin\theta \end{Vmatrix}^{\cdot} \pm \begin{Vmatrix} w \\ v \end{Vmatrix}^{,}, \quad \sin\theta \begin{Vmatrix} \tau \\ \tau^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \tau_\theta \sin\theta \\ \tau_\varphi \sin\theta \end{Vmatrix}^{\cdot} \pm \begin{Vmatrix} \tau_\varphi \\ \tau_\theta \end{Vmatrix}^{,} \tag{1.1}$$

При этом уравнения Ламе, записанные в сферической системе координат [3], расчленяются на гармоническое уравнение для z^* и систему двух уравнений для u и z. Чтобы упростить отыскание введенных функций, перейдем к трансформантам Фурье

$$[u_n(r,\theta), z_n(r,\theta), z_n^*(r,\theta)] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{[u(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi), z^*(r,\theta,\varphi)]}{e^{in\varphi}} d\varphi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.2}$$

и Лежандра ($P_k^m(z)$ – присоединенная функция Лежандра)

$$[u_{nk}(r), z_{nk}(r), z_{nk}^*(r)] = \int_0^{\pi} \frac{P_k^{|n|}(\cos\theta)[u_n(r,\theta), z_n(r,\theta), z_n^*(r,\theta)]}{\operatorname{cosec}\theta} d\theta, \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

для которых известны формулы обращения

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{u_n(r,\theta)}{e^{-in\varphi}},\quad u_n(r,\theta)=\sum_{k=|n|}^{\infty}\sigma_{kn}u_{nk}(r)P_k^{|n|}(\cos\theta),\quad \sigma_{kn}=\frac{(k-|n|)!}{(k+|n|)!}\,\frac{2k+1}{2} \tag{1.4}$$

Можно убедиться, что трансформанты Фурье напряжений, выражаются через новые неизвестные так:

$$\begin{aligned}&(1-2\mu)\sigma_{rn}(r,\theta)=(1-\mu)u_n'(r,\theta)+\mu r^{-1}[2u_n(r,\theta)+z_n(r,\theta)]\\&2r\tau_n(r,\theta)=r^2(r^{-1}z_n)'-\nabla_n u_n,\quad 2r\tau_n^*(r,\theta)=r^2(r^{-1}z_n^*)'\\&\nabla_n f(r,\theta)=(\sin\theta)^{-2}n^2 f(r,\theta)-(\sin\theta)^{-1}[\sin\theta f^{\bullet}(r,\theta)]^{\bullet}\end{aligned} \tag{1.5}$$

Следствием того, что функция z^* является гармонической, ее трансформанта Фурье–Лежандра $z_{nk}^*(r)$ в общем случае будет определяться формулой

$$z_{nk}^*(r)=X_{nk}r^k+Y_{nk}r^{-k-1},\quad k=0,1,2,\ldots,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{1.6}$$

где X_{nk}, Y_{nk} – произвольные постоянные.

Чтобы получить аналогичные общие представления для $u_{nk}(r)$ и $z_{nk}(r)$, представляется удобным исходить из формул, полученных Ламе [4] для смещений u_r, u_θ, u_φ и записанных А.Ф. Улитко [5] в виде

$$u_r(r,\theta,\varphi)=\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k}\frac{P_k^{|n|}(\cos\theta)u_k^{(n)}(r)}{\sqrt{2\pi\sigma_{kn}}\,e^{-in\varphi}} \tag{1.7}$$

$$u_k^{|n|}(r)=\mu_k^+A_k^{(n)}r^{k+1}+B_k^{(n)}r^{k-1}+\mu_k^-C_k^{(n)}r^{-k}-D_k^{(n)}r^{-k-2}$$

$$\mu_k^+=k-2-4\mu,\quad \mu_k^-=k+3-4\mu$$

Здесь $A_k^{(n)}$, $B_k^{(n)}$, $C_k^{(n)}$, $D_k^{(n)}$ произвольные постоянные. Изменив в двойном ряду (1.7) порядок суммирования, применим к нему интегральные преобразования (1.2) и (1.3). В результате установим равенство $u_{nk}(r)=2G(2\pi\sigma_{kn})^{-1/2}u_k^{(n)}(r)$, и потому

$$u_{nk}(r)=\mu_k^+X_{nk}^0r^{k+1}+X_{nk}^1r^{k-1}+\mu_k^-Y_{nk}^0r^{-k}-Y_{nk}^1r^{-k-2} \tag{1.8}$$

где $X_{nk}^{0,1}$, $Y_{nk}^{0,1}$ – новые произвольные постоянные. Выполнив аналогичные операции над формулами для u_θ, u_φ из [5] с учетом формул (1.1), в трансформантах, имеющих вид

$$\sin\theta\begin{Vmatrix}z_n\\z_n^*\end{Vmatrix}=\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{Vmatrix}v_n\\ \\w_n\end{Vmatrix}\sin\theta\pm in\begin{Vmatrix}w_n\\v_n\end{Vmatrix} \tag{1.9}$$

получим

$$-z_{nk}(r)=k\mu_{k+2}^-X_{nk}^0r^{k+1}+(k+1)X_{nk}^1r^{k-1}-(k+1)\mu_{k-2}Y_{nk}^0r^{-k}+kY_{nk}r^{-k-2} \tag{1.10}$$

После применения ко второй формуле из (1.1) преобразования (1.2) и преобразования (1.3) к формулам (1.4) с последующим использованием (1.8) и (1.10) находим

$$\sigma_{rnk}=\mu_k^\sigma X_{nk}^0r^k+(k-1)X_{nk}^1r^{k-2}-\mu_{k+2}^\sigma Y_{nk}^0r^{-k-1}+(k+2)Y_{nk}^1r^{-k-3}$$

$$-\tau_{nk}=k\mu_{k+1}^\tau X_{nk}^0r^k+(k^2-1)X_{nk}^1r^{-k-2}+(k+1)\mu_k^\tau Y_{nk}^0r^{-k-1}$$

$$-k(k+2)Y_{nk}^{1}r^{-k-3}(\mu_k^\sigma = k(k-1)-2-2\mu, \quad \mu_k^\tau = k^2-2+2\mu)$$

$$2\tau_{nk}^* = X_{nk}(k-1)r^{k-1} - Y_{nk}(k+2)r^{-k-2} \tag{1.11}$$

Применим полученные соотношения для решения такой задачи. Упругая среда заполняет внешность сферической полости радиуса R. К поверхности этой полости приложены касательные напряжений, т.е.

$$\tau_{r\varphi}^0 |_{r=R} = \tau_\varphi^0 |_{r=R} = A\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1.12}$$

Требуется найти напряжения и смещения. Поскольку имеет место осевая симметрия, то во всех предыдущих формулах следует положить $n = 0$, так как согласно (1.2) $\tau_{\varphi 0}(r,\theta) = \tau_{r\varphi}$, $w_0(r,\theta) = w(r,\theta)$. Пользуясь второй формулой из (1.1), записанную в трансформантах, и учитывая (1.12), находим, что $\tau_0^*(R,\theta) = 2A\cos\theta$ и соответственно (δ_{kj} – символ Кронекера):

$$\tau_{0k}^*(R) = 4A(2k+1)^{-1}\delta_{k1} \tag{1.13}$$

Если строить решение, регулярное на бесконечности, то в формуле (1.11) для $\tau_{nk}^*(r)$ следует положить $X_{0k} = 0$, а Y_{0k} найдем из условия (1.13); тем самым будут найдены трансформанты $\tau_{0k}^*(r)$ и $z_{0k}^*(r)$. Воспользовавшись затем соответствующей формулой обращения (1.4), найдем окончательно

$$\tau_0^*(r,\theta) = \frac{3M}{4\pi r^3}\cos\theta, \quad z_0^*(r,\theta) = -\frac{M\cos\theta}{2\pi r^2}, \quad M = \frac{8\pi A R^3}{3} \tag{1.14}$$

Можно убедиться, что M – крутящий момент, образованный касательными напряжениями (1.12).

Если теперь устремить R к нулю, а постоянную A к бесконечности, так чтобы момент оставался неизменным и равным заданному M, то формулы (1.14) дадут поле напряжений и смещений от центра кручения в начале координат.

Как видим, введенные новые функции находятся достаточно просто. Определив их, функции v_n и w_n можно найти следующим образом. С помощью очевидной линейной комбинации равенств (1.9) получим дифференциальные уравнения для v_n и w_n, которые различаются только правыми частями и просто решаются с помощью интегрального преобразования (1.3). В результате приходим к формулам

$$\left\| \begin{matrix} v_n(r,\theta) \\ w_n(r,\theta) \end{matrix} \right\| = -\int_0^\pi \sin t\, \Phi_n(\theta,t) \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\| \sin^2 t \begin{matrix} z_n(r,t) \\ z_n^*(r,t) \end{matrix} \right\| \mp in \left\| \begin{matrix} z_n^*(r,t) \\ z_n(r,t) \end{matrix} \right\| \right] dt \tag{1.15}$$

$$\Phi_n(\theta,t) = \sum_{k=|n|}^{\infty} \frac{\sigma_{kn}}{k(k+1)} P_k^{|n|}(\cos\theta) P_k^{|n|}(\cos t)$$

Эта формула непригодна при $n = 0$, т.е. для осесимметричных задач, но в этом случае, полагая в соотношениях (1.9) $n = 0$, можно получить более простые формулы

$$\left\| \begin{matrix} v_0(r,\theta) \\ w_0(r,\theta) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\sin\theta} \int_0^\theta \left\| \begin{matrix} z_0(r,t) \\ z_0^*(r,t) \end{matrix} \right\| \sin t\, dt \tag{1.16}$$

2. Сведение задач о концентрации напряжений в сферически слоистых средах к системе уравнений и эффективный способ ее решения. Рассмотрим такую задачу. В неограниченной сферически слоистой упругой среде, произвольно загруженной объемными силами, имеются дефекты типа трещин или тонких включений, расположенные на сферических поверхностях смены упругих постоянных. Требуется определить распределение напряжений и смещений в такой среде.

Обозначим радиусы сферических поверхностей, на которых скачкообразно происходит смена упругих постоянных, через R_i ($i = 0, 1, 2, \ldots m$) так что при $R_{i-1} < r < R_i$ коэффициент Пуассона и модуль сдвига приобретают значения μ_i и G_i, причем $R_{-1} = 0$, $R_{m+1} = \infty$. В качестве основных неизвестных примем введенные выше функции, трансформанты Фурье–Лежандра которых определяются формулами (1.6), (1.8), (1.10) и (1.11); для каждого слоя со своими произвольными постоянными ${}_iX_{nk}^{0,1}$, ${}_iY_{nk}^{0,1}$ и упругими параметрами μ_i и G_i. Например, для $u_{nk}(r)$ справедлива формула

$$
\begin{gathered}
{}_iu_{nk}(r) = {}_iX_{nk}^0 r^{k+1}\,{}_i\mu_k^+ + {}_iX_{nk}^1 r^{k-1} + {}_iY_{nk}^0 r^{-k}\,{}_i\mu_k^- - {}_iY_{nk} r^{-k-2} + {}_iu_{nk}^0(r) \\
{}_i\mu_k^+ = k - 2 + 4\mu_i, \quad {}_i\mu_k^- = k + 3 - 4\mu_i, \quad i = 0,1,\ldots, \quad R_{i-1} < r < R_i
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Подобные же формулы имеют место и для остальных трансформант:

$$
{}_iz_{nk}(r), \quad {}_iz_{nk}^*(r), \quad {}_i\sigma_{rnk}(r), \quad {}_i\tau_{nk}(r), \quad {}_i\tau_{nk}^*(r) \tag{2.2}
$$

При этом, чтобы обеспечить регулярность перечисленных трансформант в нуле и на бесконечности, следует положить

$$
{}_0Y_{nk} = {}_0Y_{nk}^0 = {}_0Y_{nk}^1 = 0, \quad {}_{m+1}X_{nk} = {}_{m+1}X_{nk}^0 = {}_{m+1}X_{nk}^1 = 0 \tag{2.3}
$$

При записи формулы (2.1) учтено, что на каждом сферическом слое могут быть приложены объемные силы, которые вызывают свое поле напряжений и смещений. Соответствующие этому полю трансформанты (1.8), (1.10), (1.6) и (1.11) будем обозначать ${}_iu_{nk}^0$, ${}_iz_{nk}^0$, ${}_iz_{nk}^{*0}$, ${}_i\sigma_{rnk}^0$, ${}_i\tau_{nk}^0$, ${}_i\tau_{nk}^{*0}$. Поскольку можно считать, что указанное поле возникает в неограниченной среде с постоянными μ_i и G_i, то компоненты этого поля всегда можно определить с помощью известных формул теории упругости, и потому будем считать перечисленные трансформанты известными. Таким образом, необходимо определить постоянные ${}_iX_{nk}$, ${}_iX_{nk}^{0,1}$, ${}_iY_{nk}$, ${}_iY_{nk}^{0,1}$ ($i = 0, 1, \ldots, m + 1$). Благодаря введению функций $z(r, \theta, \varphi)$, $z^*(r, \theta, \varphi)$, $\tau(r, \theta, \varphi)$, $\tau^*(r, \theta, \varphi)$ эта проблема распадается на раздельное нахождение ${}_iX_{nk}$, ${}_iY_{nk}$ и ${}_iX_{nk}^{0,1}$, ${}_iY_{nk}^{0,1}$.

Способ ее решения вначале опишем применительно к ${}_iX_{nk}$, ${}_iY_{nk}$ В первую очередь обеспечим непрерывность смещений и напряжений при $r = R_i$ ($i = 0, 1, \ldots, m$). В данном случае речь идет о напряжениях $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{r\varphi}$, через которые выражается τ^*, и смещениях u_θ и u_φ, определяющих z^*. Это приводит к необходимости приравнять функцию z_{nk}^* на i-м слое при $r = R_i$, разделенную на $2G_i$, к аналогичному значению той же функции на ($i + 1$)-м слое, разделенному на $2G_{i+1}$. Непрерывность напряжений $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{r\varphi}$ при $r = R_i$ приводит к аналогичной операции с функцией τ^*.

Сказанное справедливо при условии, что в упругой среде при $r = R_i$ ($i = 0, 1, \ldots, m$) нет дефекта (трещины или включения). Поскольку предполагается рассмотреть случай наличия дефекта, расположенного на сферической поверхности $r = R_i$ на участке $l_0(\omega_1 \leqslant \theta \leqslant \omega_2)$, то необходимо ввести такие скачки:

$$
\begin{gathered}
(2G_i)^{-1} z_n^*(R_i - 0, \theta) - (2G_{i+1})^{-1} z_n^*(R_i + 0, \theta) = \langle z_n^*(R_i, \theta)\rangle \\
\tau_n^*(R_i - 0, \theta) - \tau_n^*(R_i + 0, \theta) = \langle \tau_n^*(R_i, \theta)\rangle, \quad \theta \in l_0
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

и их трансформанты Лежандра:

$$
\int_{l_0} \sin t \left\| \begin{matrix} \langle z_n^*(R_i t)\rangle \\ \langle \tau_n^*(R_i, t)\rangle \end{matrix} \right\| P_k^{|n|}(\cos t)\,dt = \left\| \begin{matrix} {}_iz_{nk}^{*1} \\ {}_i\tau_{nk}^{*1} \end{matrix} \right\|, \quad i = 0,1,\ldots,m \tag{2.5}
$$

Условие непрерывности смещений и напряжений при $r = R_i$ ($i = 0, 1, ..., m$) при учете наличия скачков (2.4) и (2.5) запишем в виде

$$\frac{{}_iX_{nk}R_i^k}{2G_i} + \frac{{}_iY_{nk}R^{-k-1}}{2G_i} - \frac{{}_{i+1}X_{nk}}{2G_{i+1}} - \frac{{}_{i+1}Y_{nk}R_i^{-k-1}}{2G_{i+1}} = {}_i Z_{nk}^*$$

$${}_iX_{nk}(k-1)R_i^{k-1} - {}_i Y_{nk}(k+2)R_i^{-k-2} - {}_{i+1} X_{nk}(k-1)R_i^{k-1} +$$

$$+{}_{i+1}Y_{nk}(k+2)R_i^{-k-2} = 2{}_iT_{nk}^*, \quad (i = 0, 1, ..., m) \tag{2.6}$$

Здесь

$${}_iZ_{nk}^* = {}_i z_{nk}^{*1} + {}_{i+1} z_{nk}^{*0}(R_i)(2G_{i+1})^{-1} - {}_i z_{nk}^{*0}(R_i)(2G_i)^{-1}$$

$${}_iT_{nk}^* = {}_i \tau_{nk}^{*1} + {}_{i+1} \tau_{nk}^{*0}(R_i) - {}_i \tau_{nk}^{*0}(R_i)$$

Чтобы определить из уравнений (2.6) коэффициенты ${}_iX_{nk}$ и ${}_iY_{nk}$ введем векторы

$$\mathbf{x}_i = \begin{Vmatrix} {}_iX_{nk} \\ {}_iY_{nk} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = 2\begin{Vmatrix} {}_iZ_{nk}^* \\ {}_iT_{nk}^* \end{Vmatrix}, \quad i = 0, 1, \ldots, m+1 \tag{2.7}$$

что позволит уравнения (2.6) записать в таком виде:

$$a_i\mathbf{x}_i - b_i\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{x}_{i+1} = c_i\mathbf{x}_i - b_i^{-1}\mathbf{f}_i; \quad c_i = b_i^{-1}a_i \tag{2.8}$$

$$a_i = \begin{Vmatrix} R_i^kG_i^{-1} & R_i^{-k-1}G_i^{-1} \\ (k-1)R_i^{k-1} & -(k+2)R_i^{-k-2} \end{Vmatrix}, \quad b_i = \begin{Vmatrix} R_i^kG_{i+1}^{-1} & R_i^{-k-1}G_{i+1}^{-1} \\ (k-1)R_i^{k+1} & -(k+2)R_i^{-k-2} \end{Vmatrix}$$

С использованием представления (2.8) решение уравнений (2.6) удалось получить в таком виде

$$\mathbf{x}_j = C_{j-1}^{(0)}\mathbf{x}_0 - \sum_{l=0}^{j-1} C_{j-1}^{(l+1)}b_l^{-1}\mathbf{f}_l, \quad i = \overline{0, m} \tag{2.9}$$

Здесь

$$C_j^{(l)} = c_jc_{j-1}\ldots c_l, \quad l < j; \quad C_j^{(l)} = c_j, \quad l = j; \quad C_j^{(l)} = I, \quad l < j \tag{2.10}$$

где I – единичная (2×2)-матрица.

При этом согласно (2.3)

$$\mathbf{x}_0 = \begin{Vmatrix} {}_0X_{nk} \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{x}_{m+1} = \begin{Vmatrix} 0 \\ {}_{m+1}Y_{nk} \end{Vmatrix} \tag{2.11}$$

Чтобы найти значения этих векторов, положим в (2.8) $i = m$ и подставим выражение для $\mathbf{x}_m$, взятое из (2.9) при учете (2.11). В результате получим

$$B_m\begin{Vmatrix} {}_0X_{nk} \\ 0 \end{Vmatrix} - b_m\begin{Vmatrix} 0 \\ {}_{m+1}Y_{nk} \end{Vmatrix} = \mathbf{f}_m + \sum_{l=0}^{m-1} D_l^{(m)}\mathbf{f}_l \tag{2.12}$$

где

$$B_m = a_mC_{m-1}^0\begin{Vmatrix} B_{00}^{(m)} & B_{01}^{(m)} \\ B_{10}^{(m)} & B_{11}^{(m)} \end{Vmatrix}, \quad D_l^{(m)} = a_mC_{m-1}^{(l+1)}b_l^{-1} = \begin{Vmatrix} d_{00}^{l,m} & d_{01}^{l,m} \\ d_{10}^{l,m} & d_{11}^{l,m} \end{Vmatrix} \tag{2.13}$$

Решая систему (2.12), находим

$${}_0X_{nk} = \Delta_m^{-1}[b_{11}^{(m)}F_{nk}^0 - b_{01}^{(m)}F_{nk}^1]$$

$$ {}_{m+1}Y_{nk} = \Delta_m^{-1}[B_{10}^{(m)}F_{nk}^0 - B_{00}^{(m)}F_{nk}^1] \tag{2.14} $$

$$ \Delta m = b_{11}^{(m)}B_{00}^{(m)} - b_{01}^{(m)}B_{10}^{(m)} $$

При этом согласно (2.7), (2.8) и (2.12), (2.13) имеем

$$ b_{01}^{(m)} = R_m^{-k-1}G_{m+1}^{-1}, \qquad b_{11}^{(m)} = -(k+2)R_m^{-k-2} $$

$$ F_{nk}^0 = 2\left[mZ_{nk}^* + \sum_{l=0}^{m-1}({}_lZ_{nk}^* d_{00}^{l,m} + {}_lT_{nk}^* d_{01}^{l,m})\right] \tag{2.15} $$

$$ F_{nk}^1 = 2\left[mT_{nk}^* + \sum_{l=0}^{m-1}({}_lZ_{nk}^* d_{10}^{l,m} + {}_lT_{nk}^* d_{11}^{l,m})\right] $$

Формулы (2.9), (2.11) и (2.14) полностью определяют неизвестные коэффициенты, вошедшие в выражения для функции $z_{nk}^*(r)$ и $\tau_{nk}^*(r)$.

Применим изложенную схему для определения оставшихся коэффициентов ${}_iX_{nk}^{0,1}$ и ${}_iY_{nk}^{0,1}$ ($i = 0, 1, ..., m + 1$), для чего запишем условие непрерывности функций $u_{nk}(r)$, $z_{nk}(r)$ и $\sigma_{rnk}(r)$, $\tau_{nk}(r)$ на каждой сферической поверхности $r = R_i$ ($i = 0, 1, ..., m$) с учетом наличия дефекта, т.е. с подключением трансформант Лежандра ${}_iz_{nk}^1$, ${}_i\tau_{nk}^1$ скачков

$$ z_n(R_i-0,\theta)(2G_i)^{-1} - z_n(R_i+0,\theta)(2G_{i+1})^{-1} = \langle z_n(R_i,\theta)\rangle \tag{2.16} $$

$$ \tau_n(R_i-0,\theta) - \tau_n(R_i+0,\theta) = \langle \tau_n(R_i,\theta)\rangle, \qquad \theta\in l_0 $$

определяемых формулами, аналогичными (2.5).

Введя векторы

$$ {}_i\mathbf{X}_{nk},\ {}_i\mathbf{Y}_{nk},\ {}_i\mathbf{V}_{nk},\ {}_i\mathbf{S}_{nk} = \left\|\begin{matrix} {}_iX_{nk}^0 \\ {}_iX_{nk}^1 \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} {}_iY_{nk}^0 \\ {}_iY_{nk}^1 \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} {}_iU_{nk} \\ {}_iZ_{nk} \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} {}_i\Sigma_{nk} \\ {}_iT_{nk} \end{matrix}\right\| \tag{2.17} $$

$$ {}_iU_{nk} = {}_iu_{nk}^1 + {}_{i+1}u_{nk}^0(R_i)(2G_{i+1})^{-1} - {}_iu_{nk}^0(R_i)(2G_i)^{-1} $$

$$ {}_iZ_{nk} = {}_iz_{nk}^1 + {}_{i+1}z_{nk}^0(R_i)(2G_{i+1})^{-1} - {}_iZ_{nk}^0(R_i)(2G_i)^{-1} $$

$$ {}_i\Sigma_{nk} = {}_i\sigma_{rnk}^1 + {}_{i+1}\sigma_{rnk}^0(R_i) - {}_i\sigma_{rnk}^0(R_i) $$

$$ {}_iT_{nk} = {}_i\tau_{nk}^1 + {}_{i+1}\tau_{nk}^0(R_i) - {}_i\tau_{nk}^0(R_i) $$

запишем условия непрерывности смещений

$$ \alpha^{(i)}{}_i\mathbf{X}_{nk} - \alpha_*^{(i)}{}_{i+1}\mathbf{X}_{nk} + \beta^{(i)}{}_i\mathbf{Y}_{nk} - \beta_*^{(i)}{}_{i+1}\mathbf{Y}_{nk} = {}_i\mathbf{V}_{nk}, \qquad i = 0,1,\ldots,m $$

$$ \alpha^{(i)} = \frac{R_i^{k-1}}{2G_i}\left\|\begin{matrix} {}_i\mu_k^+R_i^2 & 1 \\ -{}_i\mu_{k+2}^-kR_i^2 & -k+1 \end{matrix}\right\|, \quad \alpha_*^{(i)} = \frac{R_i^{k-1}}{2G_{i+1}}\left\|\begin{matrix} {}_{i+1}\mu_k^+R_i^2 & 1 \\ -{}_{i+1}\mu_{k+2}^-R_i^2k & -k-1 \end{matrix}\right\| \tag{2.18} $$

$$ \beta^{(i)} = \frac{R_i^{-k-2}}{2G_i}\left\|\begin{matrix} {}_i\mu_k^-R_i^2 & -1 \\ {}_i\mu_{k-2}^+(k+1)R_i^2 & -k \end{matrix}\right\|, \quad \beta_*^{(i)} = \frac{R_i^{-k-2}}{2G_{i+1}}\left\|\begin{matrix} {}_{i+1}\mu_k^-R_i^2 & -1 \\ {}_{i+1}\mu_{k-2}^+(k+1)R_i^2 & -k \end{matrix}\right\| $$

и напряжений

$$ \gamma^{(i)}{}_i\mathbf{X}_{nk} - \gamma_*^{(i)}{}_{i+1}\mathbf{X}_{nk} + \delta^{(i)}{}_i\mathbf{Y}_{nk} - \delta_*^{(i)}{}_{i+1}\mathbf{Y}_{nk} = {}_i\mathbf{S}_{nk}, \qquad i = 0,1,\ldots,m $$

$$ \frac{\gamma^{(i)}}{R_i^{k-2}} = \left\|\begin{matrix} {}_i\mu_k^\sigma R_i^2 & k-1 \\ -{}_i\mu_{k+1}kR_i^2 & 1-k^2 \end{matrix}\right\|, \quad \frac{\gamma^{(i)}}{R_i^{k-2}} = \left\|\begin{matrix} {}_{i+1}\mu_k^\sigma R_i^2 & k-1 \\ -{}_{i+1}\mu_{k+1}^\tau R_i^2 & 1-k^2 \end{matrix}\right\| \tag{2.19} $$

$$-\frac{\delta^{(i)}}{R_i^{k-3}}=\begin{Vmatrix} {}_i\mu_{k+2}^{\sigma}R_i^2 & -k-2 \\ {}_i\mu_k^{\tau}(k+1)R_i^2 & -k(k+2)\end{Vmatrix}, \quad \frac{\delta^{(i)}}{R_i^{k-3}}=\begin{Vmatrix} {}_{i+1}\mu_{k+1}^{\sigma}R_i^2 & -k-2 \\ {}_{i+1}\mu_k^{\tau}(k+1)R_i^2 & -k(k+2)\end{Vmatrix}$$

Систему уравнений (2.18), (2.19) приведем к уже изученной (2.8), если введем четырехмерные векторы и соответствующие матрицы

$$\mathbf{x}_i=\begin{Vmatrix} {}_i\mathbf{X}_{nk} \\ {}_i\mathbf{Y}_{nk}\end{Vmatrix}, \quad \mathbf{f}_i=\begin{Vmatrix} {}_i\mathbf{V}_{nk} \\ {}_i\mathbf{S}_{nk}\end{Vmatrix}; \quad a_i=\begin{Vmatrix} \alpha^{(i)} & \beta^{(i)} \\ \gamma^{(i)} & \delta^{(i)}\end{Vmatrix}, \quad b_i=\begin{Vmatrix} \alpha_*^{(i)} & \beta_*^{(i)} \\ \gamma_*^{(i)} & \delta_*^{(i)}\end{Vmatrix} \tag{2.20}$$

Следовательно, решение системы (2.18) и (2.19) запишется в виде (2.9), но векторы и матрицы следует взять согласно (2.20). При этом сохраняют силу формулы (2.11), только вместо ${}_0X_{nk}$ и ${}_{m+1}Y_{nk}$ следует взять векторы ${}_0\mathbf{X}_{nk}$, ${}_{m+1}\mathbf{Y}_{nk}$. Можно убедиться, что для их определения справедливы формулы (2.14) со следующей корректировкой: ${}_0X_{nk}$ и ${}_{m+1}Y_{nk}$ следует заменить на $:\mathbf{X}_{nk}$ и ${}_{m+1}\mathbf{Y}_{nk}$, а $F_{nk}^0F_{nk}^1$ – соответственно на

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{nk}^0 &= {}_m\mathbf{V}_{nk}+\sum_{l=0}^{m-1}(d_{00}^{l,m}\,{}_l\mathbf{V}_{nk}+d_{01}^{l,m}\,{}_l\mathbf{S}_{nk}) \\ \mathbf{F}_{nk}^1 &= {}_m\mathbf{S}_{nk}+\sum_{l=0}^{m-1}(d_{10}^{l,m}\,{}_l\mathbf{V}_{nk}+d_{11}^{l,m}\,{}_l\mathbf{S}_{nk})\end{aligned} \tag{2.21}$$

причем в представлениях матриц (2.13) их компоненты $B_{jk}^{(m)}$ и $d_{jk}^{l,m}$ представляют собой матрицы-блоки размером 2×2 и, в частности, числа b_{11}^m и b_{01}^m должны быть заменены на матрицы $\delta_*^{(m)}$ и $\beta_*^{(m)}$ соответственно.

Кроме того, в формуле для ${}_{m+1}\mathbf{Y}_{nk}$ матрица Δ_m должна быть заменена на матрицу $\Delta m=B_{00}^{(m)}\delta_*^{(m)}-B_{10}^{(m)}\beta_*^{(m)}$. Таким образом, все коэффициенты ${}_iX_{nk}$, ${}_iY_{nk}$, ${}_iX_{nk}^{0,1}$, ${}_iY_{nk}^{0,1}$ найдены, а зная их, определим трансформанты (2.1), (2.2).

Решение поставленной задачи будет завершено, если будут найдены скачки (2.4) и (2.16). Для получения соответствующих уравнений необходимо подставить найденные коэффициенты в формулу (2.1) и в аналогичные формулы для (2.2) и обратить полученные трансформанты Лежандра. Последующее удовлетворение условиям на дефекте в трансформантах Фурье позволит получить интегральные и интегродифференциальные уравнения для определения указанных скачков.

Чтобы не затемнять существа дела громоздкими выкладками, эти операции проведем на частном случае разбираемой задачи.

3. Сведение задачи о концентрации напряженной возле трещины при действии центра кручения к интегральному уравнению. Будем считать, что описанная выше сферически слоистая среда подвергается действию центра кручения с моментом M в начале координат. В виду наличия осевой симметрии (независимость искомых и заданных функций от φ) во всех приведенных выше формулах следует положить $n = 0$. Поле напряжений и смещений будет определяться только функциями $\tau_{r\varphi}$, u_φ и соответственно согласно (1.1), (1.9) функциями

$$\begin{Vmatrix} \tau_0^*(r,\ \theta) \\ z_0^*(r,\ \theta)\end{Vmatrix}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\begin{Vmatrix} \tau_{r\theta}(r,\ \theta) \\ 2Gu_\varphi(r,\ \theta)\end{Vmatrix} \tag{3.1}$$

В случае указанного загружения в соотношениях (2.6), согласно (1.14), следует принять

$${}_0\tau_0^{*0}(r,\ \theta)=\frac{3M\cos\theta}{4\pi r^3}, \quad {}_0z_0^{*0}(r,\ \theta)=-\frac{M\cos\theta}{2\pi r^2}, \quad {}_i\tau_0^{*0}(r,\ \theta)={}_iz_0^{*0}(r,\ \theta)=0 \tag{3.2}$$

$i=1,\ 2,\ldots m$

и потому

$$ {}_0\tau^{*0}_{0k}(R_0)=\frac{M\delta_{k,1}}{2\pi R_0^3},\quad {}_0z^{*0}_{0k}(R_0)=-\frac{M\delta_{k,1}}{3\pi R_0^2},\quad {}_i\tau^{*0}_{0k}={}_iz^{*0}_{0k}=0\quad i=1,2,\ldots,\ m \tag{3.3}$$

Для решения поставленной задачи необходимо предварительно решить систему уравнений (2.6), пользуясь формулами (2.9) и (2.14). Для определенности ограничимся случаем двухслойной среды (m = 0) и пусть при $r = R_0$ имеется межфазная трещина, т.е. в (2.4) и (2.5) $l_0 = [0, \omega]$.

Если считать, что берега трещины не загружены, то $\left\langle\tau_0^*(R_0,\theta)\right\rangle=0,\ {}_0\tau^{*1}_{0k}=0,$ и потому согласно (2.6) и (2.15)

$$ F^0_{0k}=2[{}_0z^{*1}_{0k}-(2G_0)^{-1}{}_0z^{*0}_{0k}(R_0)],\quad F^1_{0k}=-{}_0\tau^{*0}_{0k}(R_0)2 \tag{3.4}$$

Кроме того, согласно (2.10) $\overset{0}{C}_{-1} = I$, и потому $B_0 = a_0$.

В данном случае из всех коэффициентов в уравнениях (2.6) следует найти только ${}_0X_{0k}$ и ${}_1Y_{0k}$. Их найдем, пользуясь формулами (2.14) при учете (3.4) и (3.3). Получим

$$ {}_0X_{0k}=\frac{2(k+2)G_0\ {}_0z^{*1}_{0k}+g^0_k}{R_0^k\gamma_k},\quad {}_1Y_{0k}=-\frac{2(k-1)G_0\ {}_0z^{*1}_{0k}+g^1_k}{R_0^{-k-1}\gamma_k} \tag{3.5}$$

$$ [q^0_k,\ q^1_k]=\frac{M\delta_{k1}}{3\pi R_0^2}[k+2-3\gamma,\ k+2],\quad \gamma_k=2-\gamma+(1+\gamma)k,\quad \gamma=\frac{G_0}{G_1}$$

Подставив эти выражения в соответствующие формулы для ${}_iz^*_{0k}(r)$ и ${}_i\tau^*_{0k}(r)$ из (2.2) при i = 0 и i = 1 (n = 0) при учете (2.3) найдем трансформанты Лежандра функций $z_0^*(r,\theta)$ и $\tau_0^*(r,\ \theta)$ при $0<r<R_0$ (i = 0) и $R_0<r<\infty$ (i = 1). Последующее обращение с помощью соответствующей формулы из (1.4) при n = 0 позволит найти значения указанных функций.

Например, для $\tau_0^*(r,\ \theta)$ при $0 < r < R_0$ будем иметь (при учете (3.2))

$$ r\tau_0^*(r,\ \theta)=G_0\int\limits_0^\omega\left\langle z_0^*(R_0,\ t)\right\rangle\sin t\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{r}{R_0}\right)^k\frac{(k-1)(k+2)P_k(\cos\theta)P_k(\cos t)}{2\gamma_k(2k+1)^{-1}}dt+$$

$$ +2M(4\pi r^2)^{-1}\cos\theta^0 \tag{3.6}$$

Чтобы получить уравнение для определения скачка

$$ \left\langle z_0^*(R_0t)\right\rangle=\frac{2G_0}{\sin t}\frac{\partial}{\partial t}\sin t\left\langle u_\varphi(R_0t)\right\rangle=\chi(t) \tag{3.7}$$

(первое равенство вытекает из (3.1)) следует реализовать условие на дефекте (в данном случае трещине): равенство нулю напряжения $\tau_{r\varphi}(r,\theta)$ на берегах трещины $r = R_0 - 0$ и $r = R_0 + 0$, что приводит к необходимости сделать то же самое для $\overset{*}{\tau}_0(r,\theta)$. Поскольку условие $\langle\overset{*}{\tau}_0(R_0,\theta)\rangle\equiv 0$ уже использовано при получении (3.5), то достаточно реализовать условие

$$ \overset{*}{\tau}_0(R_0^{-1},\theta)=0,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\omega \tag{3.8}$$

Подставив (3.6) в (3.8), получим требуемое уравнение для определения искомого скачка (3.7). Чтобы привести его к более простому виду, следует учесть, что

$$ (k+2)(k-1)=k(k+1)-2,\quad \nabla_0P_k(\cos\theta)=k(k+1)P_k(\cos\theta)$$

Это позволяет полученное уравнение записать в виде

$$(\nabla_0 - 2)Y_0^*(\theta) = -A\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \omega; \quad A = 3M(4\pi R_0^2 G_0)^{-1} \tag{3.9}$$

$$Y_0^*(\theta) = \int_0^\omega \chi(t)\sin t S_0^*(\theta,\ t)dt, \quad S_0^*(\theta,\ t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{2k+1}{\gamma_k} P_k(\cos\theta)P_k(\cos t)$$

Чтобы преобразовать полученное интегродифференциальное уравнение в интегральное, выполним такие операции. Приняв во внимание, что

$$(\nabla_0 - 2)y(\theta) \equiv -ly(\theta), \quad ly(\theta) = y''(\theta) + \operatorname{ctg}\theta y'(\theta) - 2y(\theta) \tag{3.10}$$

и $lP_1(\cos\theta) = lQ_1(\cos\theta) = 0$ ($Q(z)$ – функция Лежандра второго рода), общее регулярное в нуле решение дифференциального уравнения, соответствующего (3.9), (3.10), запишем в виде

$$Y_0^*(\theta) = A\int_0^\theta \cos tK(\theta,\ t)dt + \frac{C_1}{3\sqrt{\pi}}P_1(\cos\theta) \equiv f^*(\theta) \tag{3.11}$$

где C_1 – произвольная постоянная, причем его фундаментальная функция (решение) имеет вид

$$\sqrt{\pi}K(\theta,\ t) = 2\sin t[P_1(\cos\theta)Q_1(\cos t) - P_1(\cos t)Q_1(\cos\theta)]$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \quad Q_1(\cos\theta) = \cos\theta \ln \operatorname{ctg} {}^1\!/\!_2\theta - 1$$

Таким образом, интегральное уравнение рассматриваемой задачи окончательно запишется в виде

$$\int_0^\omega \chi(t)\sin t\, S_0^*(\theta,\ t)dt = f^*(\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \omega \tag{3.12}$$

$$3\sqrt{\pi}f^*(t) = (C_1 + 2A)\cos\theta - 2A(1 - 2\cos\theta \ln\cos {}^1\!/\!_2\theta)$$

(выражение для правой части получается после вычисления интегралов в (3.11)). Содержащаяся здесь произвольная постоянная C_1 найдется из условия замкнутости трещины, которое в виду (3.7) можно записать так:

$$\int_0^\omega \sin\theta\chi(\theta)d\theta = 2G[\sin\theta\langle u_\varphi(R_0\theta)\rangle]_0^\omega = 0 \tag{3.13}$$

4. Метод решения полученного интегрального уравнения. В первую очередь выделим из ядра (3.9) интегрального уравнения (3.12) нерегулярную (слабополярную) часть. С этой целью воспользуемся легко проверяемым соотношением

$$S_0^*(\theta,\ t) = 2(\gamma+1)^{-1}[S_0(\theta,\ t) + {}^3\!/\!_2(\gamma - 1)S_0^1(\theta,\ t)]$$

где

$$S_0(\theta,\ t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^\infty P_k(\cos\theta)P_k(\cos t), \quad S_0^1(\theta,\ t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{P_k(\cos\theta)P_k(\cos t)}{2\gamma_k} \tag{4.1}$$

Первый из этих рядов (слабополярная часть ядра) суммируется [6] к разрывному интегралу Вебера–Сонина, т.е.

$$S_0(\theta,\ t) = \frac{W_0(\operatorname{tg} {}^1\!/\!_2\theta,\ \operatorname{tg} {}^1\!/\!_2 t)}{2\cos {}^1\!/\!_2\theta \cos {}^1\!/\!_2 t}, \quad W_0(x,\ y) = \int_0^\infty J_0(tx)J_0(ty)dt \tag{4.2}$$

Однако и второй ряд из (4.1) не будет непрерывной функцией. Чтобы убедиться в этом и выделить разрывную часть, примем во внимание известное соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{2k(k+1)}P_k(\cos\theta)P_k(\cos t)=-\frac{1}{2}-\ln\sin\frac{\theta}{2}-\ln\cos\frac{t}{2}$$

Тогда, если учесть непосредственно проверяемые равенства

$$\frac{1}{\gamma_k}=\frac{1}{(\gamma+1)(k+\beta)},\quad \beta=\frac{2-\gamma}{1+\gamma},\quad \frac{1}{k+\beta}-\frac{2k+1}{2k(k+1)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2(k+1)}-\frac{\beta}{k+\beta}\right)$$

можно убедиться, что

$$S_0^1(\theta,\ t)=\frac{1}{2(\gamma+1)}\left[\frac{1+2\gamma}{2(2-\gamma)}-\ln\sin\frac{\theta}{2}+R_0(\theta,\ t)\right] \tag{4.3}$$

$$R_0(\theta,\ t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta_k}{k}P_k(\cos\theta)P_k(\cos t),\quad \beta_k=\frac{1}{2k+1}-\frac{\beta}{k+\beta}$$

Последняя функция уже будет непрерывной.

Учитывая (4.1), (4.3) и условие замкнутости трещины (3.13), интегральное уравнение (3.12) можем записать в виде

$$L\chi\equiv\int_0^{\omega}[S_0(\theta,\ t)+\lambda R_0(\theta,\ t)]\sin t\,\chi(t)dt=\sum_{i=0}^{1}C_1^*P_i(\cos\theta)-$$

$$-g_2(\theta),\ 0\leqslant\theta\leqslant\omega;\quad 4\lambda=3(\gamma-1)(\gamma+1)^{-1} \tag{4.4}$$

$$g_2(\theta)=\frac{A(\gamma+1)}{3\sqrt{\pi}}\left(1+2\cos\theta\ln\cos\frac{\theta}{2}\right),\quad C_0^*=\lambda\int_0^{\omega}\sin t\,\chi(t)\ln\cos\frac{t}{2}$$

причем C_1^* – новая произвольная постоянная, связанная с C_1.

Согласно структуре правой части, решение уравнения (4.4) следует строить в виде ряда

$$\chi(\theta)=\sum_{i=0}^{1}C_i^*\chi_i(\theta)-\chi_2(\theta) \tag{4.5}$$

каждое слагаемое которого удовлетворяет одному из уравнений

$$L\chi_i(\theta)=g_i(\theta),\ 0\leqslant\theta\leqslant\omega,\ i=0,\ 1,\ 2;\quad g_i(\theta)=P_i(\theta),\ i=0,\ 1 \tag{4.6}$$

Если эти уравнения будут решены, то постоянные C_0^* и C_1^* найдутся в результате реализаций условия (3.13) и последнего равенства из (4.4).

Чтобы свести уравнение (4.6) к известному, сделаем замены

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=ax,\quad \operatorname{tg}\frac{t}{2}=ay,\quad a=\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \tag{4.7}$$

$$X_i(y)=\frac{2a\chi(2\operatorname{arctg}ay)}{[1+(ay)^2]^{3/2}},\quad F_i(x)=\frac{q_i(2\operatorname{arctg}ax)}{[1+(ax)^2]^{1/2}}$$

Тогда вместо (4.6) будем иметь

$$\int_0^1[W_0(x,\ y)+\lambda D_0(x,\ y)]yX_i(y)dy=F_i(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{4.8}$$

$$D_0(x,\ y)=\left[2a\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{t}{2}R_0(\theta,\ t)\right]_{\theta=2\operatorname{arctg}ax,t=2\operatorname{arctg}ay}$$

Интегральное уравнение (4.8) уже встречалось в контактных задачах [8]. Для его приближенного решения удобным оказывается метод ортогональных многочленов [8] ввиду наличия спектрального соотношения А5.2 из [8], в соответствии с которым решение уравнения (4.8) строится в виде ($P_k^{\alpha,\beta}(z)$ – многочлен Якоби)

$$X_i(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X_k^i P_k^{0-1/2}(1-2y^2)}{\sqrt{1-y^2}},\quad P_k^{0,-1/2}(1-2y^2)=P_{2k}(\sqrt{1-y^2})$$

Последующая реализация схемы метода ортогональных многочленов [7] применительно к этому уравнению сводит его к бесконечной системе

$$Y_j^{(i)}+\lambda\sum_{k=0}^{\infty}d_{jk}Y_k^{(i)}=F_j^{(i)},\quad i=0,\ 1,\ 2;\ Y_j^{(i)}=\nu_j X_j^{(i)},\quad \nu_j=\frac{\Gamma(j+1/2)}{j\sqrt{2(2j+1)}} \tag{4.9}$$

$$F_j^{(i)}=\int_0^{\omega}\frac{\operatorname{tg}1/2\theta g_i(\theta)Q_j^*(\theta)}{2\nu_j a^2\cos 1/2\theta}d\theta,\quad Q_j^*(\theta)=\frac{P_{2j}(\sqrt{1-a^{-2}(\operatorname{tg}1/2\theta)^2})}{\sqrt{1-a^{-2}(\operatorname{tg}1/2\theta)^2}}$$

$$d_{jk}=\iint_0^{\omega}\frac{R_0(\theta,\ t)\operatorname{tg}1/2\theta\operatorname{tg}1/2tQ_j^*(\theta)Q_k^*(t)}{2\nu_j\nu_k a^3\cos 1/2\theta\cos 1/2t}d\theta dt$$

Полученную бесконечную систему следует решать приближенно методом редукции; сходимость этого метода можно обосновать, используя схему, изложенную ранее [8].

Если бесконечные системы (4.9) при i = 0, 1, 2 решены и найдены постоянные C_0^*, C_1^* из указанных выше условий, то решение разбираемого уравнения найдем по формуле (4.5) или, согласно (4.7) и (4.9), по формуле

$$X(x)=\frac{2a\chi(2\operatorname{arctg}ax)}{[1+(ax)^2]^{3/2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X_kP_k^{0-1/2}(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.10}$$

$$X_k=C_0^*X_k^0+C_1^*X_k^{(1)}-X_k^{(2)}$$

5. Вычисление коэффициента интенсивности напряжений. Для разбираемой задачи коэффициент интенсивности напряжений будет определяться формулой

$$K_{\mathrm{III}}=\lim_{\theta\to\omega+0}\tau_{r\varphi}(R_0\theta)\sqrt{2\pi R_0(\theta-\omega)} \tag{5.1}$$

Учитывая связь (3.1), получаем

$$\tau_{r\varphi}(R_0,\ \theta)=\frac{1}{\sin\theta}\int_0^{\theta}\sin t\tau_0^*(R_0,\ t)dt \tag{5.2}$$

Из (3.6) с учетом (3.7) и (3.9), находим

$$R_0\tau_0^*(R_0-0,\theta)=G_0[(\nabla_0-2)Y_0^*(\theta)+A\cos\theta],\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{5.3}$$

Ввиду того, что

$$\frac{1}{\sin\theta}\int_0^{\theta}\sin t\nabla_0Y_0^*(t)dt=\frac{dY_0^*(\theta)}{d\theta}$$

формулу (5.1) на основании (5.2) можем записать в виде

$$K_{\mathrm{III}} = -\sqrt{\frac{2\pi}{R_0}} G_0 \lim_{\theta \to \omega + 0} \sqrt{\theta - \omega} \frac{d}{d\theta} Y_0^*(\theta) \tag{5.4}$$

При полученнии этой формулы учтено, что все функции, входящие слагаемыми в формулу для $\tau_{r\varphi}(R_0, \theta)$, имеющие конечный предел при $\theta \to \omega + 0$, отбрасывались. На том же основании в силу (3.9), (4.1) и (4.3) вместо (5.4) можем записать

$$K_{\mathrm{III}} = -\sqrt{\frac{2\pi}{R_0}} \lim_{\theta \to \omega + 0} \frac{2\sqrt{\theta - \omega}}{\gamma + 1} Y_0'(\theta), \quad Y_0(\theta) = \int_0^{\omega} \chi(t) \sin t S_0(\theta,\ t) dt \tag{5.5}$$

Если в последнем интеграле учесть (4.2) и провести замены (4.7), то получим соотношение

$$Y_0(\theta) = Y_0(2 \operatorname{arctg} ax) = \frac{\tilde{Y}_0(x)}{[1 + (ax)^2]^{-1/2}}, \quad \tilde{Y}_0(x) = \int_0^1 W_0(x, y) X(y) y dy \tag{5.6}$$

Отсюда следует

$$2aY_0'(\theta) = [1 + (ax)^2]^{3/2} \tilde{Y}_0'(x) + ax\sqrt{1 + (ax)^2}\, \tilde{Y}_0(x)$$

и потому

$$K_{\mathrm{III}} = -\sqrt{\frac{8\pi}{R_0}} \frac{\sec \frac{1}{2}\omega}{\sin \omega} \frac{\tilde{A} N}{1 + \gamma}, \quad N = \lim_{x \to 1+0} \sqrt{x^2 - 1}\, \tilde{Y}_0'(x) \tag{5.7}$$

$$\tilde{A} = \lim_{x \to 1+0} \sqrt{\frac{2 \operatorname{arctg} ax - 2 \operatorname{arctg} a}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{\sin \omega}{2}}$$

Чтобы осуществить предельный переход для N, следует принять во внимание (5.6) и (4.10), что позволит записать

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \lim_{x \to 1+0} \frac{\Lambda_k'(x)}{(x^2 - 1)^{-1/2}}, \quad \Lambda_k(x) = \int_0^1 \frac{W_0(x, y) P_{2k}(\sqrt{1 - y^2}) dy}{y^{-1} \sqrt{1 - y^2}} =$$

$$= \Gamma(\tfrac{1}{2} + k)[2\Gamma(\tfrac{3}{2} + 2k) k!]^{-1} x^{-2k-1} F(\tfrac{1}{2} + k, \tfrac{1}{2} + k; \tfrac{3}{2} + 2k; x^{-2}), \quad x > 1 \tag{5.8}$$

Выражение последнего интеграла через гипергеометрическую функцию взято из [8]. Выполнив дифференцирование по известным правилам дифференцирования гипергеометрических функций и продолжив аналитически полученный результат в окрестность единицы, пользуясь формулой 9.131 2 из [9], найдем

$$\lim_{x \to 1+0} \sqrt{x^2 - 1}\, \Lambda_k'(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{k! \Gamma(\frac{1}{2} + k)} \tag{5.9}$$

Учитывая (5.7), (5.8) и (5.9), окончательно находим

$$K_{\mathrm{III}} = \frac{2\pi}{1 + \gamma} \frac{\sec \frac{1}{2}\omega}{\sqrt{R_0} \sin \omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k}{\Gamma(\frac{1}{2} + k) k!}$$

Если слоистость исчезает, т.е. $G_0 = G_1, \gamma = 1, \lambda = 0,$ то интегральное уравнение (4.8) допускает точное решение, как было показано ранее [5]. В этом случае бесконечные системы вырождаются в явные формулы $Y_k^{(i)} = F_j^{(i)} (i = 0,\ 1,\ 2;\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$.

6. Заключение. Предложенный метод изложен применительно к случаю, когда дефекты расположены на сферических поверхностях смены упругих постоянных (межфазные дефекты). Чтобы охватить случай не межфазного дефекта, имеется два пути: 1) ввести дополнительно два сферических слоя с одинаковыми упругими постоянными, на смежной границе которых расположен указанный дефект, 2) вместе со слагаемым, учитывающим действие объемных сил, приложенных к сферическому слою, где располагается рассматриваемый дефект, ввести разрывное решение уравнений Ламе для этого дефекта. Второй путь имеет то преимущество, что позволяет охватить случай не межфазного дефекта произвольного очертания.

Метод достаточно просто обобщается и на случай ограниченной сферически слоистой среды. Опишем дополнительные операции, которые следует для этого провести.

Пусть рассматриваемая сферически слоистая среда заполняет область $R_0 \leqslant r \leqslant R_m$. Пусть на границе $r = R_0$ заданы смещения и, следовательно, заданы их трансформанты Фурье–Лежандра. Обозначим указанную трансформанту функции $z^*(r, \theta, \varphi)$ через A_{nk}. Тогда вместо условия непрерывности смещений и напряжений в (2.6) при $r = R_0$ следует записать граничное условие

$$z_{nk}^*(R_0) = {}_1X_{nk}R_0^k + {}_1Y_{nk}R_0^{-k-1} + {}_1z_{nk}^{*0}(R_0) = A_{nk} \tag{6.1}$$

Из этого равенства найдем ${}_1Y_{nk}$ и согласно (2.7) можем записать

$$\mathbf{x}_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ -R_0^{2k+1} \end{matrix} \right\| {}_1X_{nk} + R_0^{k+1} \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| [A_{nk} - {}_1z_{nk}^{*0}(R_0)] \tag{6.2}$$

Для остальных искомых векторов справедлива формула

$$\mathbf{x}_j = C_{j-1}^{(1)}\mathbf{x}_1 + \sum_{l=1}^{j-1} C_{j-1}^{(l+1)} b_l^{-1}\mathbf{f}_l, \quad j = 1,\ 2, \ldots, m-1 \tag{6.3}$$

полученная точно так же, как и (2.9).

Если считать, что на другой границе $r = R_m$ упругой среды заданы напряжения, а значит, и их трансформанты Фурье–Лежандра, в том числе и трансформанты $\tau_{nk}(r)$ и $\overset{*}{\tau}_{nk}(r)$, то выполняются аналогичные операции. Пусть, например, задано последнее, т.е. $\overset{*}{\tau}_{nk}(R_m) = B_{nk}$. Тогда вместо условия непрерывности смещений и напряжений при $r = R_m$ в (2.6) следует выполнять граничное условие

$$2\tau_{nk}^*(R_m) = {}_mX_{nk}(k-1)R_m^{k-1} - {}_mY_{nk}(k+2)R_m^{-k-2} + {}_m\tau_{nk}^{*0}(R_m)2 = 2B_{nk}$$

На основании его подобно (6.2) будем иметь

$$\mathbf{x}_m = \left\| \begin{matrix} R_m^{2k+1}(k+2)(k-1)^{-1} \\ 1 \end{matrix} \right\| {}_mY_{nk} - \frac{2}{(k-1)R_m^{k-1}} \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| [B_{nk} - {}_m\tau_{nk}^{*0}(R_m)] \tag{6.4}$$

Остается найти только ${}_1X_{nk}$ и ${}_mY_{nk}$. Это делается с помощью тех же операций, что и для нахождения ${}_0X_{nk}$ и ${}_0Y_{nk}$ из системы уравнений (2.6), т.е. в уравнении (2.8) полагаем $i = m - 1$ и подставляем туда (6.4), а выражение для $\mathbf{x}_{m-1}$ берем по формуле (6.3). В результате получаем два алгебраических уравнения для отыскания ${}_1X_{nk}$ и ${}_m\mathrm{Y}_{nk}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартыненко М.А.* Осесимметричная задача для упругой среды со сферическим включением, ослабленной трещиной на межфазовой границе // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 7. С. 39–44.
2. *Смирнов С.А.* Напряженное состояние двухслойной толстостенной сферической оболочки с разрезами // Докл. АН УССР. Сер. А. 1991. № 9. С. 97–101.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1935. 674 с.
4. *Lame G.* Lecons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris: Mallet–Bechelier, 1859. 368 p.
5. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упрости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.
6. *Попов Г.Я.* Неосесимметричная задача о концентрации напряжений в неограниченной упругой среде возле сферического разреза // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 770–779.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.М.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
8. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Одесса

Поступила в редакцию
10.II.1997