УДК 532.59:534.1

© 1998 г. В.Ф. Санников

УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО МЕТОДАМ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, СОЗДАВАЕМЫХ ДВИЖУЩИМСЯ ДИПОЛЕМ

На случай произвольной стратификации обобщаются известные результаты о расположенных в окрестности плоскости симметрии волнового следа особенностях фундаментального решения линейного уравнения внутренних волн в приближении Буссинеска, полученные для случая экспоненциальной стратификации. Используются известные асимптотические разложения по номеру моды для собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля. Выделена не только главная особенность, которую можно получить методом "замороженных коэффициентов", но и следующая по порядку особенность и показано, что это существенно для приближенного вычисления волновой картины вблизи плоскости симметрии следа.

Известные [1, 2] решения аналогичных задач представляют поле возмущений жидкости в виде разложений по модам внутренних волн. Имеются две области нерегулярности соответствующих рядов: ближнее поле и окрестность плоскости симметрии волнового следа. Были получены [3][1] конструктивные формы представления решения для этих областей в частном случае равномерной стратификации, выделен [4] главный член особенности ближнего поля для произвольного распределения частоты Брента – Вяйсяля. Ниже обобщаются результаты автора[1], относящиеся к обеим областям нерегулярности, для жидкости с переменной стратификацией, имеющей один максимум частоты Брента – Вяйсяля.

1. Постановка задачи. Рассматривается поле возмущений, создаваемых равномерно движущимся погруженным диполем в слое невязкой несжимаемой вертикально стратифицированной жидкости.

Пусть жидкость занимает область $-\infty < x_1, y < \infty, -h < z < 0$, частота Брента – Вяйсяля $N(z)$ зависит от одной вертикальной координаты z. На глубине h_0 от верхней границы жидкости $z = 0$ в отрицательном направлении горизонтальной оси x_1 с постоянной скоростью c движется точечный диполь, имеющий момент M и ориентированный по направлению движения. В системе координат, связанной с диполем $x = x_1 - ct$, в линейной постановке с использованием приближения Буссинеска и условия "твердой крышки" на поверхности $z = 0$ установившееся поле вертикальных смещений частиц жидкости $\zeta(x, y, z)$ описывается уравнением с граничными условиями

$$\Delta\zeta_{xx} + N^2(z)c^{-2}\Delta_2\zeta = Mc^{-1}\delta(x,y,z+h_0)_{xxz}, \quad \zeta(-h)=\zeta(0)=0 \tag{1.1}$$

$$(\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad \Delta = \Delta_2 + \partial^2/\partial z^2)$$

к которым необходимо добавить условие излучения: основные волновые возмущения формируются за диполем.

[1] См. также: *Санников В.Ф.* Особенности разложения по модам поля волн, создаваемых точечным диполем в потоке стратифицированной жидкости. Севастополь. 1990. 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.06.1990. № 3700–B90.

Было получено [2] точное решение задачи (1.1) в виде однократных интегралов от разложения по модам ($H(\cdot)$ – функция Хэвисайда)

$$\zeta = M(2\pi c)^{-1}[\zeta_0(|x|, y, z) + H(x)\zeta_1(x, y, z)] \tag{1.2}$$

$$\zeta_0 = \operatorname{Im} \int_0^{i\cdot\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp(-|\beta_n^{1/2}|\mu) H(-\beta_n) d\theta \tag{1.3}$$

$$\zeta_1 = -\operatorname{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp(i\beta_n^{1/2}\mu) d\theta \tag{1.4}$$

$$\mu = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad \lambda = (c\cos\theta)^{-2}$$

$$\varphi_n(z, h_0; \lambda) = w_n(z;\lambda) w_{nz}(-h_0;\lambda) \left(\int_{-h}^{0} w_n^2(z;\lambda) dz \right)^{-1}$$

В выражения (1.3), (1.4) входят собственные значения $\beta_n(\lambda)$, ($\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots$) и собственные функции $w_n(z;\lambda)$ задачи Штурма – Лиувилля

$$w_{zz} + [N^2(z)\lambda - \beta]w = 0 \ \ (-h < z < 0), \quad w(-h) = w(0) = 0 \tag{1.5}$$

В формуле (1.2) выделены две составляющие поля вертикальных смещений. В первой из них (ζ_0) волновые числа в модовом разложении – чисто мнимые, поэтому ζ_0 описывает ближнее поле возмущений жидкости. Во второй составляющей (ζ_1) волновые числа действительные и ζ_1 представляет волновой след за диполем.

Разложение $\zeta(x, y, z)$ в сумму мод наиболее удобно для расчетов поля возмущений в случаях, когда можно ограничиться небольшим числом мод. Учет многих слагаемых в (1.3), (1.4) или в аналогичных формулах [1] требует установления соответствующего числа дисперсионных зависимостей $\beta_n(\lambda)$ и собственных функций $w_n(z;\lambda)$ в широком диапазоне изменения параметра λ, что приводит к большому объему вычислений в практически важных случаях, когда $\beta_n(\lambda)$ и $w_n(z;\lambda)$ не могут быть найдены аналитически.

Имеются две области поля возмущений, которые в этой связи следует принять во внимание. Первая из них – ближняя область $R < h$, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, где ряд (1.3) сходится медленно, а его слагаемые имеют логарифмическую особенность при $R = 0$. Вторая область – окрестность плоскости симметрии волнового следа $y = 0$, входящая в зону основных волновых возмущений всех мод.

Конструктивная форма представления $\zeta(x, y, z,)$ для этих областей может быть получена выделением особенностей слагаемых решения ζ_0 и ζ_1, благодаря чему достигается более быстрая сходимость соответствующих рядов (см. работу, цитированную в сноске).

2. Выделение особенности ближнего поля. Исследование ряда (1.3) проведем опираясь на то, что на пути интегрирования в (1.3) значения параметра λ ограничены ($0 \leqslant \lambda \leqslant c^{-2}$).

Воспользуемся асимптотиками собственных значений и собственных функций задачи (1.5) при $n \to \infty$

$$\beta_n = -k_n^2, \quad k_n = \frac{\pi n}{h} - \lambda\frac{r(0)}{\pi n} + O\left(\frac{\lambda}{n^2}\right)$$

$$w_n(z;\lambda) = \sin\frac{\pi n z}{h} + \frac{\lambda}{\pi n} q(z) \cos\frac{\pi n z}{h} + O\left(\frac{\lambda}{n^2}\right) \tag{2.1}$$

$$r(z)=\frac{1}{2}\int_{-h}^{z} N^2(z_1)dz_1, \quad q(z)=r(z)h-r(0)(z+h)$$

Достаточным условием справедливости (2.1) является [5] ограниченность вариации функции $N^2(z)$. Используя (2.1), находим равномерную по параметру интегрирования θ асимптотику при $n \to \infty$ членов ряда (1.3)

$$\varphi_n \exp(-k_n\mu)=b_{n0}+b_{n1}+\varepsilon_n, \quad \varepsilon=O(\lambda|\mu|/n)$$

$$b_{n0}=\pi n B_n f_{n0}, \quad b_{n1}=\lambda B_n[f_{n1}+r(0)\mu f_{n0}]; \quad B_n=\frac{1}{h^2}\exp\left(-\frac{\pi n}{h}\mu\right)$$

$$f_{nk}=f_{nk}^{+}+f_{nk}^{-}, \; k=0,1; \quad f_{n0}^{\pm}=\sin\frac{\pi n}{h}(z\pm h_0), \quad f_{n1}^{\pm}=p_{\mp}(z)\cos\frac{\pi n}{h}(z\pm h_0)$$

$$p_{\pm}(z)=q(z)\pm q(-h_0)$$

Представим теперь выражение для ζ_0 в виде

$$\zeta_0=\zeta_{00}+\zeta_{01}+\zeta_{02} \tag{2.2}$$

$$\zeta_{0k}=\operatorname{Im}\int_0^{i\cdot\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{nk}d\theta, \quad k=0,1 \tag{2.3}$$

$$\zeta_{02}=\operatorname{Im}\int_0^{i\cdot\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n\exp(-k_n\mu)H(-\beta_n)-b_{n0}-b_{n1}]d\theta \tag{2.4}$$

Отметим, что ряды в (2.3) расходятся при $R = 0$, а ряд в (2.4) такой особенности уже не имеет.

Преобразуем теперь ζ_{00} и ζ_{01} к виду, позволяющему вычислять ζ_0 при малых значениях R. Для этого сначала при помощи формулы суммирования Пуассона трансформируем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n0}=-\frac{\mu}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mu^2+(d_m+h_0)^2}+\frac{1}{\mu^2+(d_m-h_0)^2}\right]$$

$$d_m=z+2mh$$

Затем, подставив полученный ряд в выражение для ζ_{00} и проинтегрировав его почленно, получаем следующее, сходящееся при всех R, выражение:

$$\zeta_{00}(x,y,z)=\eta_0(R,z+h_0)+\eta_0(R,z-h_0) \tag{2.5}$$

$$\eta_0(R,z)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m(d_m^2+R^2)^{-3/2}$$

Аналогичное выражение для ζ_{01} выводим, используя (2.5). Сначала заметим, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\zeta_{01}=\frac{1}{c^2h}\left[p_+\frac{\partial}{\partial z}\eta_0(R,z-h_0)+p_-\frac{\partial}{\partial z}\eta_0(R,z+h_0)-r(0)\left(R\frac{\partial}{\partial R}+2\right)\zeta_{00}\right]$$

Подставив в эту формулу η_0 и ζ_{00} из (2.5) и проинтегрировав затем полученные ряды дважды по x, находим

$$\zeta_{01}=p_+\eta_1(x,y,z-h_0)+p_-\eta_1(x,y,z+h_0)+r(0)[\eta_2(x,y,z-h_0)+\eta_2(x,y,z+h_0)] \tag{2.6}$$

$$\eta_\nu=\frac{1}{2c^2h}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{d_m^{\nu-1}}{(y^2+d_m^2)^2}\left[x(d_m^2-y^2)-x^2\frac{d_m^2}{\sqrt{R^2+d_m^2}}+y^2\sqrt{R^2+d_m^2}\right]$$

Члены с номером $m = 0$ рядов $\eta_0(R, z)$ и $\eta_\nu(x, y)$ ($\nu = 1, 2$) являются нерегулярными в точке, в которой помещен диполь $x = y = 0$, $z = -h_0$ – они вобрали в себя особенность решения, а сами ряды сходятся всюду. В случае отсутствия стратификации (однородная жидкость, $N^2(z) \equiv 0$) функция $M(2\pi c)^{-1}\zeta_{00}$ является точным решением задачи (1.1).

Итак, выражение (2.2), в котором ζ_{00} вычисляется по формуле (2.5), а ζ_{01} – по формуле (2.6), позволяет рассчитывать слагаемое ζ_0 решения рассматриваемой задачи в ближней области поля возмущений. Заметим, что поскольку члены ряда в выражении для ζ_{01} из (2.2) при $R = 0$ не убывают с ростом n, то выделение только ζ_{00} не было бы достаточным.

Примеры, иллюстрирующие улучшение сходимости разложения по модам ζ_0 после выделения особенности для $N^2(z) = \text{const}$, $y = 0$ имеются в работе, цитированной в сноске. Как показали расчеты, описанная выше процедура наиболее эффективна в случае, когда скорость перемещения диполя c превышает скорости распространения длинных внутренних волн c_n.

3. Преобразование выражения для волнового слагаемого. Получить асимптотику членов ряда ζ_1, используя непосредственно формулу (1.4), затруднительно, поскольку на пути интегрирования в (1.4) параметр λ задачи (1.3) не ограничен. Поэтому здесь требуется другое выражение для ζ_1, допускающее равномерную оценку членов соответствующего ряда при $n \to \infty$. Двойной интеграл, из которого была получена [2] формула (1.4), может быть записан в виде

$$\zeta_1 = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int_0^{\pi/2}\left\{\int_{\sigma_-} D\,d\beta - \int_{\sigma_+} D\,d\beta\right\}d\theta \tag{3.1}$$

$$D = -\frac{\partial}{\partial h_0}G(z-h_0;\lambda,\beta)\sin(\beta^{1/2}x\cos\theta)\cos(\beta^{1/2}y\sin\theta), \quad \operatorname{Re}\beta^{1/2} \geqslant 0$$

где $G(z, \xi; \lambda, \beta;)$ – функция Грина задачи (1.5), путь интегрирования σ_- идет вдоль действительной оси от нуля до бесконечности, обходя полюсы G снизу по малым полуокружностям в комплексной плоскости параметра β, путь σ_+ комплексно сопряжен σ_-.

Произведя замену переменных

$$\beta = \lambda\tau^2; \quad \lambda = (c\cos\theta)^{-2}; \quad d\theta = (2c\lambda)^{-1}(\lambda - c^{-2})^{-1/2}d\lambda$$

изменим в (3.1) порядок интегрирования. Далее, воспользовавшись тем, что на дисперсионных кривых $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\beta \geqslant 0$ [2], приведем выражение для ζ_1 к виду

$$\zeta_1 = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int_0^{N_m}\tau\sin\frac{x\tau}{c}\left\{\int_{\omega_-} F\,d\lambda - \int_{\omega_+} F\,d\lambda\right\}d\tau \tag{3.2}$$

$$F = -\frac{\partial G}{\partial h_0}\frac{\cos(y\tau\sqrt{\lambda - c^{-2}})}{\sqrt{\lambda - c^{-2}}}$$

Путь интегрирования ω_- идет вдоль действительной оси параметра λ от c^{-2} до бесконечности, обходя полюсы G снизу, путь ω_+ комплексно сопряжен ω_-. Переменные интегрирования в (3.2) являются параметрами задачи

$$v_{zz} + \lambda Q(z;\tau)v = 0 \quad (-h < z < 0), \quad v(0) = v(-h) = 0; \quad Q = N^2(z) - \tau^2 \tag{3.3}$$

При действительных $\tau \geqslant N_m = \max N(z)$ задача (3.3) не имеет положительных собственных значений λ. Следовательно, при $\tau \geqslant N_m$ функция Грина не имеет полюсов в окрестности положительной части действительной оси λ. Поэтому интегрирование по τ в (3.2) можно вести в конечных пределах от 0 до N_m.

Вычисляя внутренние интегралы в (3.2) при помощи теоремы о вычетах, получаем

$$\zeta_1 = \frac{2}{c}\int_0^{N_m} \tau \sin\frac{x\tau}{c} H(\lambda_n - c^{-2}) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y,z,h_0;\tau)d\tau \tag{3.4}$$

$$f_n = \psi_n \cos(y\tau\sqrt{\lambda_n - c^{-2}}) / \sqrt{\lambda_n - c^{-2}}$$

$$\psi_n(z,h_0;\tau) = \upsilon_n(z,\tau)\upsilon_{nz}(-h_0;\tau)\left[\int_{-h}^{0} Q(z;\tau)\upsilon_n^2(z;\tau)dz\right]^{-1}$$

где $\lambda_n(\tau)$ и $\upsilon_n(z;\tau)$ – собственные значения и собственные функции задачи (3.3).

Выражение (3.4) более удобно для анализа, чем (1.4), поскольку сопутствующая задача (1.5) приведена к виду (3.3).

4. Выделение особенности волнового слагаемого. Асимптотика f_{n0} членов ряда (3.4) при $n \to \infty$ выводится из известных [6] асимптотик собственных значений λ_n и собственных функций υ_n задачи (3.3). Вид асимптотик λ_n и υ_n при $n \to \infty$ зависит от числа точек поворота – решений уравнения $N(z) = \tau$. Будем полагать, что функция $N(z)$ достаточно гладкая и либо монотонна, либо имеет один максимум в точке $z = z_m$, $N_m = N(z_m)$ и $N'(z) \neq 0$ при $z \neq z_m$. Тогда задача (3.3) имеет не более двух точек поворота $z_1(\tau) < z_2(\tau)$ при $0 \leqslant \tau < N_m$ и $Q(z;\tau) > 0$ при $z_1 < z < z_2$. Доопределим функции $z_k(\tau)$ $(k = 1, 2)$ следующим образом: положим $z_1(\tau) = -h$, когда $Q(-h;\tau) > 0$ и $z_2(\tau) = 0$, когда $Q(0;\tau) > 0$. Обозначим еще через ν число точек поворота. Теперь известные формулы [6] для асимптотик λ_n и υ_n при $\nu = 0$, 1 или 2 можно записать в виде

$$\lambda_n^{1/2} = \lambda_{n0}(\tau)/J(\tau) + O(n^{-1}), \quad \lambda_{n0} = \pi n - \nu\pi/4$$

$$\upsilon_n(z;\tau) = Q^{-1/4}\sin[\lambda_{n0}I/J + \varepsilon_\nu\pi/4] + O(n^{-1}), \quad Q(z;\tau) > 0 \tag{4.1}$$

$$\upsilon_{nz}(-h_0;\tau) = Q_0^{1/4}\lambda_{n0}J^{-1}\cos[\lambda_{n0}I_0/J + \varepsilon_\nu\pi/4] + O(1)$$

$$\upsilon_n(z;\tau) = O(n^{-\infty}), \quad \upsilon_{nz}(z;\tau) = O(n^{-\infty}), \quad Q(z;\tau) < 0$$

$$Q_0(\tau) = Q(-h_0,\tau); \quad \varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$$

$$I(z,\tau) = \int_{z_1}^{z} \sqrt{Q(z',\tau)}dz', \quad I_0(\tau) = I(-h_0,\tau)$$

$$J = \int_{-h}^{0} Q(z,\tau)\upsilon_n^2(z,\tau)dz = \frac{1}{2}I(z_2,\tau) + O(n^{-1})$$

Асимптотики (4.1) для λ_n неприменимы, когда $|\tau - N(-h)| \ll 1$, $|\tau - N(0)| \ll 1$ и $|\tau - N_m| \ll 1$. Асимптотики собственных функций не применимы, кроме того, в окрестностях точек поворота при $|z - z_k(\tau)| \ll 1$. Равномерные асимптотики решений задачи (3.4) выражаются через функции Эйри [6]. Можно показать, что погрешности от использования неравномерных асимптотик в интеграле (3.4) имеют меньший порядок при $n \to \infty$, чем главные члены асимптотик. Из формул (4.1) выводим, что при $n \to \infty$

$$f_n \sim f_{n0}$$

$$f_{n0} = \frac{2}{J}\left(\frac{Q_0}{Q}\right)^{1/4} \sin\left[\lambda_{n0}\frac{I}{J} + \varepsilon_\nu\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\lambda_{n0}\frac{I_0}{J} + \varepsilon_\nu\frac{\pi}{4}\right]\cos\left(\lambda_{n0}\frac{y\tau}{J}\right) \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что $f_n = O(1)$ при $n \to \infty$, поэтому ряды

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n0} \tag{4.3}$$

необходимо рассматривать в обобщенном смысле.

Подставив (4.2) в (4.3), преобразуем сначала произведение тригонометрических функций в суммы. Затем, используя формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha = -\frac{1}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{\alpha}{\pi} - 2m\right)$$

выводим следующие выражения:

$$S_0 = \frac{1}{4J}\left(\frac{Q_0}{Q}\right)^{1/4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}D_- + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}D_+\right), \quad \nu = 0$$

$$S_0 = \frac{1}{2J}\left(\frac{Q_0}{Q}\right)^{1/4}\left\{\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{4}D_-\right)^{-1} + \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}D_+\right)^{-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m[\delta(D_- + 2 - 4m) + \delta(D_+ - 4m)]\right\}, \quad \nu = 1 \tag{4.4}$$

$$S_0 = \frac{1}{2J}\left(\frac{Q_0}{Q}\right)^{1/4}\left[\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}D_-\right)^{-1} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta(D_+ - 2m)\right], \quad \nu = 2$$

$$D_{\pm} = (I \pm I_0 - y\tau)/J$$

Таким образом, найдены суммы ряда S_0 – функции сингулярности, вобравшей в себя особенность подынтегральной функции (3.4). Формула

$$\zeta_1 = \zeta_{10} + \eta_1 \tag{4.5}$$

$$\zeta_{10} = \frac{2}{c}\int_0^{N_m} \tau \sin\frac{x\tau}{c} S_0 d\tau$$

$$\eta_1 = \frac{2}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{N_m} \tau\sin\frac{x\tau}{c} H(\lambda_n - c^{-2}) f_n d\tau - \int_{\Omega} \tau\sin\frac{x\tau}{c} f_{n0} d\tau\right]$$

где Ω – интервал по τ, на котором $Q(z', \tau) > 0$, представляет собой сумму слагаемых с выделенной особенностью и сходящимся рядом и позволяет рассчитывать волновые возмущения жидкости, генерируемые диполем в окрестности плоскости $y = 0$.

Примеры, иллюстрирующие улучшение сходимости разложения по модам ζ_1 в результате двух шагов выделения особенностей для $N^2(z)$ = const вместе с портретами возмущений жидкости в плоскости $y = 0$ имеются в работе, цитированной в сноске.

Заметим, что особенность слагаемого ζ_1 выделена при более сильном ограничении на гладкость функции $N(z)$, чем это требовалось для ζ_0. В частности, при кусочно-постоянной функции $N(z)$, упрощающей расчет дисперсионных зависимостей задач (1.5) и (3.3), асимптотики (4.1) и выведенные из них асимптотики членов ряда (3.4) не имеют места.

Анализ полученных формул (1.2), (2.2) и (4.5) показывает сравнительно простую зависимость слагаемых ζ_0 и ζ_1 от скорости перемещения диполя c. При $c \gg 1$ в ближней области возмущения жидкости слабо зависят как от параметра c, так и от стратификации, а волновые возмущения за диполем имеют порядок c^{-1}, причем их продольный масштаб пропорционален c, а поперечный от c зависит слабо.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровиков В.А., Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Левченко Е.С.* О расчете поля внутренних гравитационных волн, генерируемых неподвижным источником в потоке стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1989. № 4. С. 58–61.
2. *Санников В.Ф.* Точные решения линейной задачи об установившихся волнах, создаваемых диполем в потоке стратифицированной жидкости // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 972–977.
3. *Тер-Крикоров А.М.* Стратифицированные потоки и дипольные приближения // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 587–592.
4. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Ближнее поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых источником в потоке стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1991. № 1. С. 24–28.
5. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 351 с.
6. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1970. 671 с.

Севастополь

Поступила в редакцию
2.XII.1997