

УДК. 532.546

© 1998 г. Ю.В. Обносов

ФИЛЬТРАЦИОННАЯ РЕФРАКЦИЯ НА ПОЛУКРУГОВОЙ ЛИНЗЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ПОРИСТЫХ МАССИВОВ

Рассматривается задача расчета двумерного фильтрационного поля в структурно неоднородной трехкомпонентной среде в виде двух бесконечных пористых массивов с полукруговым включением на плоской границе их контакта. Методами комплексного анализа в замкнутой аналитической форме получено распределение скорости фильтрации при строгом выполнении двух условий сопряжения на линиях контакта разнородных зон. Рассмотрены предельные случаи проводимостей компонентов среды и случаи вырождения трехкомпонентной среды в двухкомпонентную.

В задачах фильтрации важно найти распределение скоростей течения и на основе этого оценить локальную устойчивость вдоль линии сопряжения пористых слоев разной крупности естественного или искусственного происхождения (пластовые зоны неоднородности, ядра плотин, завесы, обратные фильтры и пр.) [1, 2]. Строгие точные решения таких задач для кусочно-однородных по проницаемости структур немногочисленны. Применение аппарата краевых задач теории аналитических функций к задачам фильтрации в неоднородных средах было начато П.Я. Полубариновой-Кочиной и ее учениками [3], которые рассмотрели схемы течения под флютбетом в слоистом грунте, течения в пласте с круговыми и эллиптическими включениями и др.

Ниже развиваются идеи монографии [3] и работ [4–8] в применении к схеме фильтрации в трехкомпонентной среде, состоящей из двух пористых массивов и полукруговой линзы на границе их контакта. На бесконечности вектор скорости фильтрации в одном из двух массивов задается равным $V_0 = (V_{0x}, V_{0y})$. На практике такая ситуация реализуется в теле земляных плотин, укладка основания которых идет послойно, а линза моделирует один из возможных дефектов такой укладки [2]. В отсутствие линзы течение одномерно с рефракцией вдоль границы контакта двух полуплоскостей. Линза приводит к возникновению, вообще говоря, двумерного поля во всех трех средах.

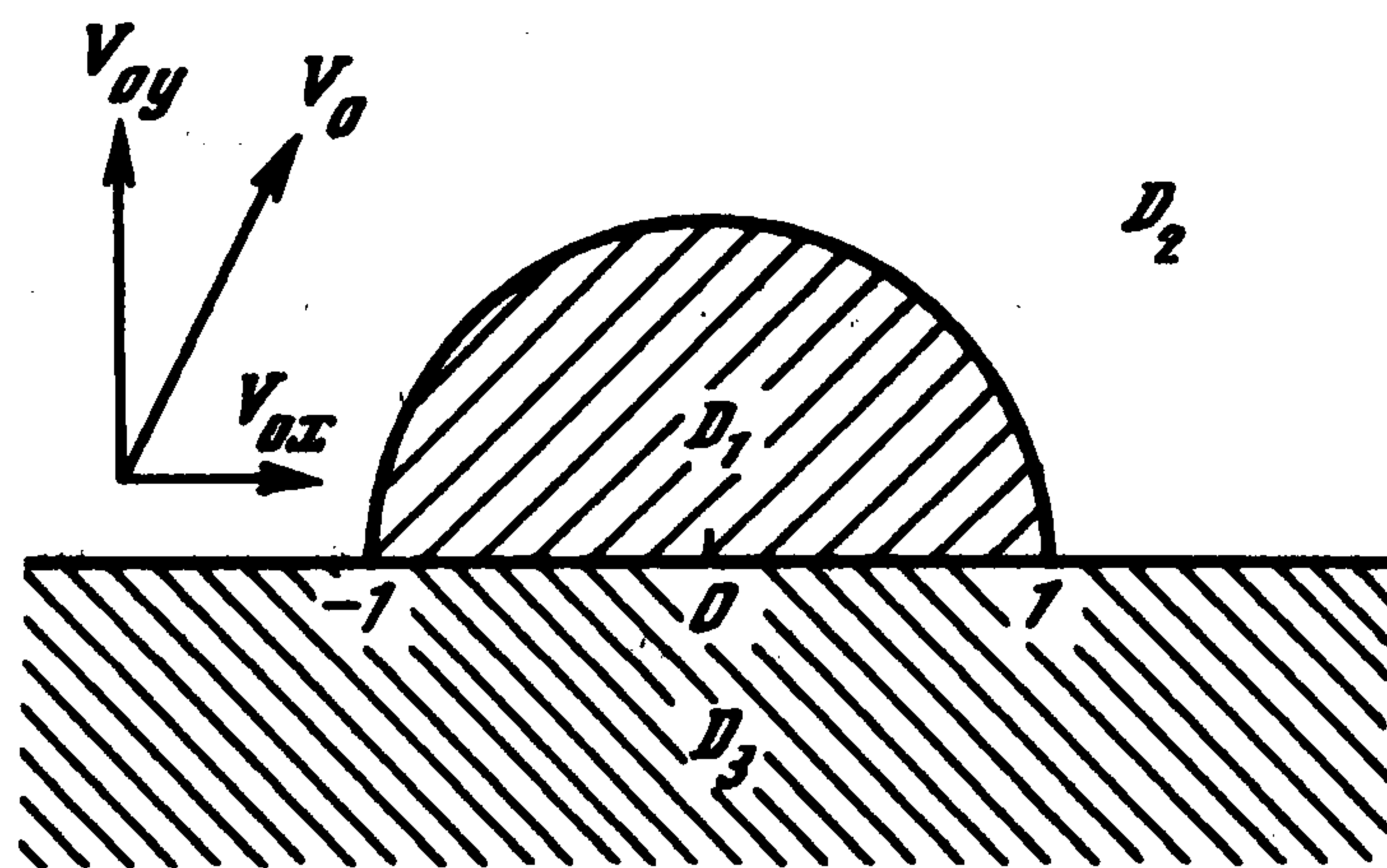
1. Постановка задачи. Задача плоской установившейся фильтрации по закону Дарси в среде, коэффициент фильтрации которой $k(x, y)$ – кусочно-постоянная функция ($k(x, y) \equiv k_j = \text{const}$ при $(x, y) \in D_j$), как известно [3], описывается уравнением Лапласа относительно напора $h(x, y) = h_j(x, y)$, $(x, y) \in D_j$, в зонах однородности D_j :

$$\Delta h_j(x, y) = 0$$

и условиями сопряжения

$$h_j = h_m, \quad \partial h_j / \partial s = \partial h_m / \partial s$$

вдоль границ контакта разнородных зон D_j и D_m . Введением комплексного переменного физической плоскости течения $z = x + iy$, комплексного потенциала $w(z) = \varphi + i\psi$ ($\varphi = -kh$ – потенциал, ψ – функция тока, гармонически сопряженная с φ) и вектора скорости фильтрации $v = (v_x, v_y) = v_x + iv_y = \overline{dw/dz} = -k\nabla h$ относительно последнего



Фиг. 1

получается следующая задача:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad z \in D_j$$

$$(\mathbf{v}_j)_n = (\mathbf{v}_m)_n, \quad (\mathbf{v}_j)_\tau / k_j = (\mathbf{v}_m)_\tau / k_m, \quad z \in dD_j \cap \partial D_m$$

Первые два из выписанных равенств говорят о том, что функция $v(z) = v_x - i v_y$, комплексно сопряженная с вектором $\mathbf{v}(z) = v_x + i v_y$, голоморфна в D_j , а вторая пара равенств выражает непрерывность нормальных и пропорциональность касательных составляющих компонентов вектора скорости \mathbf{v} вдоль границы раздела зон с различными коэффициентами проводимости.

Известно, что точно к такой же математической модели приводят соответствующие проблемы теории гетерогенных сред в электродинамике [9, 10] (\mathbf{v} – вектор плотности тока, k – коэффициент электропроводимости – величина обратная коэффициенту сопротивлению среды); магнитодинамике [11] (\mathbf{v} – вектор напряженности электрического поля, k – коэффициент магнитной проводимости); в задачах антиплоской деформации теории упругости [12, 13] (h – смещение, k – модуль сдвига); в теориях диффузии [14] (h – концентрация, k – коэффициент диффузии); теплопроводности [15] (\mathbf{v} – вектор теплового потока, k – коэффициент теплопроводности) и пр.

Рассматриваемая проблема эквивалентна [9] задаче \mathbb{R} -линейного сопряжения (ее еще называют обобщенной задачей Римана, или задачей Маркушевича). В рассматриваемой ситуации эта задача состоит в построении функции $v(z) = v_j(z) = v_{jx}(x, y) - i v_{jy}(x, y)$, $z \in D_j$, ($j = 1, 2, 3$) голоморфной в каждом из однородных компонентов D_j (фиг. 1) и непрерывной в их замыкании всюду за исключением разве лишь угловых точек $z = \pm 1$, где допускается наличие интегрируемых особенностей, по краевому условию

$$v_1(t) = A v_2(t) + B t^{-2} \overline{v_2(t)}, \quad t \in l = \{t: |t|=1, \operatorname{Im} t > 0\} \quad (1.1)$$

$$v_3(x) = A_{1,2} v_{1,2}(x) - B_{1,2} \overline{v_{1,2}(x)}, \quad x \in \partial D_3 \cap \partial D_{1,2} \setminus \{-1, 1\}$$

В дополнение к этому условию задается

$$v_2(\infty) = V_0 = V_{0x} - i V_{0y} \quad (1.2)$$

В (1.1) использованы обозначения

$$A = \frac{k_1 + k_2}{2k_2}, \quad B = 1 - A; \quad A_{1,2} = \frac{k_3 + k_{1,2}}{2k_{1,2}}, \quad B_{1,2} = 1 - A_{1,2} \quad (1.3)$$

k_j – коэффициент фильтрации среды D_j .

Ниже будет проведено полное исследование задачи (1.1)–(1.3) и построены в явной

аналитической форме выражения для вектора скорости фильтрации и для комплексного потенциала без каких-либо ограничений на значения коэффициентов проводимости компонентов среды и при произвольно ориентированном векторе внешнего поля.

2. Решение задачи (1.1), (1.2) в неопредельных и невырожденных случаях. Всюду в этом разделе предполагается, что $k_j \neq 0, \infty$ и $k_j \neq k_m$ при $j \neq m$ ($j, m = 1, 2, 3$), т.е. из рассмотрения временно исключаются как случаи, когда среда содержит идеально дренирующие или водонепроницаемые компоненты, так и случаи вырождения рассматриваемой трехкомпонентной среды в двухкомпонентную. При сделанных предположениях величины

$$\Delta = B/A, \quad \Delta_{1,2} = B_{1,2}/A_{1,2} \quad (2.1)$$

очевидно, удовлетворяют неравенствам: $0 < |\Delta|, |\Delta_{1,2}| < 1$.

Пусть D_j^* – область, симметричная с областью D_j относительно вещественной оси. Ясно, что каждая из функций

$$F_{1,2}(z) = \begin{cases} A_{1,2}v_{1,2}(z), & z \in D_{1,2} \\ v_3(z) + B_{1,2}v_{1,2}(\bar{z}), & z \in D_{1,2}^* \end{cases} \quad (2.2)$$

голоморфна в соответствующем объединении $D_j \cup D_j^*$ и непрерывна при $x \in \partial D_{1,2} \cap \partial D_{1,2}^* \setminus \{-1, 1\}$, так как $F_{1,2}^+(x) = A_{1,2}v_{1,2}(x) = v_3(x) + B_{1,2}v_{1,2}(\bar{x}) = F_{1,2}^-(x)$ в силу (1.1). Значит, функция $F_1(z)$ голоморфна в единичном круге $D^+ = \{z: |z| < 1\}$, а $F_2(z)$ в $D^- = \{z: |z| > 1\}$.

Ввиду (2.1), (2.2)

$$\begin{aligned} v_j(z) &= F_j(z)/A_j, & z \in D_j, \\ v_3(z) &= F_j(z) - \Delta_j F_j(\bar{z}), & z \in D_j^*, \end{aligned} \quad j=1,2 \quad (2.3)$$

Из (1.1), (1.2), (2.1), (2.3) и равенства $v_3^+(t) = v_3^-(t)$, справедливого на полуокружности $l^* = \{t: |t| = 1, \text{Im } t < 0\}$, следует, что функция $F(z) = \{F_1(z), z \in D^+; F_2(z), z \in D^-\}$ удовлетворяет условиям

$$F^+(t) = A_1 A_2^{-1} [A F^-(t) + B t^{-2} \overline{F^-(t)}], \quad t \in l \quad (2.4)$$

$$F^+(t) - \Delta_1 \overline{F^+(\bar{t})} = F^-(t) - \Delta_2 \overline{F^-(\bar{t})}, \quad t \in l^*$$

$$F(\infty) = A_2 V_0 \quad (2.5)$$

С помощью соотношений (2.4) и тех, что получаются из них заменой t на \bar{t} и комплексным сопряжением над исходными и преобразованными равенствами, можно показать, что вектор-функция $\Phi(z)$ с компонентами

$$\Phi_1(z) = F(z), \quad \Phi_2(z) = \overline{F(\bar{z})}, \quad \Phi_3(z) = F(1/z), \quad \Phi_4(z) = \overline{F(1/\bar{z})} \quad (2.6)$$

удовлетворяет краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in l; \quad \Phi^+(t) = P G(t) P \Phi^-(t), \quad t \in l^* \quad (2.7)$$

Невырожденная матрица $G(t)$ имеет вид

$$G(t) = \begin{vmatrix} \delta_2 & 0 & 0 & \Delta t^{-2} \\ -\Delta & 1 & 0 & \Delta \Delta_1 t^{-2} \\ -\Delta \Delta_2 t^2 & 0 & 1 & \Delta \\ -\Delta t^2 & 0 & 0 & \delta_1 \end{vmatrix}, \quad \det G(t) \equiv 1 \quad (2.8)$$

$$\delta_1 = 1 + \Delta \Delta_1, \quad \delta_2 = 1 - \Delta \Delta_2 \quad (2.9)$$

P – перестановочная матрица:

$$P = \begin{vmatrix} J & O \\ O & J \end{vmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad O = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

При проведении соответствующих выкладок в данном случае и в дальнейшем удобно использовать следующие попарно эквивалентные тождества:

$$\Delta\Delta_1\Delta_2 \equiv \Delta + \Delta_1 - \Delta_2 \quad (2.11)$$

$$\frac{\Delta_2 - \Delta}{\Delta_1} \equiv 1 - \Delta\Delta_2, \quad \frac{\Delta_1 + \Delta}{\Delta_2} \equiv 1 + \Delta\Delta_1 \quad (2.12)$$

вытекающие из (1.3), (2.1). Решать задачу (2.7), как следует из определений (2.6), нужно в классе вектор-функций, удовлетворяющих любым двум из трех условий:

$$\overline{\Phi(z)} \equiv P\Phi(z), \quad \Phi(1/z) \equiv Q\Phi(z), \quad \overline{\Phi(1/\bar{z})} \equiv R\Phi(z) \quad (2.13)$$

где Q и R , как и P , – перестановочные матрицы

$$Q = \begin{vmatrix} O & I \\ I & O \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} O & J \\ J & O \end{vmatrix}, \quad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

В точках $z = \pm 1$ у компонентов $\Phi(z)$ допускаются интегрируемые особенности. Кроме того, в силу (2.5), (2.6)

$$\Phi_1(\infty) = \overline{\Phi_2(\infty)} = \Phi_3(0) = \overline{\Phi_4(0)} = A_2 V_0 \quad (2.15)$$

С помощью замены

$$\Psi_{1,2}(z) = z\Phi_{1,2}(z), \quad \Psi_{3,4}(z) = \frac{1}{z}\Phi_{3,4}(z) \quad (2.16)$$

задача (2.7) приводится к однородной задаче Римана относительно вектор-функции $\Psi(z)$ с компонентами (2.16):

$$\Psi^+(t) = T\Psi^-(t), \quad t \in l; \quad \Psi^+(t) = PTP\Psi^-(t), \quad t \in l^+ \quad (2.17)$$

где

$$T = G(1) \quad (2.18)$$

Решение задачи (2.17), как вытекает из (2.16), следует отыскивать в классе вектор-функций, удовлетворяющих, как и функция $\Phi(z)$, условиям (2.13). Кроме того, первые два компонента вектора $\Psi(z)$ должны иметь по крайней мере простой нуль в начале координат и полюс первого порядка на бесконечности, у третьего и четвертого компонентов $\Psi(z)$ поведение обратное. Ввиду (2.15), (2.16)

$$-\text{res}_\infty(\Psi_1(z)/z^2) = \text{res}_0 \Psi_3(z) = A_2 V_0 \quad (2.19)$$

$$-\text{res}_\infty(\Psi_2(z)/z^2) = \text{res}_0 \Psi_4(z) = A_2 \overline{V_0}$$

Учитывая легко проверяемые на основании (2.10), (2.14), (2.18) равенства $T^{-1} = RTR$, $(PTP)^{-1} = QTQ$, задачу (2.17) заменой

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Psi(z), & z \in D^+ \\ PTP\Psi(z), & z \in D^- \end{cases} \quad (2.20)$$

приводим к следующей:

$$\Omega^+(t) = S\Omega^-(t), \quad t \in l \quad (2.21)$$

где матрица $S = TQTQ$ в силу (2.14), (2.18) имеет вид

$$S = \begin{vmatrix} \delta_2 & \Delta(\delta_1 + \delta_2 - 1) & \delta_2^2 - \delta_2 - \Delta^2 & \Delta \\ -\Delta & 1 + \delta_1^2 - \delta_1 - \Delta^2 & -\Delta(\delta_1 + \delta_2 - 1) & \delta_1 - 1 \\ \delta_2 - 1 & \Delta(\delta_1 + \delta_2 - 1) & 1 + \delta_2^2 - \delta_2 - \Delta^2 & \Delta \\ -\Delta & \delta_1^2 - \delta_1 - \Delta^2 & -\Delta(\delta_1 + \delta_2 - 1) & \delta_1 \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

Следовательно, вектор-функция $\Omega(z)$ голоморфна в плоскости z с разрезом по полуокружности l , на которой она удовлетворяет краевому условию (2.21) с невырожденной матрицей (2.22) ($\det S = (\det T)^2 = 1$). В силу (2.13), (2.16) и (2.18)–(2.20) $\Omega(z)$ должна так же удовлетворять условиям

$$\overline{\Omega(\bar{z})} \equiv P\Omega(z), \quad \Omega(1/z) \equiv PTR\Omega(z), \quad z \in D^+ \quad (2.23)$$

$$\operatorname{res}_\infty [z^{-2}\Omega(z)] = A_2((\Delta\bar{V}_0 - V_0), (\Delta\Delta_2 - 1)\bar{V}_0, \Delta\bar{V}_0, \Delta\Delta_2\bar{V}_0) \quad (2.24)$$

$$\operatorname{res}_0 \Omega(z) = A_2(0, 0, V_0\bar{V}_0), \quad \operatorname{res}_0 [z^{-1}\Omega_{1,2}(z)] = 0$$

Из граничного условия (2.21) и представления (2.22) следует

$$\begin{aligned} \Omega_1^+(t) - \Omega_3^+(t) &= \Omega_1^-(t) - \Omega_3^-(t), \\ \Omega_2^+(t) - \Omega_4^+(t) &= \Omega_2^-(t) - \Omega_4^-(t), \end{aligned} \quad t \in l$$

Значит, для функций $\Omega_1(z) - \Omega_3(z)$ и $\Omega_2(z) - \Omega_4(z)$ дуга l не является линией скачков. В точках $z = \pm 1$ у этих функций интегрируемые и, следовательно, устранимые особые точки. В нуле и на бесконечности у них простые полюсы, т.е. по обобщенной теореме Лиувилля

$$\Omega_1(z) - \Omega_3(z) = \alpha_1 z + \beta_1 + \gamma_1 / z$$

$$\Omega_2(z) - \Omega_4(z) = \alpha_2 z + \beta_2 + \gamma_2 / z$$

В силу соотношений (2.24)

$$\alpha_1 = -\operatorname{res}_\infty \frac{\Omega_1(z) - \Omega_3(z)}{z^2} = A_2 V_0, \quad \gamma_1 = \operatorname{res}_0 (\Omega_1(z) - \Omega_3(z)) = -A_2 V_0$$

С помощью второго соотношения (2.23) и (2.14), (2.18) можно получить $\Omega_1(z) - \Omega_3(z) = \Omega_3(1/z) - \Omega_1(1/z)$, откуда следует $\beta_1 = 0$. Из первого условия (2.23) в свою очередь вытекает

$$\overline{\Omega_1(\bar{z})} - \overline{\Omega_3(\bar{z})} = \Omega_2(z) - \Omega_4(z) = A_2 \bar{V}_0 (z - 1/z)$$

Итак,

$$\begin{cases} \Omega_3(z) = \Omega_1(z) - A_2 V_0 (z - 1/z) \\ \Omega_4(z) = \Omega_2(z) - A_2 \bar{V}_0 (z - 1/z) \end{cases} \quad (2.25)$$

На основании (2.25), (2.22) однородная четырехмерная задача (2.21) сводится к двумерной неоднородной задаче Римана относительно вектор-функции $W(z) = (W_1(z), W_2(z)) = (\Omega_1(z), \Omega_2(z))$:

$$W^+(t) = MW^-(t) + m(t), \quad t \in l \quad (2.26)$$

где матрица M и вектор $m(t)$ имеют вид

$$M = \begin{vmatrix} \delta_2^2 - \Delta^2 & \Delta(\delta_1 + \delta_2) \\ -\Delta(\delta_1 + \delta_2) & \delta_1^2 - \Delta^2 \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

$$m(t) = \Delta A_2(t - 1/t)((\Delta_2 \delta_2 + \Delta)V_0 - \bar{V}_0, (\delta_1 + \delta_2 - 1)V_0 - \Delta_1 \bar{V}_0) \quad (2.28)$$

Вычитая из третьей строки матрицы (2.22) первую, из четвертой вторую, а затем складывая первый столбец с третьим, второй с четвертым, получим $\det M = \det S = 1$. Следовательно, модуль собственных чисел матрицы M равен единице, что вытекает из оценки

$$\begin{aligned} -2 < -2\Delta^2 < \delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\Delta^2 = \\ = 2[1 - \Delta\Delta_2 + \Delta\Delta_1 - \Delta^2 + \Delta^2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)/2] < \\ < 2(1 - \Delta\Delta_2 + \Delta\Delta_1) = 2[1 - \Delta^2(1 - \Delta_1\Delta_2)] < 2 \end{aligned}$$

устанавливаемой с помощью (2.1), (2.11), (2.12), (2.9). После ряда преобразований искомые собственные числа могут быть записаны в следующей форме:

$$\mu_{1,2} = e^{\pm i2\pi\lambda} = \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{2} - 1 \pm i(\delta_1 + \delta_2) \sqrt{1 - \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)^2} \quad (2.29)$$

Собственный вектор (h_1, h_2) матрицы (2.27), отвечающий ее первому собственному числу (2.29), найденный из уравнения

$$(\delta_2^2 - \Delta^2 - \mu_1)h_1 + \Delta(\delta_1 + \delta_2)h_2 = 0$$

можно взять в виде (\bar{h}, h) , где

$$h = e^{i\pi\gamma} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 + \Delta_1 + \Delta_2} + i \operatorname{sign} \Delta \sqrt{2 - \Delta_1 - \Delta_2} \right) \quad (2.30)$$

Второму собственному числу (2.29) соответствует собственный вектор, комплексно сопряженный с найденным. Ясно, что матрица

$$H = \begin{vmatrix} \bar{h} & h \\ h & \bar{h} \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

приводящая матрицу (2.27) к нормальной жордановой форме, невырождена, так как ввиду (2.30) $0 < |\gamma| < \pi/2$ при принятых в этом разделе ограничениях, и следовательно, $\det H = -2i \sin(2\pi\gamma) \neq 0$.

Таким образом, задача (2.26) после линейной замены

$$W(z) = zHV(z) \quad (2.32)$$

распадается на две одномерных

$$V_1^+(t) = \mu_1 V_1^-(t) + a_1(t^{-2} - 1), \quad t \in l \quad (2.33)$$

$$V_2^+(t) = \mu_2 V_2^-(t) + a_2(t^{-2} - 1), \quad t \in l \quad (2.34)$$

где

$$a_1 = -i\Delta A_2 \operatorname{cosec}(2\pi\gamma) e^{i\pi\lambda} \operatorname{Re}[V_0(\Delta_2 \bar{h} - h)] \quad (2.35)$$

$$a_2 = i\Delta A_2 \operatorname{cosec}(2\pi\gamma) e^{-i\pi\lambda} \operatorname{Re}[V_0(\Delta_2 h - \bar{h})] \quad (2.36)$$

Правые части представлений (2.35), (2.36) получены на основании (2.28), (2.31), (2.32) и соотношения

$$h(\delta_1 + \delta_2 - 1) - \bar{h}(\Delta_2 \delta_2 + \Delta) = e^{i2\pi\lambda} (h - \Delta_1 \bar{h})$$

вытекающего из равенств (2.9), (2.29), (2.30).

Из (2.24), (2.32) следует, что вектор $V = (V_1, V_2)$ с компонентами, удовлетворяющими условиям сопряжения (2.33), (2.34), должен быть ограниченным в нуле и принимать на бесконечности следующее значение:

$$V(\infty) = A_2 H^{-1} (V_0 - \Delta \bar{V}_0, \delta_2 \bar{V}_0) \quad (2.37)$$

Первое условие (2.23) в применении к вектору $V(z)$ дает

$$\bar{H} \bar{V}(z) \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} H V(z) \equiv \bar{H} V(z), \quad z \in D^+$$

т.е.

$$\bar{V}(z) \equiv V(z), \quad z \in D^+ \quad (2.38)$$

Оставляя пока в стороне второе условие (2.23), найдем решение задач (2.33), (2.34) в классе функций, удовлетворяющих условиям (2.37), (2.38).

Однозначная ветвь аналитической функции

$$\chi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\lambda \quad (\chi(0) = 1) \quad (2.39)$$

фиксированная в области C/l , очевидно, удовлетворяет краевому условию (2.33) при $a_1 = 0$. Следовательно, неоднородная задача (2.33) приводится к задаче о скачке относительно функции $V_1(z)\chi^{-1}(z)$:

$$\frac{V_1^+(t)}{\chi^+(t)} = \frac{V_1^-(t)}{\chi^-(t)} + \frac{a_1}{\chi^+(t)} \frac{1-t^2}{t^2}, \quad t \in l \quad (2.40)$$

Частное решение задачи (2.40) дает интеграл типа Коши

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{1/t^2 - 1}{\chi^+(t)} \frac{dt}{t-z} \quad (2.41)$$

умноженный на постоянную a_1 . Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{1/t^2 - 1}{\chi(t)} \frac{dt}{t-z}$$

С одной стороны, справедливо равенство $I^*(z) = I(z) (1 - e^{i2\pi\lambda})$, так как $\chi^-(t) = \exp(-i2\pi\lambda)\chi^+(t)$. С другой стороны, по теореме Коши о вычетах интеграл $I^*(z)$ равен сумме вычетов подынтегральной функции $\varphi(t; z)$ в точках $t = 0$, $t = z$ и $t = \infty$, где у нее соответственно: полюс второго порядка, простой полюс и простой нуль. Стандартным образом находятся

$$\operatorname{res}_0 \varphi = \frac{2\lambda z - 1}{z^2}, \quad \operatorname{res}_z \varphi = \frac{1/z^2 - 1}{\chi(z)}, \quad \operatorname{res}_\infty \varphi = e^{i\pi\lambda}$$

При вычислении последнего вычета использовался тот факт, что выбранная ветвь функции (2.39) на бесконечности принимает значение

$$\chi(\infty) = e^{-i\pi\lambda} \quad (2.42)$$

Таким образом,

$$I(z) = \frac{1}{1 - e^{i2\pi\lambda}} \left[e^{i\pi\lambda} - \frac{1}{\chi(z)} + \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{\chi(z)} - 1 + 2\lambda z \right) \right] \quad (2.43)$$

В окрестности нуля для выбранной ветви функции $\chi^{-1}(z)$ справедливо разложение в ряд Тейлора

$$\chi^{-1}(z) = 1 - 2\lambda z + 2\lambda^2 z^2 + \dots$$

Значит, функция (2.43) голоморфна в нуле, а в силу (2.42) она исчезает на бесконечности, как это и должно быть.

Так как $0 < \lambda < 1/2$, то, следовательно, произведение $V_1(z)\chi^{-1}(z)$ будет иметь устранимую особенность в точке $z = 1$ и разве лишь простой полюс в точке $z = -1$. Значит,

$$V_1(z) = \chi(z) \left(a_1 I(z) + \frac{c_{11}}{z+1} + c_{12} \right) \quad (2.44)$$

где c_{11}, c_{12} – произвольные комплексные постоянные.

Функция (2.44) в силу (2.38) должна удовлетворять условию

$$\overline{V_1(\bar{z})} \equiv V_1(z), \quad z \in D^+$$

Так как для выбранной ветви $\chi(z)$ справедливо тождество

$$\overline{\chi(\bar{z})} \equiv \begin{cases} \chi(z), & z \in D^+ \\ e^{i2\pi\lambda} \chi(z), & z \in D^- \end{cases} \quad (2.45)$$

то в силу (2.43), (2.44) для выполнения последнего условия необходимо, чтобы имели место следующие равенства:

$$1) \operatorname{Im}[a_1(1 - e^{-i2\pi\lambda})] = 0; \quad 2) \operatorname{Im} c_{11} = 0; \quad 3) \operatorname{Im} \left[c_{12} + a_1 \frac{e^{i\pi\lambda}}{1 - e^{i2\pi\lambda}} \right] = 0$$

Кроме того, ввиду (2.42) – (2.44), (2.37) должно быть

$$4) V_1(\infty) = c_{12} e^{-i\pi\lambda} = \frac{i}{2} A_2 \operatorname{cosec}(2\pi\gamma) (\bar{h}V_0 - (\Delta\bar{h} + \delta_2 h)\bar{V}_0)$$

Первое из этих условий, очевидно, выполняется, так как в силу (2.35)

$$\frac{a_1}{1 - e^{i2\pi\lambda}} = \frac{2A_2}{4 - (\Delta_1 + \Delta_2)^2} \operatorname{Re}[(\Delta_2 \bar{h} - h)V_0]$$

Используя представления (2.29), (2.30) и вытекающие из них соотношения

$$\begin{aligned} e^{i\pi\lambda} &= \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + i|\Delta| \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}\right)^2} \\ e^{i2\pi\gamma} &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + i \operatorname{sign} \Delta \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}\right)^2} \\ e^{i\pi\lambda} &= \frac{h^2 - \Delta_2}{h^2 - \Delta_1} = -\frac{h^2 - \Delta_2}{\bar{h}^2 - \Delta_2} = -\frac{\bar{h}^2 - \Delta_1}{h^2 - \Delta_1} \end{aligned} \quad (2.46)$$

можно показать, что остальные необходимые равенства 2–4 будут иметь место, если положить

$$c_{12} = A_2 e^{i\pi\lambda/2} \operatorname{cosec}(2\pi\gamma) \operatorname{Im}(e^{-i\pi\lambda/2} h \bar{V}_0), \quad c_{11} = c_1 \in \mathbb{R}$$

Искомое решение задачи (2.33) после некоторых упрощений, использующих соотношения (2.9), (2.46), теперь может быть записано в форме

$$V_1(z) = a(V_0) \left\{ 1 - \frac{1}{z^2} + \chi(z) \left[1 - \frac{2\lambda}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{c_1}{z+1} \right] \right\} \quad (2.47)$$

где

$$a(V_0) = (A_2/2) \sec(\pi\lambda/2) \operatorname{cosec}(2\pi\gamma) \operatorname{Im}(e^{-i\pi\lambda/2} h \bar{V}_0) \quad (2.48)$$

Аналогичным образом показывается, что соответствующим решением задачи (2.34) со свободным членом (2.36) будет

$$V_2(z) = a(\bar{V}_0) \left\{ 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{\chi(z)} \left[1 + \frac{2\lambda}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{c_2}{z-1} \right] \right\} \quad (2.49)$$

Произвольные вещественные постоянные c_1, c_2 в представлениях (2.47), (2.49), следует выбрать таким образом, чтобы вектор-функция

$$\Omega(z) = (zHV(z), zHV(z) - A_2(z - 1/z)(V_0, \bar{V}_0))$$

определенная соотношениями (2.32), (2.25), удовлетворяла второму условию (2.23). Для этого достаточно потребовать, например, чтобы найденные на основании последнего равенства и соотношений (2.20), (2.16) компоненты вектора $\Phi(z)$

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} \bar{h}V_1(z) + hV_2(z), & z \in D^+ \\ e^{i\pi\lambda} \bar{h}V_1(z) + e^{-i\pi\lambda} hV_2(z) + V_0 A_2 \Delta \Delta_2 \left(1 - \frac{1}{z^2} \right), & z \in D^- \end{cases}$$

$$\Phi_3(z) = \begin{cases} z^2 [\bar{h}V_1(z) + hV_2(z)] + V_0 A_2 (1 - z^2), & z \in D^+ \\ z^2 [e^{i\pi\lambda} \bar{h}V_1(z) + e^{-i\pi\lambda} hV_2(z)] + V_0 A_2 \delta_2 (1 - z^2), & z \in D^- \end{cases}$$

удовлетворяли в соответствии с определением (2.6) условию $\Phi_1(1/z) \equiv \Phi_3(z)$. Выписывая это тождество в развернутом виде для $z \in D^+$, на основании (2.47)–(2.49) с учетом последних представлений и тождества

$$\chi(1/z) \equiv \begin{cases} e^{-i\pi\lambda} \chi(z), & z \in D^+ \\ e^{i\pi\lambda} \chi(z), & z \in D^- \end{cases} \quad (2.50)$$

получим $c_1 = c_2 = 0$, если после всех сокращений сравнить коэффициенты при однородных слагаемых, в частности, при $z\chi(z)$ и $z\chi^{-1}(z)$.

С учетом представлений (2.3), (2.6), (2.39) и тождества (2.45) можно показать, что во всех неопределенных и невырожденных случаях единственное решение задачи (1.1), (1.2), определяется по формулам

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \frac{2k_1}{k_1 + k_3} [e^{-i\pi\gamma} V_1(z) + e^{i\pi\gamma} V_2(z)] \\ v_2(z) &= \frac{2k_2}{k_2 + k_3} [e^{i\pi(\lambda-\gamma)} V_1(z) + e^{-i\pi(\lambda-\gamma)} V_2(z)] + V_0 \Delta \Delta_2 \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \\ v_3(z) &= (e^{-i\pi\gamma} - \Delta_1 e^{i\pi\gamma}) V_1(z) + (e^{i\pi\gamma} - \Delta_1 e^{-i\pi\gamma}) V_2(z) \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$V_1(z) = a(V_0) \left\{ 1 - \frac{1}{z^2} + \chi(z) \left[1 - \frac{2\lambda}{z} + \frac{1}{z^2} \right] \right\}$$

$$V_2(z) = a(\bar{V}_0) \left\{ 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{\chi(z)} \left[1 + \frac{2\lambda}{z} + \frac{1}{z^2} \right] \right\}$$

в свою очередь, если $V_0 = |V_0|e^{-i\alpha}$, то

$$a(V_0) = \frac{k_2 + k_3}{4k_2} \frac{|V_0| \sin[\pi(\gamma - \lambda/2 + \alpha)]}{\cos(\pi\lambda/2) \sin(2\pi\gamma)}$$

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \arccos\left(1 + \Delta \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2}\right), \quad \gamma = \frac{\text{sign } \Delta}{2\pi} \arccos \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$$

$$\Delta = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}, \quad \Delta_1 = \frac{k_1 - k_3}{k_1 + k_3}, \quad \Delta_2 = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3}$$

Замечание 1. Напомним, что найденные функции $v_j(z)$ комплексно сопряжены со значениями истинных скоростей фильтрации $v_j(z)$. Работая с полученными формулами необходимо учитывать, что для выбранной ветви многозначной функции (2.39) в соответствии со способом ее фиксации, во-первых, справедливы неравенства

$$0 < \arg \chi < \pi\lambda/2, \quad -3\pi\lambda/2 < \arg \chi < -\pi\lambda, \quad -\pi\lambda < \arg \chi < 0,$$

соответственно при $z \in D_1$, $z \in D_2$ и $z \in D_3$ и, во-вторых, имеют место следующие разложения в ряд Тейлора:

$$\chi(z) = 1 + 2\lambda z + 2\lambda^2 z^2 + \frac{2\lambda}{3}(1 + 2\lambda^2)z^3 + \frac{2\lambda^2}{3}(2 + \lambda^2)z^4 + \dots, \quad |z| < 1$$

$$\chi(z) = e^{-i\pi\lambda} (1 + 2\lambda z^{-1} + 2\lambda^2 z^{-2} + \frac{2\lambda}{3}(1 + 2\lambda^2)z^{-3} + \dots), \quad |z| > 1$$

Отсюда разложение в соответствующий ряд Тейлора для функции $\chi^{-1}(z)$ получается простой заменой λ на $-\lambda$.

Замечание 2. Интегрированием формул (2.51) легко восстанавливается комплексный потенциал $w(z) = w_j(z)$, $z \in D_j$, ($j = 1, 2, 3$)

$$w_1(z) = \frac{2k_1}{k_1 + k_3} [e^{-i\pi\gamma} W_1(z) + e^{i\pi\gamma} W_2(z)]$$

$$w_2(z) = \frac{2k_2}{k_2 + k_3} [e^{i\pi(\lambda-\gamma)} W_1(z) + e^{-i\pi(\lambda-\gamma)} W_2(z)] + V_0 \Delta \Delta_2 \left(z + \frac{1}{z}\right)$$

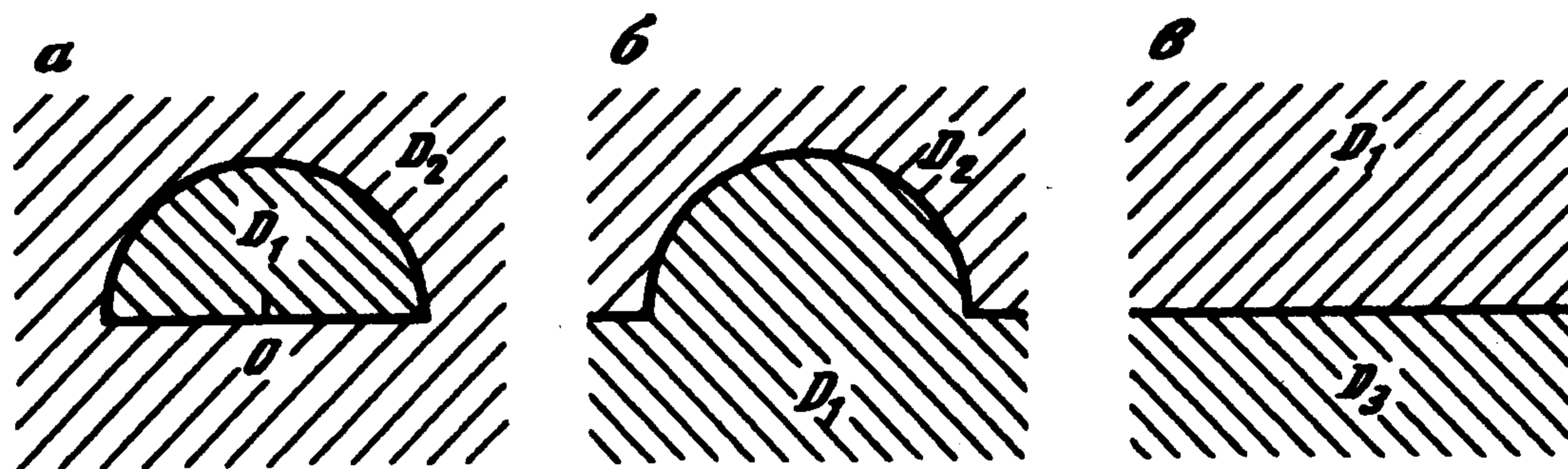
$$w_3(z) = (e^{-i\pi\gamma} - \Delta_1 e^{i\pi\gamma}) W_1(z) + (e^{i\pi\gamma} - \Delta_1 e^{-i\pi\gamma}) W_2(z) \quad (2.52)$$

$$W_1(z) = a(V_0) \left\{ z + \frac{1}{z} + \chi(z) \left(z - \frac{1}{z} \right) \right\}$$

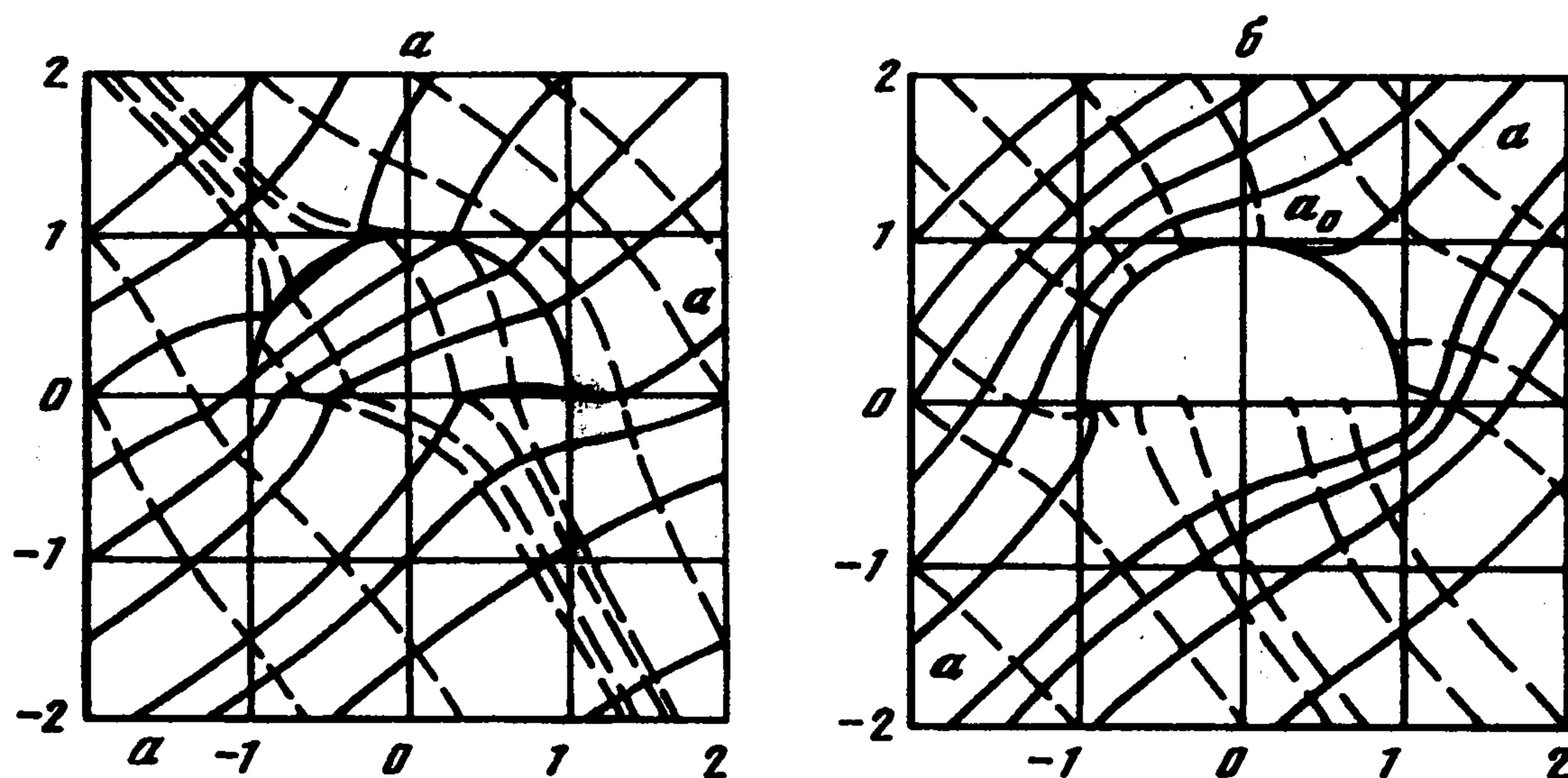
$$W_2(z) = a(\bar{V}_0) \left\{ z + \frac{1}{z} + \frac{1}{\chi(z)} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right\}$$

Ниже рассматриваются представляющие интерес с точки зрения фильтрационных приложений случаи вырождения рассмотренной выше трехкомпонентной среды в двухкомпонентную ($k_j = k_m$), а также предельные случаи, когда по крайней мере один из компонентов среды D_j является идеально проводящим ($k_j = \infty$) или непроницаемым ($k_j = 0$).

3. Решение задачи (1.1), (1.2) в вырожденных случаях. Почти во всех ситуациях, исследуемых в этом и следующем разделах, за исключением особо оговоренных, искомые решения и соответствующий комплексный потенциал могут быть получены по формулам (2.51), (2.52) путем предельного перехода в соотношениях (1.3), (2.1), (2.9), (2.30), (2.39), (2.46), (2.48). Поэтому, как правило, в каждом конкретном случае будет указан лишь итоговый результат предельного перехода в указанных формулах.



Фиг. 2



Фиг. 3

3.1. *Одинокое полукруговое включение.* Среда, изображенная на фиг. 2, а, очевидно, получается из изученной трехкомпонентной при $k_2 = k_3$. Она обобщает известную схему с круговым включением [3] и ввиду наличия помимо радиуса второго геометрического параметра (угла наклона основания включения к вектору внешнего потока) может служить для построения стохастических моделей типа классической эффективной среды Максвелла [16].

Если $k_2 = k_3$, то $A_2 = 1$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_1 = -\Delta$, $\delta_1 = 1 - \Delta^2$, $\delta_2 = 1$ и

$$\lambda = 4\gamma - \text{sign } \Delta = \frac{1}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{\Delta^2}{2} \right), \quad a(V_0) = \frac{\text{Re}(hV_0)}{(4 - \Delta^2)} \quad (3.1)$$

(Здесь, очевидно, $\bar{h} - \Delta_1 h = \bar{h} \exp(i\pi\lambda)$, а значит, $v_2(z) \equiv u_3(z)$, как это и должно быть в данном случае.)

3.2. *Задача о полукруговой выемке.* Полагая $k_1 = k_3$, приходим к двухкомпонентной пористой среде, изображенной на фиг. 2, б. Такая среда может рассматриваться при моделировании процесса каналобразной суффозии [17], когда выемка моделирует зарождающийся эрозионный палец.

Здесь $A_1 = 1$, $A_2 = A$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \Delta$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1 - \Delta^2$ и

$$\lambda = \text{sign } \Delta - 4\gamma = \frac{1}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{\Delta^2}{2} \right), \quad a(V_0) = -A \frac{\text{Re}(h^3 \bar{V}_0)}{4 - \Delta^2} \quad (3.2)$$

(Тождество $v_1(z) \equiv v_3(z)$ в данном случае очевидно).

3.3. *Задача о двух полуплоскостях.* В простейшем случае (фиг. 2, в) при $k_1 = k_2$ легко получить $A_1 = A_2$, $\Delta = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $\lambda = 0$, и, как это и должно быть [3],

$$v_1(z) \equiv v_2(z) \equiv V_0, \quad v_3(z) \equiv k_3 V_{0x} / k_1 - iV_{0y}$$

4. Решение задачи (1.1), (1.2) в предельных случаях. Следует отметить, что в теории фильтрации коэффициент пропорциональности k_j в законе Дарси ограничен сверху. Поэтому при значении k_j выше предельного фильтрационное течение в соответствующем компоненте D_j обычно не рассматривается, а граница этого компонента принимается за эквипотенциаль. Однако в других разделах теории гетерогенных сред большие значения проводимости допустимы и поле в идеально проводящем компоненте может представлять интерес.

4.1. Случаи $k_1 = 0, \infty$.

а) $k_1 = \infty, k_2 \neq k_3, k_{2,3} \neq 0, \infty$:

$$A_1 = 1/2, \Delta = -\Delta_1 = -1, \delta_1 = 0, \delta_2 = 1 + \Delta_2$$

$$\lambda = -2\gamma = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1 + \Delta_2}{2}, \quad a(V_0) = \frac{2A_2 \operatorname{Im}(e^{i\pi\lambda} V_0)}{(3 + \Delta_2)\sqrt{1 - \Delta_2}} \quad (4.1)$$

а') $k_1 = \infty, k_2 = k_3 \neq 0, \infty$: $A_2 = 1, \Delta_2 = 0$ и из (4.1), точно так же, как из (3.1), следует $\lambda = -2\gamma = 1/3, a(V_0) = 2\operatorname{Im}(e^{i\pi/3} V_0)/3$.

б) $k_1 = 0, k_2 \neq k_3, (k_{2,3} \neq 0, \infty)$:

$$A_1 = \infty, \Delta = -\Delta_1 = 1, \delta_1 = 0, \delta_2 = 1 - \Delta_2$$

$$\lambda = 1 - 2\gamma = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1 - \Delta_2}{2}, \quad a(V_0) = \frac{2A_2 \operatorname{Re}(e^{i\pi\lambda} V_0)}{(3 - \Delta_2)\sqrt{1 + \Delta_2}} \quad (4.2)$$

б') $k_1 = 0, k_2 = k_3 \neq 0, \infty$: $v_1(z) \equiv 0, A_2 = 1, \Delta_2 = 0$ и ввиду (4.2) $\lambda = \gamma = 1/3, a(V_0) = 2\operatorname{Re}(e^{i\pi/3} V_0)/3$.

4.2. Случаи $k_2 = 0, \infty$.

а) $k_2 = \infty, k_1 \neq k_3, k_{1,3} \neq 0, \infty$:

$$A = A_1 = 1/2, \Delta = \Delta_2 = 1, \delta_1 = 1 + \Delta_1, \delta_2 = 0$$

$$\lambda = 2\gamma = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1 + \Delta_1}{2}, \quad a(V_0) = \frac{\operatorname{Im} \bar{V}_0}{(3 + \Delta_1)\sqrt{1 - \Delta_1}} \quad (4.3)$$

а') $k_2 = \infty, k_1 = k_3 \neq 0, \infty$: из (3.2) и из (4.3) одинаково следует $\lambda = 2\gamma = 1/3, a(V_0) = \operatorname{Im} \bar{V}_0/3$.

б) В случае $k_2 = 0, k_1 \neq k_3, k_{1,3} \neq 0, \infty$ решение соответствующей краевой задачи не удастся получить непосредственным предельным переходом, что вполне понятно — исходя из физического смысла в данной ситуации должно быть $v_2 \equiv 0$, а это противоречит условию (1.2). Такого осложнения не возникло бы, если бы вместо (1.2) было задано $v_3(\infty) = V_0^* = V_{0x}^* - iV_{0y}^*$. Из (1.1), (1.2) в общем случае вытекает $V_0 = k_2 V_{0x}^* / k_3 - iV_{0y}^*$. В частности, если $V_{0y} = V_{0y}^* = 0$, то $V_0 = V_{0x} = k_2 V_{0x}^* / k_3$. Заменяя теперь во всех формулах V_0 на $k_2 V_{0x}^* / k_3$ и переходя к пределу при $k_2 \rightarrow 0$ можно найти

$$\Delta = \Delta_2 = -1, A = A_2 = \infty, \delta_1 = 1 - \Delta_1, \delta_2 = 0$$

$$\lambda = 1 + 2\gamma = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1 - \Delta_1}{2}, \quad a(V_0) = \frac{V_{0x}^*}{(3 - \Delta_1)\sqrt{1 + \Delta_1}} \quad (4.4)$$

б') Формулы (4.4) при $k_3 = 0$ и $k_1 \neq k_3 \neq 0, \infty$ в свою очередь дают: $\Delta_1 = 0$ и $\lambda = -\gamma = 1/3, a(V_0) = V_{0x}^* / 3$.

4.3. Случаи $k_3 = 0, \infty$.

а) В пределе при $k_3 \rightarrow \infty, k_1 \neq k_2, k_{1,2} \neq 0, \infty$ из условия $k_3 \operatorname{Re} v_{1,2}(x) = k_{1,2} \operatorname{Re} v_3(x), x \in \partial D_{1,2} \cap \partial D_3$, следует $\operatorname{Re} v_{1,2}(x) = 0$,

$$v_2(\infty) = V_0 = -iV_{0y} \quad (4.5)$$

Очевидно, функции

$$F_{1,2}(z) = \begin{cases} v_{1,2}(z), & z \in D_{1,2} \\ -v_{1,2}(\bar{z}), & z \in D_{1,2}^* \end{cases}$$

голоморфны в областях D^+, D^- соответственно, а функция

$$F(z) = \begin{cases} \frac{k_2}{k_1} AF_1(z), & z \in D^+ \\ F_2(z) + \frac{k_2}{k_1} B \frac{1}{z^2} \overline{F_1(1/\bar{z})}, & z \in D^- \end{cases}$$

голоморфна в расширенной плоскости z ввиду граничного равенства

$$v_2(t) = \frac{k_2}{k_1} Av_1(t) - \frac{k_2}{k_1} B t^{-2} \overline{v_1(t)}, \quad |t|=1$$

вытекающего из первого граничного условия (1.1). По теореме Лиувилля $F(z) \equiv \text{const}$ и в силу (4.5)

$$v_1(z) = -iV_{0y}(1 - \Delta), \quad v_2(z) = -iV_{0y}(1 + \Delta z^{-2}) \quad (4.6)$$

К этому же результату можно прийти, если, исходя из соответствующих формул раздела 2, показать, что

$$\lim_{k_3 \rightarrow \infty} A_1^{-1} a(V_0) = \frac{V_{0y}(1 - \Delta)}{4} \operatorname{sign} \Delta, \quad \lim_{k_3 \rightarrow \infty} A_2^{-1} a(V_0) = \frac{V_{0y}(1 + \Delta)}{4} \operatorname{sign} \Delta$$

и учесть, что $\Delta_1 = \Delta_2 = -1, \lambda = 0, 2\gamma = \operatorname{sign} \Delta$.

Поле в полуплоскости D_3 можно найти, решая краевую задачу Шварца

$$\operatorname{Im} v_3(x) = \operatorname{Im} v_j(x), \quad x \in \partial D_j \cap \partial D_3, \quad j = 1, 2$$

свободный член которой определен равенствами (4.6). Опуская выкладки, приведем лишь конечный результат

$$v_3(z) = -iV_{0y} \left\{ 1 - \Delta + \frac{\Delta}{i\pi} \left[\left(1 + \frac{1}{z^2} \right) \ln \frac{1-z}{1+z} + \frac{2}{z} \right] \right\} \quad (4.7)$$

(под логарифмом понимается исчезающая в нуле ветвь, фиксированная в D_3). Заметим, что соответствующий комплексный потенциал в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$w_1(z) = -iV_{0y}(1 - \Delta)z, \quad w_2(z) = -iV_{0y}(z - \Delta z^{-1})$$

$$w_3(z) = -iV_{0y} \left\{ (1 - \Delta)z + \frac{\Delta}{i\pi} \left(z - \frac{1}{z} \right) \ln \frac{1-z}{1+z} \right\}$$

а') Если $k_3 = \infty$ и $k_1 = k_2 \neq 0, \infty$, то $\Delta = 0$ и из (4.6), (4.7) следует $v_1 \equiv v_2 \equiv v_3 \equiv -iV_{0y}$.

б) При $k_3 = 0$, $k_1 \neq k_2$, $k_{1,2} \neq 0, \infty$, очевидно, должны выполняться условия $\text{Im}u_j(x) = 0$ ($j = 1, 2, 3$). Значит, $v_3(z) \equiv 0$ и $v_2(\infty) = V_{0x}$. Аналогично случаю а) находятся

$$v_1(z) = V_{0x}(1 - \Delta), \quad v_2(z) = V_{0x}(1 - \Delta z^{-2}) \quad (4.8)$$

б') В тривиальном случае, когда $k_3 = 0$ и $k_1 = k_2$ из (4.8) следует $v_1 \equiv v_2 \equiv V_{0x}$.

Полученные точные решения позволяют воспроизвести структуру фильтрационного поля в области его существенной двумерности. На фиг. 3, а, б приведены линии тока и эквипотенциали (соответственно сплошные и пунктирные линии) в случае, когда внешнее поле ориентировано под углом 45° к оси абсцисс. Для дренирующей линзы ($k_1 = 10$, $k_2 = 0,6$, $k_3 = 1$, фиг. 3, а) интересно поведение линии тока $a-a$, которая делает "петлю" вблизи угла линзы. В случае слабопроницаемого препятствия ($k_1 = 0,01$, $k_2 = k_3 = 1$, фиг. 3, б) следует отметить поведение линии тока $a-a$, которая "отрывается" в кормовой части линзы (точка a_0).

Подчеркнем, что стандартные методы типа метода конечных элементов или метода конечных разностей, опирающиеся на численное дифференцирование узловых значений напора, плохо описывают такие нетривиальные эффекты [18]. Используемая выше техника отслеживания меченых частиц позволяет стартовать с любой точки среды, причем возникающие погрешности численного интегрирования системы двух дифференциальных уравнений с аналитическими заданными правыми частями могут быть оценены также аналитически. Хотя области нетривиального распределения параметров потока малы, а глобально поведение поля удовлетворяет интуитивно ожидаемому, реальная картина рефракции позволяет оценить и справедливость посылок приближенных моделей, например, условие изотермичности подложки в задаче диссипации тепла с ребренной поверхности [18, 19]. Такие распределения, как изотакхи [3], изохроны [20], концентрационные кривые адвективного переноса [21] (легко строящиеся на базе полученного решения), могут использоваться для геомеханического и гидрогеологического анализа. Например, распределение скоростей вдоль полуокружности ("ядро эрозии") существенно для описания образования дендритных структур "суффозионных пальцев" [17]. В моделях конвективной диффузии [22] важно оценить справедливость асимптотик и приближенных моделей типа Нумерова – Патрашева путем оценки размеров зон существенно непостоянной скорости. Представляют интерес и интегральные характеристики: полная диссипация, эффективная проводимость, полный поток массы с линзы и пр. Однако эти вопросы выходят за рамки настоящей статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01366-а, 96-01-00844-а) и Международного научного фонда и Российского Правительства (J72100).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cedergren H.R.* Seepage, Drainage and Flow Nets. N.Y. etc.: Wiley, 1977. 534 p.
2. *Гришин М.М., Слисский С.М., Антипов А.И. и др.* Гидротехнические сооружения. Ч. 1. М.: Высш. школа, 1979. 615 с.
3. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
4. *Емец Ю.П., Обносов Ю.В.* Точно разрешимая задача о взаимном влиянии включений в теории гетерогенных сред // ПМТФ. 1990. № 1. С. 21–29.
5. *Обносов Ю.В.* Решение одной задачи Маркушевича в классе двоякопериодических функций с ортогональными периодами // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 5. С. 1125–1127.
6. *Обносов Ю.В.* Решение одной задачи R-линейного сопряжения для правильного треугольника шахматного поля // Докл. РАН. 1992. Т. 327. № 3. С. 326–330.
7. *Obnosov Yu.V.* Exact solution of a boundary-value problem for a rectangular checkerboard field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1996. V. 452. P. 2423–2442.

8. *Обносков Ю.В.* Решение задачи R-линейного сопряжения теории композитов для одной трехкомпонентной среды // Изв. вузов. Математика. 1996. № 5. С. 63–72.
9. *Емец Ю.П.* Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред. Киев: Наук. думка, 1987. 254 с.
10. *Schinzinger R., Laura P.A.* Conformal Mapping: Methods and Applications. N.Y.: Elsevier, 1991. 604 p.
11. *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 728 с.
12. *Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А.* Периодические кусочно-однородные упругие структуры. М.: Наука, 1992. 287 с.
13. *Honein E., Honein T., Herrmann G.* On two circular inclusions in harmonic problems / Quart. Appl. Math. 1992. V. 50. № 3. P. 479–499.
14. *Crank J.* The Mathematics of Diffusion. Oxford: Clarendon Press, 1975. 414 p.
15. *Карслоу Г., Езер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1987. 487 с.
16. *Dagan G.* Flow and Transport in Porous Formations. Berlin: Springer, 1989. 465 p.
17. *Higging C.G. et al.* Landform development // The Geology of North America. V. 0–2. Hydrogeology. Boulder: The Geol. Soc. of America. 1989. P. 597.
18. *Heggs P.G.* Two-dimensional considerations of steady state heat flow through extended surface assemblies // ZAMM. 1996. Bd. 76. Suppl. 4, P. 115–120.
19. *Kacimov A.R., Obnosov Yu.V.* Explicit, rigorous solutions to two-dimensional heat transfer: two-component media and optimization of cooling fins // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1997. V. 40, № 5. P. 1191–1196.
20. *Касимов А.Р., Обносков Ю.В.* Течение грунтовых вод в среде с периодическими включениями // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. С. 139–148.
21. *Kacimov A.R., Obnosov Yu.V.* Analytic solution to a problem of seepage in a checker-board porous massif // Transport in Porous Media. 1997. V. 28. № 1. P. 109–124.
22. *Romero L.A.* Low or high Peclet number flow past a sphere in a saturated porous medium // SIAM Journal. Appl. Math. 1994. V. 54. № 1. P. 42–71.

Казань

Поступила в редакцию
14.XI.1995