

УДК 539.3

© 1998 г. О.Д. Пряхина, А.В. Смирнова, О.М. Тукодова

МЕТОД ФИКТИВНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Метод фиктивного поглощения [1] развивается для решения интегральных уравнений типа свертки, заданных на системе отрезков и порождаемых динамическими задачами о возбуждении пьезокристаллической среды системой полосовых электродов. По сравнению с другими подходами метод позволяет строить решения с высокой точностью одновременно во всей области задания интегральных уравнений, включая границу, и применим для любых частот.

Динамические задачи расчета многоэлектродных структур методом интегральных преобразований [1,2] сводятся к интегральным уравнениям типа свертки

$$\sum_{r=1}^N Kq_r(x) = f_m, \quad x \in \Omega_m, \quad \Omega_m = [a_{2m-1}, a_{2m}] \quad (1)$$

$$Kq_r(x) = \int_{a_{2r-1}}^{a_{2r}} k(x-\xi)q_r(\xi)d\xi, \quad k(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int K(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено противное, индекс m принимает значения $1, 2, \dots, N$ (N – количество электродов на поверхности пьезокристаллической среды).

Функции q_m, f_m имеют носители на интервале Ω_m . Контур σ расположен в соответствии с правилами, обеспечивающими выполнение условий излучения на бесконечности [3]. Считая систему (1) однозначно разрешимой в $L_p, p > 1$ при любой дважды непрерывно-дифференцируемой функции f_m [2,4], предположим, что функция $K(\alpha)$ обладает следующими свойствами, присущими широкому классу динамических смешанных задач теории упругости:

- 1) это четная функция параметра α , мероморфная в комплексной плоскости;
- 2) на вещественной оси может иметь конечное число вещественных нулей, полюсов z_k, p_k ($k = 1, 2, \dots, N_0$) и счетное множество комплексных z_k, p_k ($k = N_0 + 1, \dots, \infty$) с точкой сгущения в секторах малых углов, содержащих мнимую ось;

$$3) K(\alpha) = c |\alpha|^{-1} [1 + O(\alpha^{-1})], |\alpha| \rightarrow \infty.$$

Не нарушая общности, построим решения $q_m(x)$ уравнений (1) с правой частью $f_m = A_m e^{-i\eta x}$ ($A_m, \eta = \text{const}$), считая, что постоянная c , характеризующая поведение K на бесконечности, равна единице.

В соответствии с методом фиктивного поглощения функция $K(\alpha)$ представляется в виде произведения $K(\alpha) = S(\alpha)\Pi(\alpha)$.

Выберем в качестве $S(\alpha)$ функцию $S(\alpha) = (\alpha^2 + B^2)^{-1/2}, B > 0$.

Очевидно, что $S(\alpha)$ – регулярная функция на вещественной оси, а ее асимптотическое поведение совпадает с поведением $K(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Функция $\Pi(\alpha) = S^{-1}(\alpha)K(\alpha)$ приближается рациональной функцией вида

$$\Pi(\alpha) = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha^2 - z_k^2}{\alpha^2 - p_k^2}, \quad \Pi(\alpha) = 1 + O(\alpha^{-1}), \quad |\alpha| \rightarrow \infty \quad (2)$$

с помощью полиномов Бернштейна или Лагранжа, как это детально описано ранее [3]; $s = n - N_0$ – степень аппроксимирующего полинома. Число нулей, полюсов функции $\Pi(\alpha)$ зависит от желаемой точности построения приближенного решения, при этом первые N_0 нулей, полюсов функции $\Pi(\alpha)$ совпадают с особыми точками $K(\alpha)$ на вещественной оси. Использование этой аппроксимации обосновано ранее [1,3].

В соответствии с методом фиктивного поглощения [1] решение ищем в виде (всюду далее $j = 1, 2, \dots, n$).

$$q_m(x) = q_m^0(x) + \varphi_m(x), \quad \varphi_m(x) = \sum_{k=1}^{2n} c_{km} \delta(x - x_{km}) \quad (3)$$

с соблюдением условий

$$\int_{a_{2m-1}}^{a_{2m}} q_m(x) e^{\pm ip_j x} dx = \sum_{k=1}^{2n} c_{km} e^{\pm ip_j x_{km}} \quad (4)$$

p_j – полюсы функции $\Pi(\alpha)$, расположенные выше контура σ , c_{km} – неизвестные постоянные, подлежащие определению, x_{km} – точки, делящие интервалы Ω_m на равные отрезки:

$$x_{km} = a_{2m-1} + k(a_{2m} - a_{2m-1}) / (2n + 1)$$

Лемма [1]. Пусть функции $q_m^0(x) \in L_p(a_{2m-1}, a_{2m})$, $p > 1$ и имеют носители на интервале Ω_m . Для того чтобы такими же свойствами обладали и функции

$$t_m(x) = \int_{\sigma} \Pi(\alpha) Q_m^0(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

необходимо и достаточно, чтобы функции

$$Q_m^0(\alpha) = \int_{-a}^a q_m^0(x) e^{i\alpha x} dx$$

удовлетворяли условиям $Q_m^0(\pm p_j) = 0$ на полярном множестве $\Pi(\alpha)$.

Функции $q_m^0(x)$ в силу (4) удовлетворяют условиям леммы, на основании которой вводим новые неизвестные $t_m(x)$ соотношениями

$$t_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} T_m(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad T_m(\alpha) = \Pi(\alpha) Q_m^0(\alpha) \quad (5)$$

Внося выражение (3) в уравнения (1) и учитывая соотношения (5), приходим к системе интегральных уравнений с регулярным ядром относительно $t_m(x)$

$$\sum_{r=1}^N S t_r(x) = g_m(x), \quad x \in \Omega_m; \quad g_m = f_m - \sum_{k=1}^{2n} \sum_{r=1}^N c_{kr} k(x - x_{kr}) \quad (6)$$

$$S t_m = \int_{a_{2m-1}}^{a_{2m}} s(x - \xi) t_m(\xi) d\xi, \quad s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Теорема. Пусть $t_m^{\eta}(x)$ – решения уравнений

$$S t_m^{\eta}(x) = e^{-i\eta x}, \quad x \in \Omega_m \quad (7)$$

Тогда интегральное представление решения системы интегральных уравнений (1) для $f_m = A_m e^{-i\eta x}$ дается соотношениями

$$q_m(x, \eta) = A_m t_m^\eta(x) + \frac{A_m}{2\pi_\sigma} \int [\Pi^{-1}(\alpha) - 1] T_m^\eta(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{r=1}^N c_{kr} \left\{ \int_\sigma \Pi^{-1}(\alpha) L_m(\alpha, x_{kr}) e^{-i\alpha x} d\alpha + \right. \\ \left. + \int_\sigma [\Pi^{-1}(\alpha) - 1] e^{-i\alpha(x-x_{kr})} d\alpha \right\}, \quad x \in \Omega_m \quad (8)$$

причем постоянные c_{kr} определяются из системы

$$\sum_{k=1}^{2n} \sum_{r=1}^N c_{kr} [e^{\pm iz_j x_{kr}} + L_m(\pm z_j, x_{kr})] = A_m T_m^\eta(\pm z_j) \quad (9)$$

z_j — нули $\Pi(\alpha)$, лежащие выше контура σ , функции L_m имеют вид

$$L_m(\alpha, x) = \frac{1}{2\pi_\sigma} \int S(\eta) [\Pi(\eta) - 1] T_m^\eta(\alpha) e^{i\eta x} d\eta \quad (10)$$

Доказательство. Домножим обе части равенства (7) на $S(\eta) [\Pi(\eta) - 1] e^{i\eta x_{kr}}$ и проинтегрируем по параметру η . Тогда решение $t_m^1(x)$ системы уравнений (6) с правой частью $k_1(x - x_{kr})$ ($k_1(x) = k(x) - s(x)$) имеет вид

$$t_m^1(x) = \int_\sigma S(\eta) [\Pi(\eta) - 1] t_m^\eta(x) e^{i\eta x_{kr}} d\eta$$

Используя принцип суперпозиции, а также то, что вкладом слагаемых типа $St_m(x)$ при $x \notin \Omega_m$ можно пренебречь по сравнению с $St_m(x)$ при $x \in \Omega_m$ [3], получаем общее решение системы (6) в следующей форме:

$$t_m(x) = A_m t_m^\eta(x) - \varphi_m(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{r=1}^N c_{kr} \int_\sigma L_m(\alpha, x_{kr}) e^{-i\alpha x} d\alpha - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ r \neq m}}^{2n} \sum_{r=1}^N c_{kr} \int_\sigma L_m^0(\alpha, x_{kr}) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (11)$$

Трансформанта Фурье этого решения имеет вид

$$T_m(\alpha) = A_m T_m^\eta(\alpha) - \sum_{k=1}^{2n} \left\{ c_{km} e^{i\alpha x_{km}} + \sum_{r=1}^N c_{kr} L_m(\alpha, x_{kr}) + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^N c_{kr} L_m^0(\alpha, x_{kr}) \right\}, \quad L_m^0(\alpha, x) = \frac{1}{2\pi_\sigma} \int S(\eta) T_m^\eta(\alpha) e^{i\eta x} d\eta \quad (12)$$

Функции $L_m(\alpha, x)$ даются соотношениями (10).

Из условия (5) находим

$$q_m^0(x) = t_m(x) + \frac{1}{2\pi_\sigma} \int [\Pi(\alpha)^{-1} - 1] T_m(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (13)$$

Внося выражения (11), (12) в последнее равенство и учитывая формулы (3), (13), получаем интегральное представление решения системы (1) в виде (8).

Поскольку $q_m^0(x) \in L_p(\Omega)$, $p > 1$ ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_N$) и имеют носители в Ω_m , то $T_m(\pm z_j) = 0$.

Таким образом, согласно (12) получаем линейную алгебраическую систему (9) порядка $2nN$ для определения $2nN$ неизвестных c_{km} . Теорема доказана.

Решения $t_m^\eta(x)$ и соответствующие им преобразования Фурье $T_m^\eta(\alpha)$ строятся методом факторизации [3] для правых частей $f_m = A_m e^{-i\eta x}$ и здесь не приводятся.

Интегралы $L_m(\alpha, x)$, $L_m^0(\alpha, x)$ в (10), (12) вычисляются по вычетам после подстановки в них выражения для $T_m^\eta(\alpha)$ с учетом убывания подынтегральных функций в нижней полуплоскости.

Внося найденные выражения $L_m(\alpha, x)$, $T_m^\eta(\alpha)$, $t_m^\eta(x)$ в интегральное представление решения (8) и проведя соответствующие преобразования, получаем приближенное решение системы (1) в виде

$$\begin{aligned}
 q_m(x, \eta) = & A_m \{u_m^\eta + K^{-1}(\eta) e^{-i\eta x} [v_m^\eta(x) - 1] + \\
 & + \sum_{r=1}^n \frac{\beta_r}{2z_r} [e^{-i\eta a_{2m}} \sqrt{B - i\eta} \Phi_r(\eta, a_{2m} - x) + e^{-i\eta a_{2m-1}} \sqrt{B - i\eta} \Phi_r(-\eta, x - a_{2m-1})]\} - \\
 & - i \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{2n} c_{kj} \left[\frac{e^{-B(a_{2m} - x)}}{\sqrt{\pi(a_{2m} - x)}} P_s(a_{2m} - x_{kj}) + \frac{e^{-B(x - a_{2m-1})}}{\sqrt{\pi(x - a_{2m-1})}} P_t(x_{kj} - a_{2m-1}) + \right. \\
 & \left. + \Psi_s(a_{2m} - x_{kj}, a_{2m} - x) + \Psi_t(x_{kj} - a_{2m-1}, x - a_{2m-1}) \right], \quad x \in \Omega_m
 \end{aligned} \tag{14}$$

Неизвестные c_{kj} находятся из линейной алгебраической системы порядка $2nN$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^N c_{kj} [\sqrt{B + i\alpha} e^{i\alpha a_{2m}} F_s(\alpha, a_{2m} - x_{kj}) + \\
 + \sqrt{B - i\alpha} e^{i\alpha a_{2m-1}} F_t(-\alpha, x_{kj} - a_{2m-1})] = A_m T_m^\eta(\alpha), \quad \alpha = \pm z_r
 \end{aligned} \tag{15}$$

В выражениях (14), (15) следует полагать: $s = t = 1$ при $j = m$; $s = 2, t = 1$ при $j > m$; $s = 1, t = 2$ при $j < m$.

Принятые обозначения

$$P_t(x) = \sum_{j=1}^n g_j^\pm(x), \quad g_j^\pm(x) = \alpha_j \frac{e^{\pm i p_j x}}{2 p_j \sqrt{B \mp i p_j}}$$

$$\Psi_t(x, y) = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\beta_r}{2 z_r} g_j^\pm(x) \Phi_r(\mp p_j, y)$$

$$F_t(\alpha, \xi) = \sum_{j=1}^n (\alpha \pm p_j)^{-1} g_j^\pm(x), \quad t = 1, 2$$

($t = 1$ соответствует знак плюс, $t = 2$ — знак минус)

$$u_m^\eta(x) = \frac{\sqrt{B - i\eta} e^{-i\eta a_{2m}}}{\sqrt{\pi(a_{2m} - x)}} e^{-B(a_{2m} - x)} + \frac{\sqrt{B + i\eta} e^{-i\eta a_{2m-1}}}{\sqrt{\pi(x - a_{2m-1})}} e^{-B(x - a_{2m-1})}$$

$$v_m^\eta(x) = \operatorname{erf} \sqrt{(B + i\eta)(a_{2m} - x)} + \operatorname{erf} \sqrt{(B - i\eta)(x - a_{2m-1})}$$

$$\alpha_j = \prod_{k=1}^n (p_j^2 - z_k^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (p_j^2 - p_k^2)^{-1}, \quad \beta_i = \prod_{k=1}^n (z_i^2 - p_k^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (z_i^2 - z_k^2)^{-1}$$

Трансформанты Фурье решений $q_m(x, \eta)$ имеют вид

$$Q_m(\alpha, \eta) = \frac{1}{\Pi(\alpha)} \left\{ A_m T_m^\eta(\alpha) - \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^N c_{kj} [\sqrt{B + i\alpha} e^{i\alpha a_{2m}} * \right. \\ \left. * F_s(\alpha, a_{2m} - x_{kj}) + \sqrt{B - i\alpha} e^{i\alpha a_{2m-1}} F_t(-\alpha, x_{kj} - a_{2m-1}) \right\} \quad (16)$$

Замечания. 1° Решение интегрального уравнения (1) получено в предположении $c = 1$, т.е. с точностью до множителя c^{-1} , $c = \text{const}$, характеризующего поведение функции $K(\alpha)$ на бесконечности.

2°. Физически реализуемые электрические граничные условия в смешанных задачах акустоэлектроники имеют более частный характер: $f(x) = \psi_m = \text{const}$ на каждом из N электродов. В этом случае $\eta = 0$. Для контактных задач теории упругости функция $f(x)$ описывает форму подошвы штампа.

3°. С помощью решения $q(x, \eta)$, полученного для правой части $e^{-i\eta x}$, легко строится решение для произвольной правой части $f(x)$, если ее представить интегралом $f(x) = \int_{\sigma} F(\eta) e^{-i\eta x} d\eta$. Тогда $q(x) = \int_{\sigma} q(x, \eta) F(\eta) d\eta$. Контур интегрирования σ в этих представлениях выбирается таким образом, что не пересекает особенностей функций $K^{-1}(\eta)$.

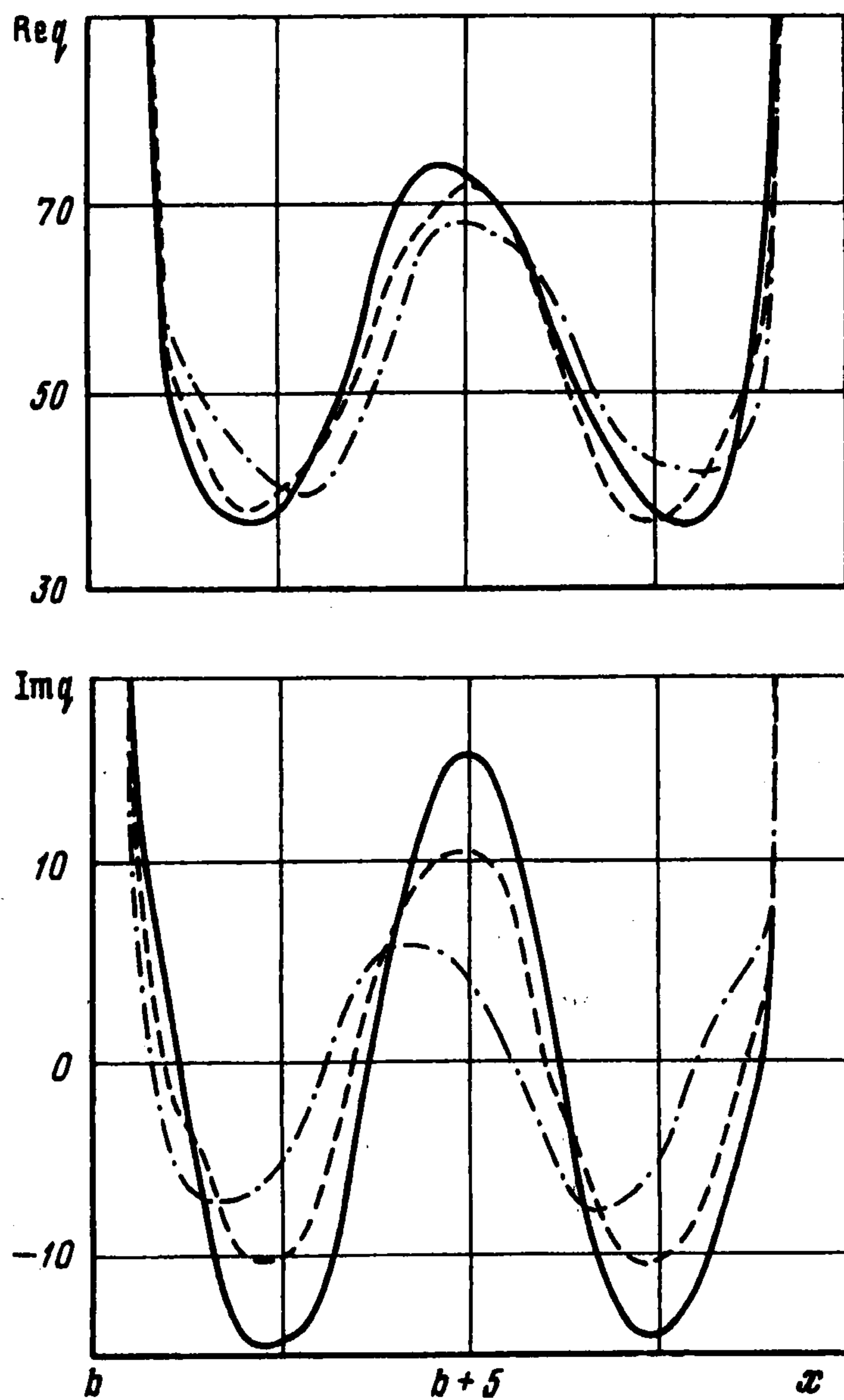
В качестве примера рассмотрим задачу об электрическом возбуждении пьезокристаллического слоя толщины h двумя полосовыми электродами; a_{2m-1} , a_{2m} — начало и конец m -го электрода ($m = 1, 2$). Считаем, что поверхность слоя свободна от механических напряжений, а в областях $\Omega_m: a_{2m-1} \leq x \leq a_{2m}$ заданы электрические потенциалы $f_m = A_m$, $x \in \Omega_m$. Вне этих областей нормальные составляющие вектора электрической индукции $q_m(x) = 0$, $x \notin \Omega_m$. Нижняя грань слоя жестко заземлена, металлизирована и закорочена. Система совершает установившиеся колебания с частотой ω . Общий для всех характеристик множитель $e^{-i\omega t}$ опущен.

Указанная задача методом интегральных преобразований [1] сводится к системе интегральных уравнений (1). Для ХЗ-срезов пьезокристаллов класса btt и поляризованной вдоль оси z пьезокерамики (z — нормаль к поверхности среды) подынтегральная функция ядра $K(\alpha)$ обладает перечисленными выше свойствами 1–3 и для различных моделей сред: слоя, пакета слоев, слоистого полупространства построена ранее [5]. В этом случае неизвестная плотность зарядов (электрическая индукция q_m) определяется формулой (14), а полные заряды под электродами связаны с преобразованиями Фурье $Q_m(\alpha, \eta)$, описываемыми формулами (16), соотношениями

$$G_m = \int_{a_{2m-1}}^{a_{2m}} q_m(x) dx = Q_m(0, 0)$$

На фигуре даны графики действительной и мнимой частей амплитуды электрической индукции $q(x) = q_2(x) = -q_1(x)$, отнесенной к c_{44}/L ($L = 10^{10}$ и имеет размерность электрического поля) в зависимости от расстояния между электродами при $\Omega = 2,6$, $A_1 = -A_2 = 1$ для ЦТС-19 ($\Omega^2 = \rho \omega^2 c_{44}^{-1} h^2$ — безразмерная частота колебаний, ρ — плотность, c_{44} — упругий модуль слоя, параметры $A_1 = 1$, $A_2 = -1$ соответствуют единичному электрическому возмущению электродов, причем в противофазе). Для удобства сопоставления графики электрической индукции совмещены вне зависимости от величины разноса электродов. Величина безразмерного параметра $2b$ определяет расстояние между электродами, отнесенное к толщине слоя. Сплошной линии соответствует $b = 3$, штриховой — $b = 1$, штрихпунктирной — $b = 0,25$. Ширина обоих электродов, отнесенная к толщине слоя, равна 10.

С уменьшением расстояния между электродами взаимное влияние электродов усиливается. При большом сближении электродов в случае $A_1 = A_2 = 1$ распределение электрической индукции практически вырождается в распределение индукции под одним электродом удвоенной ширины, если исключить влияние особенностей во внутренних точках. При



увеличении размеров электродов по сравнению с расстоянием между ними взаимное влияние электродов уменьшается.

Авторы благодарят В.А. Бабешко за внимание к работе и обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00362) и Целевой Федеральной программы "Интеграция" (368).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
2. Бабешко В.А. О вибрации системы штампов // Изв. АН СССР. МГТ. 1990. № 6. С. 72-78.
3. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 310 с.
4. Бабешко В.А. О неединственности решений динамических смешанных задач для систем штампов // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 6. С. 1327-1330.
5. Ворович И.И., Пряхина О.Д., Тукодова О.М., Фрейгейт М.Р. Об одном подходе к решению динамических задач для слоистых электроупругих и анизотропных сред // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 652-661.