

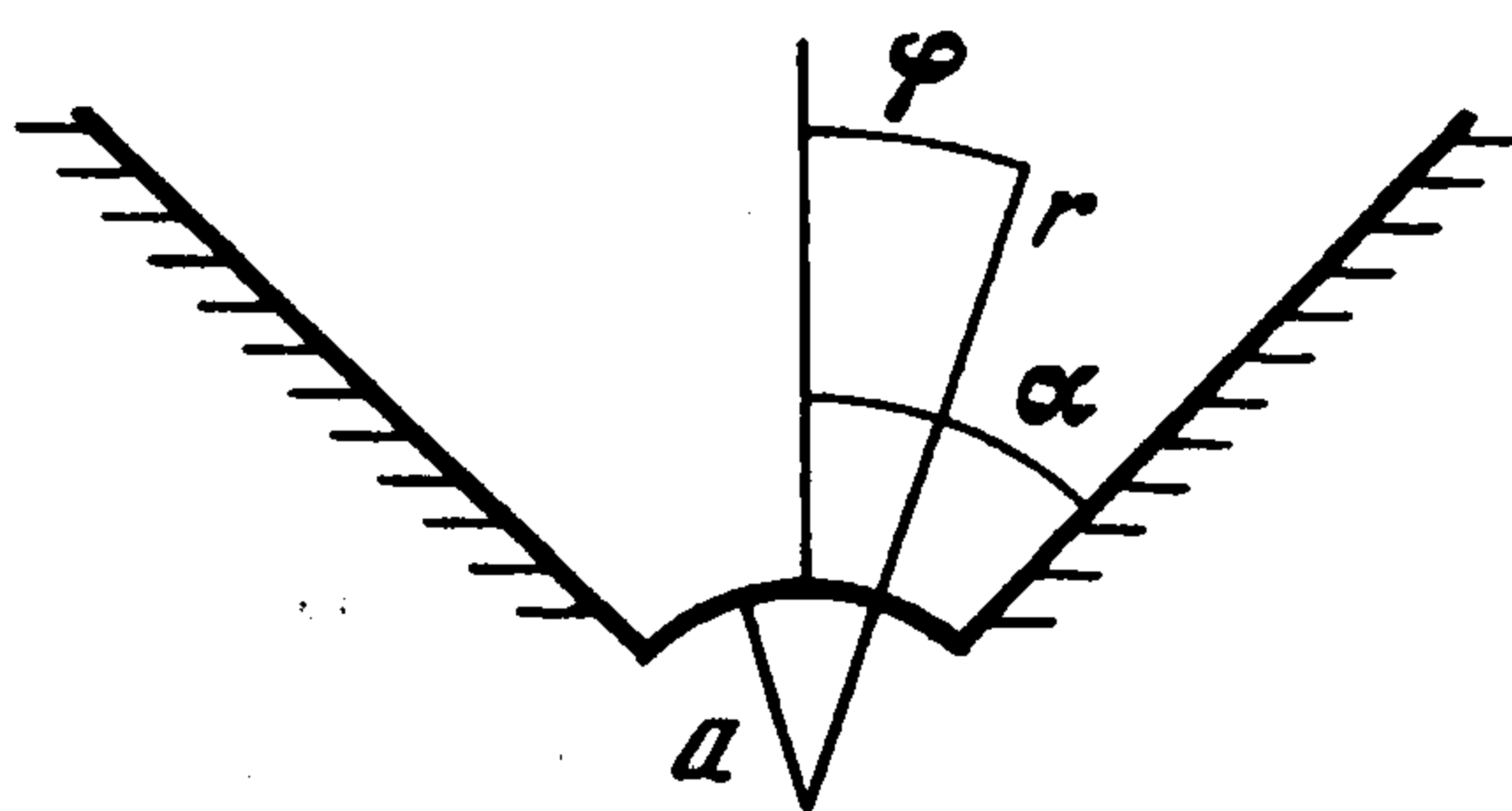
УДК 532.516

© 1998 г. А.В. Кистович, Ю.Д. Чашечкин

## ИНДУЦИРОВАННЫЕ ДИФФУЗИЕЙ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КЛИНОВИДНОЙ ВПАДИНЕ

Рассматривается плоская задача установления стратификации в клиновидной впадине, заполненной однородной несжимаемой жидкостью, при включении на ее дне постоянно действующего источника примеси. Малая интенсивность возникающих индуцированных конвективных и диффузионных течений позволяет воспользоваться методами теории возмущений. Применение к получающимся линеаризованным системам уравнений метода интегральных преобразований дает решение для полей скорости и примеси в виде квадратурных формул, на основании которых можно определить характерные величины и масштабы возникающих течений.

**1. Постановка задачи.** Рассматриваются процессы установления стратификации во впадине, образованной двумя полубесконечными наклонными непроницаемыми стенками, заполненной однородной несжимаемой жидкостью. В начальный момент на дне включается источник соли – часть окружности радиуса  $a$  с углом раствора  $2\alpha$  (фигура), который характеризуется коэффициентом солеотдачи  $\gamma_s$  и значением  $S_{00}$  концентрации соли на его поверхности.



Нестационарная задача определения полей скорости и солёности, которые будут формироваться во впадине, рассматривается в двумерной постановке. В полярной системе координат, изображенной на фигуре, граничные условия на источнике запишутся в виде

$$\left\{ k_s \frac{\partial S}{\partial r} + \gamma_s (S - S_{00}) \right\}_{r=a} = 0 \quad (1.1)$$

где  $S$  – искомое распределение соли во впадине,  $k_s$  – коэффициент диффузии соли. На дне и наклонных стенках выполняются условия прилипания для скорости. Кроме того, на наклонных стенках выполняется условие непротекания для соли. Течение развивается в поле силы тяжести  $g$ . На бесконечности все возмущения затухают.

После включения источника соли гидродинамическое равновесие жидкости нарушается. Это связано с тем, что на первых этапах развития течения механизм диффузии формирует распределение плотности с изохалинами в виде концентрических окружностей с центром в начале полярной системы координат  $r, \varphi$ . В то же время в поле

силы тяжести устойчивы только распределения плотности с горизонтальными изохалинами. В результате под действием архимедовой силы возникает течение, стремящееся "спрямить" изохалины.

При отсутствии наклонных непротекаемых стенок изохалины на достаточном удалении от источника приняли бы форму горизонтальных плоскостей, поскольку в большинстве реальных ситуаций характерные времена инерционных процессов под действием силы тяжести существенно меньше характерных времен процессов диффузии. Однако именно наличие непроницаемых наклонных стенок существенно изменяет характер течения, так как условие непротекания соли на наклонных стенках приводит к тому, что вблизи поверхности этих стенок изохалины всегда нормальны к ним. В результате в течении постоянно присутствует механизм генерации пристеночного течения, компенсирующего негоризонтальность изохалин, и нисходящего течения в центральной области впадины, замыкающего вихревую структуру.

Условие (1.1) при записи уравнений гидромеханики позволяет избежать введения источникового члена и использовать систему стандартных уравнений в приближении Буссинеска [1]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + gS, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = k_s \Delta S$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – поле скоростей,  $p$  – давление за вычетом гидростатического, нормированное на  $\rho_0$  – плотность однородной жидкости в момент включения источника. В (1.1) и (1.2) соленость нормирована на коэффициент солевого сжатия и потому является безразмерной величиной. При этом плотность среды выражается через соленость с помощью линеаризованного уравнения состояния с постоянными коэффициентами  $\rho = \rho_0(1 + \beta S)$ , где  $\beta$  – коэффициент солевого сжатия.

**2. Выбор формы решения.** Решение задачи (1.1), (1.2) ищется в виде рядов Фурье по углу  $\varphi$  (суммирование от  $n = 1$  до  $n = \infty$ )

$$u = \sum u_n(r, t) \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \quad p = p_0(r, t) + \sum p_n(r, t) \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \quad (2.1)$$

$$v = \sum v_n(r, t) \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \quad S = S_0(r, t) + \sum S_n(r, t) \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha}$$

где  $u, v$  – радиальная и азимутальная компоненты скорости.

Представление (2.1) гарантирует выполнение граничных условий на наклонных стенках.

В связи с медленностью установления и малой интенсивностью течений, индуцируемых явлениями переноса вблизи наклонных стенок, решение задачи проводится методом последовательных приближений, в рамках которого коэффициенты Фурье в (2.1) разлагаются в ряды по степеням малости влияния нелинейных членов уравнений (1.2)

$$S_n(r, t) = S_n^{(0)} + S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \dots \quad (2.2)$$

Аналогичные ряды имеют место и для  $u_n, v_n$  и  $p_n$ .

Подстановка (2.2) в (1.1), (1.2) позволяет получить набор последовательных систем уравнений и граничных условий для  $S_n^{(i)}, u_n^{(i)}, v_n^{(i)}$  и  $p_n^{(i)}$ , при этом для всех  $i$  выполняются общие условия не бесконечности и начальные условия

$$u_n^{(i)} = v_n^{(i)} = S_n^{(i)} = p_n^{(i)} = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \text{ и при } t = 0$$

Кроме того, из второго уравнения (1.2) следует дополнительное граничное условие

$$\partial u_n^{(i)} / \partial r |_{r=a} = 0$$

Для членов нулевого приближения получается система уравнений вида

$$\frac{\partial S_n^{(0)}}{\partial t} = k_s \left( \frac{\partial^2 S_n^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_n^{(0)}}{\partial r} - \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{S_n^{(0)}}{r^2} \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

с начальными и граничными условиями

$$S_n^{(0)}(r, 0) = 0, \quad S_n^{(0)}(\infty, t) = 0$$

$$\left( k_s \frac{\partial S_0^{(0)}}{\partial r} + \gamma_s S_0^{(0)} \right) \Big|_{r=a} = \gamma_s S_{00}, \quad \left( k_s \frac{\partial S_n^{(0)}}{\partial r} + \gamma_s S_n^{(0)} \right) \Big|_{r=a} = 0$$

Видно, что  $u_n^{(0)} = v_n^{(0)} = S_n^{(0)} = 0$  для  $n = 1, 2, \dots$ .

**3. Построение решения с помощью интегральных преобразований в виде квадратур.** Решение уравнения (2.3) находится методом интегральных преобразований. Введем функцию

$$G_n^{(0)}(\xi, t) = \int_a^\infty S_n^{(0)}(r, t) \mathcal{L}(r, \xi, t) \rho(r) dr$$

где  $\mathcal{L}(r, \xi, t)$  – ядро интегрального преобразования,  $\rho(r)$  – весовая функция.

Применяя интегральное преобразование, определяющее функцию  $G_n^{(0)}(\xi, t)$ , к системе (2.3) и налагая условие, чтобы преобразованное уравнение не содержало интегральных членов, получим соотношения

$$\rho = r, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial r} + \left( \xi^2 - \frac{1}{r^2} \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \right) \mathcal{L}_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{\partial G_n^{(0)}}{\partial t} = -k_s \xi^2 G_n^{(0)} + k_s \left( \frac{\partial S_n^{(0)}}{\partial r} \mathcal{L}_n r - r S_n^{(0)} \frac{\partial \mathcal{L}_n^{(0)}}{\partial r} \right) \Big|_a^\infty$$

отсюда, используя начальные и граничные условия, получаем

$$G_n^{(0)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

(3.1)

$$G_0^{(0)}(\xi, t) = a \frac{\gamma_s S_{00}^{(0)}}{k_s \xi^2} \mathcal{L}_0^{(0)}(a, \xi) (\exp(-k_s \xi^2 t) - 1)$$

при этом ядро  $\mathcal{L}_0^{(0)}$  является решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_0^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{L}_0^{(0)}}{\partial r} + \xi^2 \mathcal{L}_0^{(0)} = 0 \quad \left( k_s \frac{\partial \mathcal{L}_0^{(0)}}{\partial r} + \gamma_s \mathcal{L}_0^{(0)} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (3.2)$$

Подчиняя решение уравнения (3.2) условию нормировки

$$\left( \sqrt{r} \frac{\partial \mathcal{L}_0^{(0)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 1$$

окончательно получаем

$$\mathcal{L}_0^{(0)} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \operatorname{sign}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha\gamma_s}{k_s}\right) \left(a\xi k_1 - \frac{\alpha\gamma_s}{k_s} k_2\right) \left(1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha\gamma_s}{k_s}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

$$k_1 = J_1(a\xi)N_0(r\xi) - J_0(r\xi)N_1(a\xi), \quad k_2 = J_0(\alpha\xi)N_0(r\xi) - J_0(r\xi)N_0(a\xi)$$

где  $J, N$  – функции Бесселя и Неймана.

Теперь, имея решения для функции  $G_0^{(0)}(\xi, t)$ , вид ядра  $K_0^{(0)}$  и весовой функции  $\rho$ , остается лишь обратить введенное интегральное преобразование, чтобы получить решение  $S_0^{(0)}(r, t)$ .

Известно [2], что если

$$g(\xi) = \int_a^\infty \psi(r, \xi)g(r)dr, \quad g(r) \in \mathcal{L}^2(a, \infty)$$

где  $\psi(r, \xi)$  – решение соответствующей начально-краевой задачи, то справедливо соотношение

$$g(r) = \int_{-\infty}^\infty g(\xi)\psi(r, \xi)d\sigma(\xi)$$

в котором последний интеграл определен в смысле Лебега – Стильтеса.

Дифференциал спектральной функции  $\sigma(\xi)$  определяется путем предельного перехода

$$d\sigma(\xi) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \operatorname{Im} m_\infty(\xi + i\varepsilon)d\xi$$

где  $m_\infty$  – уравнение предельной окружности, ограничивающей область решений класса  $\mathcal{L}^2(a, \infty)$  сингулярной задачи Штурма – Лиувилля.

Опуская промежуточные выкладки, связанные с вычислением дифференциала спектральной функции  $\sigma(\xi)$ , приведем окончательный результат для обратного преобразования

$$S_0^{(0)}(r, t) = A_0 \int_0^\infty K_0^{(0)}(r, \xi)(e^{-k_s \xi^2 t} - 1)d\xi, \quad A_0 = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha\gamma_s}{k_s} S_{00} \quad (3.4)$$

$$K_0^{(0)} = \frac{1}{\xi} \left(a\xi k_1 - \frac{\alpha\gamma_s}{k_s} k_2\right) \left\{ \left(a\xi J_1(a\xi) - \frac{\alpha\gamma_s}{k_s} J_0(a\xi)\right)^2 + \left(a\xi N_1(a\xi) - \frac{\alpha\gamma_s}{k_s} N_0(a\xi)\right)^2 \right\}^{-1}$$

Данное приближение описывает начальный этап формирования течения, когда распределение солёности создается исключительно диффузией частиц в жидкости и зависит только от радиальной координаты "r", движение в среде отсутствует. В результате формируется распределение солёности с изохалинами, представляющими собой дуги окружностей с центром в начале координат, нарушается гидростатическое равновесие жидкости и возникает течение, компенсирующее как дефицит солёности вблизи наклонных стенок впадины, так и ее избыток в центре.

Теперь, после того как рассчитано нулевое приближение распределения солёности  $S^{(0)}$ , определим, какое поле скоростей возникает в среде как реакция на это нулевое приближение. Система уравнений для первого приближения поля скоростей с начальными и граничными условиями

$$u_n^{(1)}(r, 0) = v_n^{(1)}(r, 0) = 0, \quad u_n^{(1)}(a, t) = v_n^{(1)}(a, t) = \frac{\partial u_n^{(1)}(r, t)}{\partial t} \Big|_{r=a} = 0$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(ru_n^{(1)}) + \frac{n\pi}{\alpha}v_n^{(1)} &= 0, \quad n=1,2,\dots \\ \frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial t} &= -\frac{\partial p_n^{(1)}}{\partial r} + v \left( \frac{\partial^2 u_n^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left( \left( 1 + \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \right) u_n^{(1)} + 2 \frac{n\pi}{\alpha} v_n^{(1)} \right) \right) + \\ &+ 2S_0^{(0)} g(-1)^n \frac{\alpha \sin \alpha}{(n\pi)^2 - \alpha^2} \\ \frac{\partial v_n^{(1)}}{\partial t} &= \frac{n\pi}{\alpha r} p_n^{(0)} + v \left( \frac{\partial^2 v_n^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_n^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left( \left( 1 + \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \right) v_n^{(1)} + 2 \frac{n\pi}{\alpha} u_n^{(1)} \right) \right) - \\ &- 2S_0^{(0)} g(-1)^n \frac{n\pi \sin \alpha}{(n\pi)^2 - \alpha^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $u, v$  – радиальная и азимутальная компоненты скорости соответственно.

Решая задачу (3.5) с помощью метода интегральных преобразований аналогично тому, как это было проделано выше для  $S_0^{(0)}$ , получим квадратурные формулы для первого приближения поля скоростей

$$u_n^{(1)}(r,t) = -A_n \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \int_0^\infty \frac{\Phi_n(\xi,t) L_n(r,\xi)}{\xi \{ J_{\mu_n}^2(a\xi) + N_{\mu_n}^2(a\xi) \}} d\xi \quad (3.6)$$

$$v_n^{(1)}(r,t) = -\frac{\alpha}{n\pi} \frac{\partial}{\partial r}(ru_n^{(1)})$$

$$L_n = \frac{1}{r\sqrt{a}} (N_{\mu_n}(r\xi) J_{\mu_n}(a\xi) - J_{\mu_n}(r\xi) N_{\mu_n}(a\xi)), \quad \mu_n = \frac{n\pi}{\alpha}$$

$$\Phi_n = \int_a^\infty r^2 L_n \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_0^\infty K_0^{(0)} \left( \frac{e^{-k_s \eta^2 t} - e^{-v\xi^2 t}}{v\xi^2 - k_s \eta^2} + \frac{e^{-v\xi^2 t} - 1}{v\xi^2} \right) d\eta \right\} dr$$

$$A_n = 2g(-1)^n \frac{\alpha \sin \alpha}{(n\pi)^2 - \alpha^2} A_0$$

Возникшее течение искажает распределение нулевого приближения  $S_0^{(0)}$  и приводит к появлению поправок первого приближения, определяемых как решение начально-краевой задачи вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_0^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^\infty \frac{\partial}{\partial r}(r S_n^{(0)} u_n^{(1)}) &= k_s \left( \frac{\partial^2 S_0^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_0^{(1)}}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial S_n^{(1)}}{\partial t} - k_s \left( \frac{\partial^2 S_n^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_n^{(1)}}{\partial r} - \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{S_n^{(1)}}{r^2} \right) &= -u_n^{(1)} \frac{\partial S_0^{(0)}}{\partial r}, \quad n=1,2,\dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$k_s \frac{\partial S_n^{(1)}}{\partial r} + \gamma_s S_n^{(1)} \Big|_{r=a} = 0, \quad S_n^{(1)}(r,0) = 0, \quad n=0,1,2,\dots$$

Из первого уравнения (3.7) видно, что  $S_0^{(1)} = 0$ , так как  $S_n^{(0)} = 0$  при  $n = 1, 2, \dots$  В

дальнейшем уравнения для  $S_0^{(m)}$  будут иметь вид аналогичный уравнению для  $S_0^{(1)}$  из системы (3.7), поэтому  $S_0^{(m)} = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , а  $S_{00}^{(0)} = S_{00}$ .

Проводя решение оставшихся уравнений (3.7) вышеупомянутым методом интегральных преобразований, получим поправки первого приближения к распределению солености

$$S_n^{(1)} = \frac{2 \cos \alpha}{\pi \sqrt{a}} \int_0^\infty K_n^{(1)}(r, \xi) G_n^{(1)}(r, \xi) d\xi \quad (3.8)$$

$$K_n^{(1)} = \xi \left( a\xi m_1 + \frac{a\gamma_s}{k_s} m_2 \right) \left( (a\xi J'_{\mu_n}(a\xi)h + J_{\mu_n}(a\xi)f)^2 + (a\xi N'_{\mu_n}(a\xi)h + N_{\mu_n}(a\xi)f)^2 \right)^{-1}$$

$$m_1 = J'_{\mu_n}(a\xi)N_{\mu_n}(r\xi) - N'_{\mu_n}(a\xi)J_{\mu_n}(r\xi), \quad m_2 = J_{\mu_n}(a\xi)N_{\mu_n}(r\xi) - N_{\mu_n}(a\xi)J_{\mu_n}(r\xi)$$

$$h(\alpha) = \cos \alpha, \quad f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{2} - \sin \alpha$$

Функция  $G_n^{(1)}(\xi, t)$  является решением задачи

$$\frac{\partial G_n^{(1)}}{\partial t} + k_s \xi^2 G_n^{(1)} = \int_a^\infty u_n^{(1)} K_n^{(1)} r^3 \frac{\partial S_0^{(0)}}{\partial r} dr, \quad G_n^{(1)}(\xi, 0) = 0$$

Продолжая этот процесс, можно получить поправки следующих приближений, вклад которых в суммарные распределения полей скорости, солености и давления будет уменьшаться.

**4. Анализ результатов.** На основании полученных результатов можно сделать некоторые качественные выводы. В соотношение (3.8), определяющее поправки первого приближения  $S_n^{(1)}$  к распределению солености, входит функция  $G_n^{(1)}(r, \xi)$ , характеристики которой в свою очередь задаются функциями  $u_n^{(1)}$  и  $S_0^{(0)}$ . Величина  $S_0^{(0)}$  определяется соотношением (3.4), а характерные особенности поля скоростей  $u_n^{(1)}$  описываются интегральным представлением функции  $\Phi_n(\xi, t)$ , входящей в соотношения (3.6). Из (3.4), (3.6) и (3.8) видно, что интегральное представление для  $S_n^{(1)}$  является сингулярно возмущенным по отношению к параметру  $Sc = \sqrt{k_s / \nu}$ , который в реальных средах принимает малые значения (при  $Sc = 0$  понижается порядок дифференциальных уравнений). Это указывает на то, что в данной задаче нельзя пренебрегать эффектами диффузии по сравнению с вязкими эффектами.

В ядрах интегральных выражений (3.4), (3.6) и (3.8) присутствуют члены  $\exp^{-\nu \eta^2 t}$ ,  $\exp^{-k_s \xi^2 t}$  и  $\exp^{-k_s \xi^2 t - \nu \eta^2 t}$ . Именно они определяют формирование пограничных течений как вблизи стенок, так и на поверхности источника соли. Подобно изложенному ранее [3], члены первых двух типов описывают формирование скоростного и плотностного пограничных слоев, толщины которых в начальные моменты растут как  $\delta_u \sim \sqrt{\nu t}$  и  $\delta_\rho \sim \sqrt{k_s t}$ . В то же время в отличие от полученных ранее результатов [3] толщины слоев во впадине конечной ширины не могут расти неограниченно. Член последнего типа характеризует комбинационный масштаб  $\delta_{\text{comb}} = (k_s \nu t^2)^{1/4}$ , т.е. в отличие от течения вблизи наклонной плоскости здесь имеет место не полное, а частичное расщепление масштабов.

Полученные решения аналитичны по всем физическим переменным, в том числе и по  $\gamma_s$ , в том смысле, что при  $\gamma_s \rightarrow \infty$  все решения гладко переходят в решения задачи,

в которой в качестве граничного условия на источнике используется условие  $S(a, t) = S_{00}$ . Решения для такого типа граничных условий также получены в виде квадратур, но здесь не приводятся. Следует также заметить, что решения аналитичны и в предельных случаях, когда угол "раскрытия" впадины  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi/2$ .

Применение асимптотических методов при вычислении интегралов для случая, когда  $\xi a \gg 1$ , позволяют получить приближенные результаты, описывающие динамику возникновения распределения соли во впадине.

Например, для нулевого приближения получаем

$$S_0^{(0)}(\rho, t) = S_{00}[\operatorname{erfc} \zeta - 2e^{-\lambda(\rho-1)} + e^{\lambda^2 \tau_s} e^{-\lambda(\rho-1)} \operatorname{erfc}(\lambda\sqrt{\tau_s} - \zeta)] \quad (4.1)$$

$$\xi = \frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau_s}}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \tau_s = \frac{k_s t}{a^2}, \quad \lambda = \frac{\alpha \gamma_s}{k_s}$$

Видно, что это распределение характеризуется не только пограничным слоем (первый член в квадратных скобках), но и фронтом инъекции (два последних члена).

Громоздкие выражения для других асимптотических формул не приводятся.

Необходимо отметить, что в асимптотическом решении (4.1) присутствуют две новые переменные:  $\zeta$  и  $\lambda\sqrt{\tau_s} - \zeta$  полученные на основе интегральных преобразований.

С другой стороны, групповой анализ исходной системы уравнений (1.2) выделяет эти переменные как инварианты генераторов группы Ли, соответствующей уравнениям (1.2). Этот факт указывает на возможность создания более универсального метода решения подобных задач, который мог бы упростить получение окончательных (хотя бы и квадратурных) формул. Суть такого подхода можно сформулировать следующим образом. На первом этапе осуществляется групповой анализ исследуемой краевой задачи, определяются характерные переменные, удобные при нахождении решения, после чего задача формулируется в этих новых переменных. На втором этапе к переформулированной задаче применяется метод интегральных преобразований, реализация которого будет заметно облегчена, так как переменные, отвечающие пограничным слоям, будут разделены с переменными, описывающими структуру фронтов инъекции.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-05-64004).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Океанология. Физика океана / Отв. ред.: В.М. Каменкович, А.С. Монин. Гидрофизика океана. Т. 1. М.: Наука, 1978. 455 с.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970, 710 с.
3. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно-стратифицированной среде // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 50–56.