УДК 531.36:62–50

© 1998 г. Р. Габасов, Е.А. Ружицкая

РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОГРАНИЧЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Рассматривается задача стабилизации линейных систем, параметры которых известны с ограниченной точностью (робастная стабилизация). Для построения ограниченных стабилизирующих обратных связей используются методы оптимального управления, позволяющие получать позиционные решения специальных вспомогательных задач оптимального управления. Реализация предложенных методов стабилизации существенным образом опирается на возможности современной вычислительной техники. Результаты иллюстрируются на примерах робастной стабилизации динамических систем третьего и четвертого порядков.

В большинстве опубликованных работ по робастной стабилизации или задается структура стабилизирующей обратной связи, или игнорируются ограничения на стабилизирующие воздействия, или имеет место то и другое одновременно. Понятно, что искусственные ограничения на структуру обратных связей и пренебрежение геометрическими ограничениями на управления слабо согласуются с современными требованиями к системам управления. В связи с этим был предложен [1, 2] метод стабилизации детерминированных систем с использованием теории оптимального управления, в которой наиболее полно учитываются упомянутые требования. Цель работы – распространить этот метод на проблему робастной стабилизации.

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему, поведение которой при $t \geqslant 0$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{1.1}$$

$$(x, b \in R^n, u \in R, A \in R^{n\times n}, \operatorname{rank}(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n)$$

где $x = x(t)$ – n-вектор состояния системы в момент времени t, $u = u(t)$ – значение скалярного управления.

Предположим, что доступная информация о параметрах A, b системы неточная: $(n \times n)$-матрица A и n-вектора b таковы, что

$$A = A_0 + \Delta A, \quad b = b_0 + \Delta b$$

где A_0, b_0 – известные $(n \times n)$-матрица и n-вектор соответственно, ΔA, Δb – неизвестные $(n \times n)$-матрица и n-вектор, удовлетворяющие неравенствам

$$\|\Delta A\| \leqslant \alpha, \quad \|\Delta b\| \leqslant \beta \quad (\alpha, \beta > 0)$$

Пусть G – ограниченная окрестность состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1), $u = 0$.

При заданном $\varepsilon > 0$ и фиксированных числах $\nu > 0$, $L > 0$ функцию

$$u(t, x), \quad x \in G, \quad t \in [0, \nu[\tag{1.2}$$

назовем ограниченным робастным стабилизирующим программно-позиционным управлением (ППУ) системы (1.1) в области G, если

1) $u(t, 0) = 0,\ t \in [0, \nu[$;

2) $|u(t, x)| \leqslant L,\ x \in G,\ t \in [0, \nu[$;

3) траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x),\quad x(0) = x_0,\quad x_0 \in G \tag{1.3}$$

является непрерывным решением уравнения

$$\dot{x} = Ax + bu(t),\ x(0) = x_0$$

при $u(t) = u(t - k\nu, x(k\nu)),\ t \in [k\nu, (k+1)\nu[,\ k = 0, 1, \ldots$;

4) система (1.3) при $A \equiv A_0$, $b \equiv b_0$ асимметрически устойчива в G;

5) существует такое число $t(\varepsilon) > 0$, что каждое решение $x(t)$, $t \geqslant 0$, системы (1.3) удовлетворяет условию $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$, $t \geqslant t(\varepsilon)$.

Явное (формульное) построение стабилизирующей функции (1.2), удовлетворяющей перечисленным требованиям с достаточно большой областью G, выходит за рамки возможностей математических методов современной теории управления. Цель последующего изложения – показать, что существует обходной метод индивидуальной робастной стабилизации, опирающейся на средства вычислительной техники. Основная идея предлагаемого подхода состоит во введении вспомогательной (сопровождающей) задачи оптимального управления, в построении для нее программно-позиционного решения, в доказательстве стабилизирующих свойств этого решения и в реализации программно-позиционного решения сопровождающей задачи с помощью оптимального регулятора. Будет показано, что алгоритм работы оптимального регулятора можно реализовать для достаточно сложных систем на базе современных микропроцессоров и что сигналы, вырабатываемые регулятором, осуществляют робастную стабилизацию. Поэтому в данной работе этот регулятор называется стабилизатором.

2. Сопровождающая задача оптимального управления. Стабилизирующее свойство оптимальной обратной связи. Выберем натуральные числа N, m $(N > m > n)$ и вещественное число $h > 0$. Положим $\nu = mh$, $\Theta = Nh$.

Кусочно-постоянную функцию $u(t)$, $t \in T = [0, \Theta]$: $u(t) = u_j$, $t \in [(j-1)h, jh[$, $j = 1, 2, \ldots, N$, удовлетворяющую ограничению $|u(t)| \leqslant L$, $t \in T$, будем называть доступным управлением.

Доступное управление $u(t)$, $t \in T$, назовем допустимым для состояния $z \in R^n$, если траектория $x(t)$, $t \in T$, системы

$$\dot{x} = A_0 x + b_0 u,\ x(0) = z$$

удовлетворяет условию $x(\Theta) = 0$.

Качество допустимого управления будем оценивать по значению функционала

$$\rho(u) = \max_{t \in [0, \Theta]} |u(t)|$$

Допустимое управление $u^0(t) = u^0(t|z)$, $t \in T$, назовем оптимальным программным управлением для состояния $z \in R^n$, если на нем критерий качества достигает минимального значения $\rho(u^0) = \min \rho(u)$, где минимум берется по всем допустимым управлениям.

Таким образом, оптимальное программное управление является решением задачи

$$\rho(z) = \min \rho \tag{2.1}$$

$$\dot{x} = A_0 x + b_0 u,\quad x(0) = z$$

$$x(\Theta) = 0,\ |u(t)| \leqslant \rho,\ t \in T$$

Будем полагать, что для задачи (2.1) выполняется условие

$$\operatorname{rank}(b_{0h}, A_{0h}b_{0h}, \ldots, A_{0h}^{n-1}b_{0h}) = n \tag{2.2}$$

$$\left(A_{0h} = \exp A_0 h,\ b_{0h} = b_0 \int_0^h \exp sA_0 ds\right)$$

Оптимальное стартовое ППУ определим равенством

$$u^0(t,z) = u^0(t \mid z),\quad t \in [0, \nu[,\ z \in R^n$$

Введем множество

$$G_\Theta = \{z \in R^n : |u^0(t,z)| \leqslant L, t \in [0, \nu]\}$$

Оно обладает свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\Theta > 0$, что в ε-окрестности множества G_Θ содержатся все состояния системы (1.1), которые можно перевести допустимыми управлениями в начало координат за конечное время.

Покажем, что при заданных $\varepsilon, G, \alpha, \beta$ и соответствующем выборе параметров $\Theta > 0, \nu > 0, h > 0$ задачи (2.1) обратная связь

$$u(t,x) = u^0(t,x),\quad x \in G_\Theta,\quad t \in [0, \nu[$$

будет удовлетворять всем требованиям определения ограниченного робастного стабилизирующего ППУ с $G = G_\Theta$.

Из определения стартового ППУ следуют свойства:

1) $u(t, 0) \equiv 0,\ t \in [0, \nu[$;

2) $|u(t, x)| \leqslant L,\ x \in G,\ t \in [0, \nu[$;

3) траектория замкнутой системы (1.3) при $u(t, x) = u^0(t, z)$, является непрерывным решением системы уравнений

$$\dot{x} = A_0 x + b_0 u^0(t),\quad x(0) = x_0$$

$$u^0(t) = u^0(t - k\nu, x(k\nu)),\ t \in [k\nu, (k+1)\nu[, k = 0, 1, \ldots$$

где $u^0(t - k\nu, x(k\nu)) = u^0(t - k\nu \mid x(k\nu))$, $t \in [0, \nu[$; $u^0(t \mid x(k\nu))$, $t \in [0, \Theta]$ – оптимальное программное управление задачи (2.1) для состояния $z = x(k\nu)$.

Методом функций Ляпунова [3, 4] покажем, что система (1.1) при $A \equiv A_0$, $b \equiv b_0$, т.е. система

$$\dot{x} = A_0 x + b_0 u^0(t,x) \tag{2.3}$$

является асимптотически устойчивой в G_Θ.

Оптимальное значение критерия качества (КК) $\rho(z)$, $z \in G_\Theta$ задачи (2.1) возьмем в качестве функции Ляпунова. Пусть в произвольный текущий момент $\tau = l\nu$ система (2.3) оказалась в состоянии $x^*(\tau \mid x_0^*)$, которое соответствует произвольному начальному состоянию $x(0) = x_0^*$, $x_0^* \in G_\Theta$. На текущем состоянии $x^*(\tau \mid x_0^*)$ КК задачи (2.1) принимает значение $\rho(x^*(\tau \mid x_0^*))$, которое вычисляется путем решения задачи (2.1) с $z = x^*(\tau \mid x_0^*)$.

С помощью формулы Коши исключим из задачи (2.1) переменные состояния и запишем ее с учетом используемого класса доступных управлений в эквивалентной функциональной форме

$$\rho \to \min \tag{2.4}$$

$$F_0(\Theta)x^*(\tau\,|\,x_0^*)+\sum_{j=1}^{N}u_j\int\limits_{(j-1)h}^{jh}F_0(\Theta-t)b_0dt=0$$

$$|u_j|\leqslant\rho,\ j=1,2,\ldots,N$$

Здесь $F_0(t)$, $t\geqslant 0$ – фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{x}=A_0x(\dot{F}_0=A_0F_0,\ F_0(0)=E)$.

Сведем задачу (2.4) к другой, эквивалентной, задаче линейного программирования, введя новые переменные $\xi_0=1/\rho$, $\xi_j=u_j/\rho$, $j=1,2,\ldots,N$

$$\xi_0\to\max \tag{2.5}$$

$$F_0(\Theta)x^*(\tau\,|\,x_0^*)\xi_0+\sum_{j=1}^{N}\xi_j\int\limits_{(j-1)h}^{jh}F_0(\Theta-t)b_0dt=0$$

$$\xi_0\geqslant 0,\ |\xi_j|\leqslant 1,\ j=1,\ 2,\ldots,N$$

Обозначим: $\xi_\tau^0(\cdot)=(\xi_j^0(\tau),\ j=0,1,\ldots,N)$ – оптимальный план (ОП), $K^0(\tau)$ – оптимальная опора (ОО) [5] задачи (2.5). Тогда оптимальное управление задачи (2.4) примет вид $u_\tau^0(\cdot)=(u_j^0(\tau)=\xi_j^0/\xi_0^0,\ j=1,2,\ldots,N)$.

В момент $\tau+\nu$ система (2.3) под действием управления $u_j^0(\tau)$, $j=1,2,\ldots,m$, окажется в состоянии

$$x^*(\tau+\nu\,|\,x_0^*)=F_0(\nu)x^*(\tau\,|\,x_0^*)+\sum_{j=1}^{m}u_j^0(\tau)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}F_0(\nu-t)b_0dt$$

Для состояния $z=x^*(\tau+\nu\,|\,x_0^*)$ КК задачи (2.1) принимает значение $\rho(x^*(\tau+\nu\,|\,x_0^*))$. Справедливо неравенство

$$\rho(x^*(\tau+\nu\,|\,x_0^*))<\rho(x^*(\tau\,|\,x_0^*)) \tag{2.6}$$

Действительно, управление $u_{\tau+\nu}(\cdot)=(u_{j+m}^0(\tau),\ j=1,2,\ldots,N-m;\ u_j^0=0,\ j=N-m+1,\ N-m+2,\ldots,N)$ является допустимым для состояния $z=x^*(\tau+\nu\,|\,x_0^*)$ и КК задачи (2.1) на этом управлении удовлетворяет неравенству

$$\rho(x^*(\tau+\nu\,|\,x_0^*))\leqslant\rho(x^*(\tau\,|\,x_0^*)) \tag{2.7}$$

Значит, и на оптимальном управлении $u_{\tau+\nu}^0(\cdot)$ будет выполняться неравенство (2.7).

Рассмотрим задачу (2.5) на промежутке $[\tau,\tau+\nu]$ для состояния $x^*(\tau+\nu\,|\,x_0^*)$ (задача А). Совокупность $\bar{\xi}=(\bar{\xi}_0=\xi_0^0(\tau),\ \bar{\xi}_j=\xi_j^0(\tau),\ j=1,2,\ldots,N,\ \bar{\xi}_j=0,\ j=N+1,N+2,\ldots,N+m)$ является планом задачи А, на котором значение КК равно $\bar{\xi}_0=\xi_0^0(\tau)$.

Построим новую опору $K_s(\tau+\nu)$ задачи А по ОО $K^0(\tau)$ задачи (2.5). ОП $\{\bar{\xi},K_s(\tau+\nu)\}$ невырожден. Среди оценок Δ_j, $j=N+1,N+2,\ldots,N+m$ обязательно найдутся ненулевые, так как тождество $\Delta_j\equiv 0$, $j=N+1,N+2,\ldots,N+m$ противоречит условию (2.2). Поэтому на ОП задачи А будет выполняться неравенство $\xi_0^0(\tau+\nu)>\xi_0^0(\tau)$. Значит, справедливо, неравенство (2.6).

Используя неравенство (2.6), можно показать, что $\rho(x^*(t\,|\,x_0^*))\to 0$, $\|x^*(t\,|\,x_0^*)\|\to 0$ при $t\to\infty$.

Докажем свойство 5 определения ограниченного робастного стабилизирующего ППУ.

Рассмотрим произвольный текущий момент $\tau = l\nu$ и состояние $x^*(\tau) = x^*(\tau \mid x_0^*)$ системы (1.1), соответствующее произвольному начальному состоянию $x(0) = x_0^*$, $x_0^* \in G_\Theta$, и реализовавшимся значениям A^*, b^* параметров A, b системы (1.1).

Введем множества

$$X_\nu = \left\{ x \in R^n : \ x(\nu) = F(\nu)x^*(\tau \mid x_0^*) + \int_0^\nu F(\nu - t)bu^0(t \mid x^*(\tau))dt, \ \|\Delta A\| \leqslant \alpha, \ \|\Delta b\| \leqslant \beta \} \right\}$$

$$X_\Theta = \left\{ x \in R^n : x(\Theta) = F_0(\Theta - \nu)x(\nu) + \int_\nu^\Theta F_0(\Theta - t)b_0 u^0(t \mid x^*(\tau))dt \right\}$$

$$X_0 = \left\{ x \in R^n : F_0(\nu)x + \int_\nu^\Theta F_0(\nu - t)b_0 u(t)dt = 0, \ \mid u(t) \mid \leqslant \rho, \ t \in [0, \nu[\right\}$$

где $F(t)$, $t \geqslant 0$ – фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{x} = Ax$.

Обозначим через ρ^* минимальное значение ρ, при котором выполняется условие $X_0 \supset X_\Theta$.

Пусть на состоянии $x^*(\tau \mid x_0^*)$ оптимальное значение КК задачи (2.1) с $z = x^*(\tau \mid x_0^*)$ удовлетворяет неравенству $\rho(x^*(\tau \mid x_0^*)) > \rho^*$. Обозначим через $u_\tau^0(\bullet) = (u_j^0(\tau) = u_j^0(x^*(\tau \mid x_0^*)) = \xi_j^0 / \xi_0^0$, j = 1, 2,,..., N) ОП задачи (2.4) с $z = x^*(\tau \mid x_0^*)$, через $\xi_\tau^0(\bullet) = (\xi_j^0$, j = 0, 1,..., N) – ОП, K^0 (τ) – ОО задачи (2.5), соответствующие начальному состоянию $z = x^*(\tau \mid x_0^*)$.

В момент $\tau + \nu$ замкнутая система (1.3) окажется в состоянии

$$x^*(\tau + \nu) = x^*(\tau + \nu \mid x_0^*) = F(\nu)x^*(\tau) + \sum_{j=1}^m u_j^0(\tau) \int_{(j-1)h}^{jh} F(\nu - t)bdt$$

на котором КК задачи (2.1) примет значение $\rho(x^*(\tau+\nu))$.

Справедливо неравенство

$$\rho(x^*(\tau + \nu)) < \rho(x^*(\tau)) \tag{2.8}$$

для всех $x^*(\tau)$, для которых

$$\rho(x^*(\tau)) > \rho^* \tag{2.9}$$

Действительно, по определению числа ρ^*, существует такое управление $v(t)$, $\mid v(t) \mid \leqslant \rho^*$, $t \in [\tau + \Theta, \ \tau + \Theta + \nu[$, что управленеие $u_{\tau+\nu}(\bullet) = (u_{j+m}^0(\tau)$, $j = 1, 2, \ldots, N - m$, $u_j^0(\tau) = v_{j-N+m}$, $j = N - m + 1, N - m + 2, \ldots, N$) является допустимым для задачи (2.4) с начальным состоянием $z = x^*(\tau + \nu)$ и на нем выполняется неравенство

$$\max_{j=1,2,\ldots,N} \mid u_j(\tau + \nu) \mid \leqslant M$$

$$M = \max\left(M^0, \ \max_{j=N-m+1, \ N-m+2, \ldots, N} \mid v_{j-N+m}(\tau) \mid \right)$$

$$M^0 = \max_{j=1,2,\ldots,N-m} \mid u_j^0(\tau) \mid$$

На оптимальном управлении $u_{\tau+\nu}^0(\bullet)$ будет выполняться неравенство

$$\rho(x^*(\tau + \nu)) = \max_{j=1,2,\ldots,N} \mid u_j^0(\tau + \nu) \mid \leqslant M^0$$

Поскольку $M = M^0 = \rho(x^*(\tau))$, то отсюда вытекает нестрогое неравенство (2.8).

Из неравенства (2.9) следует, что оптимальное значение КК определяется минимальной интенсивностью управления $u_j^0(\tau)$, $j = 1, 2,..., N - m$, которое строится по детерминированной задаче. Поэтому неравенство (2.8) для состояния $x^*(\tau + \nu)$ следует из доказательства свойства *4* определения стабилизирующего ППУ.

Используя определения множества X_Θ, можно показать, что для любых ограниченных чисел α, $\beta > 0$ и любого сколь угодно малого числа $\varepsilon_1 > 0$ найдутся такие числа $\nu > 0$, $\Theta > 0$, что $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon_1$ для $x \in X_\Theta$.

Следовательно, можно подобрать такие $\Theta > 0$, $\nu > 0$, $t_1(\varepsilon)$, что функция Ляпунова $\rho(x)$, $x \in G$, будет убывать вдоль траектории системы (1.3) для всех состояний, находящихся вне сколь угодно малой ε-окрестности состояния равновесия $x = 0$ и $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$ при $t \geqslant t_1(\varepsilon)$.

3. Алгоритм работы оптимального стабилизатора. До начала функционирования системы в момент $\tau = 0$ стабилизатор строит оптимальное программное управление $u_0^0(\bullet)$ задачи (2.1) для состояния $z = x_0^*$. Это можно сделать, например, методами линейного программирования (ЛП) [5], так как все элементы задачи известны. Если состояние x_0^* заранее неизвестно, но известна область, в которой оно может появиться, то можно покрыть эту область конечной сетью и решить заранее задачу (2.1) для узлов этой сети. Решение в момент $\tau = 0$ для реализовавшегося состояния x_0^* получается путем коррекции одного из построенных решений по методу, описанному ниже для произвольного τ.

Предположим, что стабилизатор проработал в моменты $0, \nu,..., (l - 1)\nu$ и система (1.1) в момент $\tau = l\nu$ оказалась в состоянии $x^*(\tau)$. По предположению, стабилизатор уже знает решение задачи (2.1) в момент $\tau - \nu$. Эта задача эквивалентна задаче ЛП (задача S), отличающейся от задачи (2.5) лишь вектором условий при переменной ξ_0, и это отличие тем меньше, чем меньше ν.

Для выработки управления $u^*(t)$, $t \in [\tau, \tau + \nu[$, стабилизатору необходимо знать решение задачи (2.1) с начальным условием $z = x^*(\tau)$, т.е. решение задачи (2.5).

Согласно теории ЛП [6] для решения задачи S наиболее эффективен двойственный метод, так как при этом за небольшое число итераций строится ОО K_s^0 (τ) задачи (2.5), причем в качестве начальной опоры берется ОО K_s^0 $(\tau - \nu)$ задачи S. Если время, затраченное конкретным вычислительным устройством на построение в момент τ новой опоры K_s^0 (τ) по уже построенной в предыдущий момент $\tau - \nu$ опоре K_s^0 $(\tau - \nu)$, меньше ν, то можно говорить, что для рассматриваемой задачи с помощью выбранного вычислительного устройства можно реализовать робастную стабилизирующую обратную связь (1.2) в режиме реального времени [7, 8]. Поскольку в рамках методов ЛП размеры задачи S небольшие, а быстродействие современных микропроцессоров велико, то описанный метод стабилизации можно использовать для динамических систем достаточно высокого порядка.

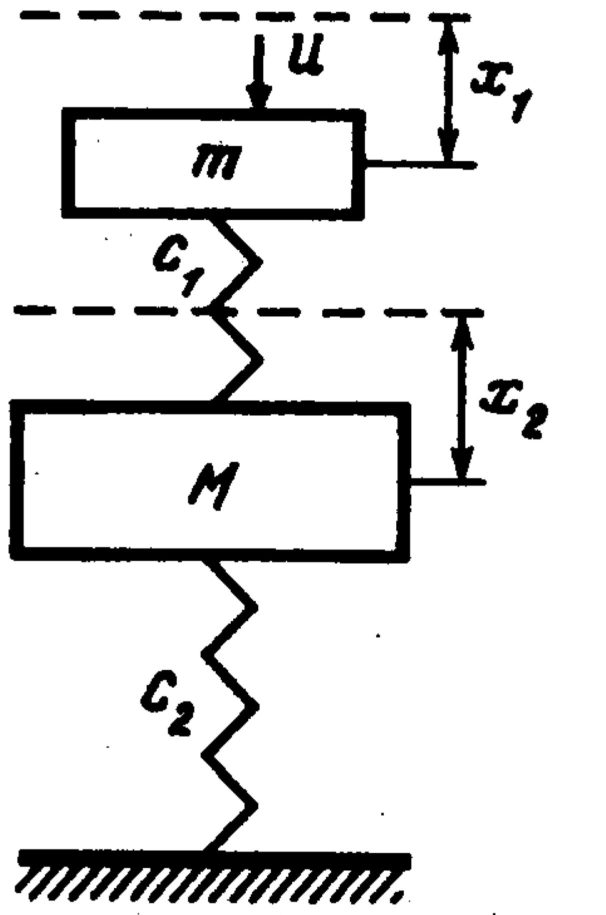
4. Примеры. В качестве первого примера рассмотрим задачу демпфирования ограниченными кусочно-непрерывными управлениями колебаний в двухмассовой системе (фиг. 1).

Математическая модель такой системы имеет вид

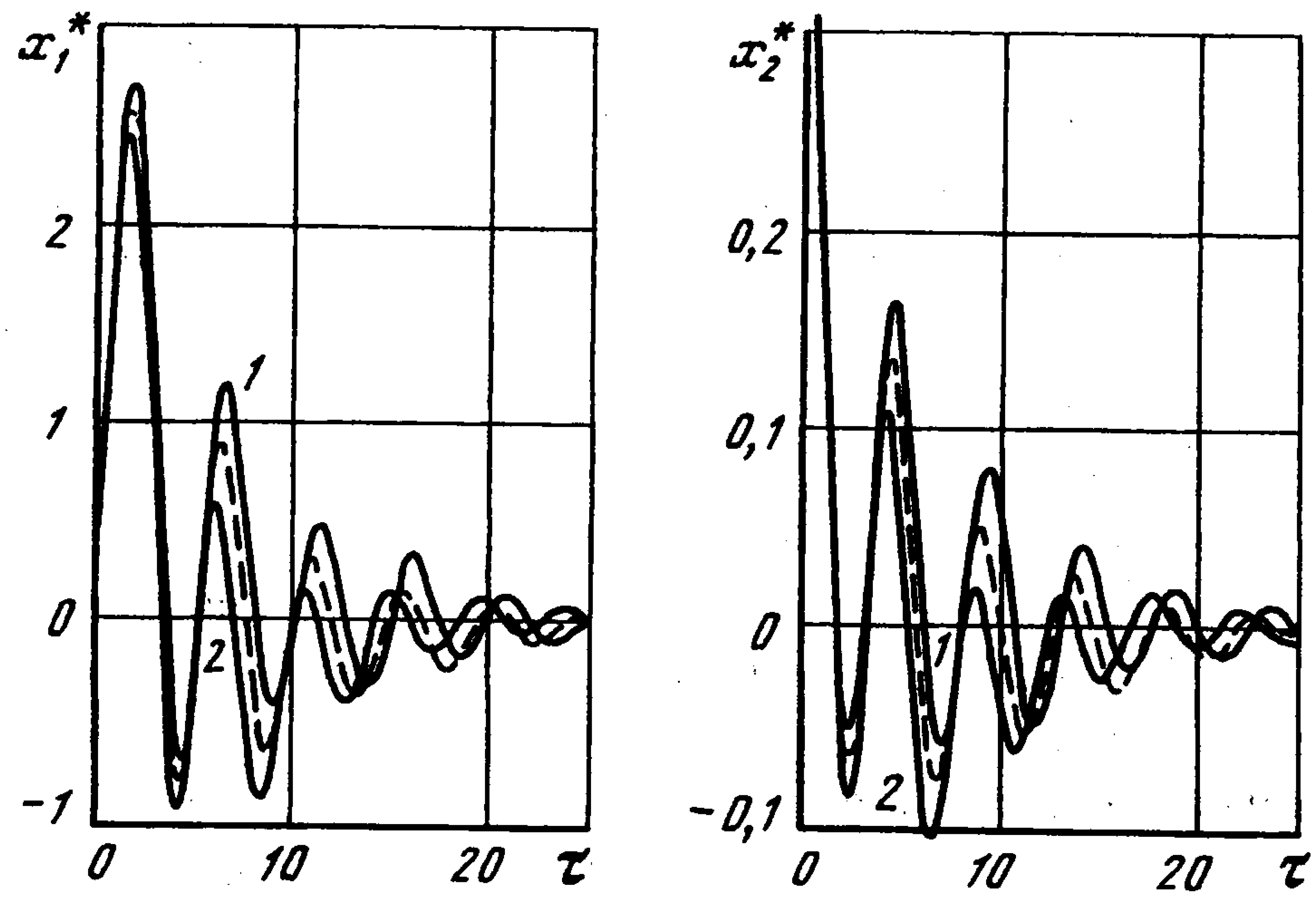
$$\dot{x}_1 = x_3, \ \dot{x}_2 = x_4 \tag{4.1}$$
$$\dot{x}_3 = (c_1x_1 + c_2x_2 + u)/m, \ \dot{x}_4 = (c_1\dot{x}_1 - (c_1 + c_2)x_2)/M$$

где m, M – массы объектов, c_1, c_2 – коэффициенты упругости пружин, u – демпфирующее воздействие.

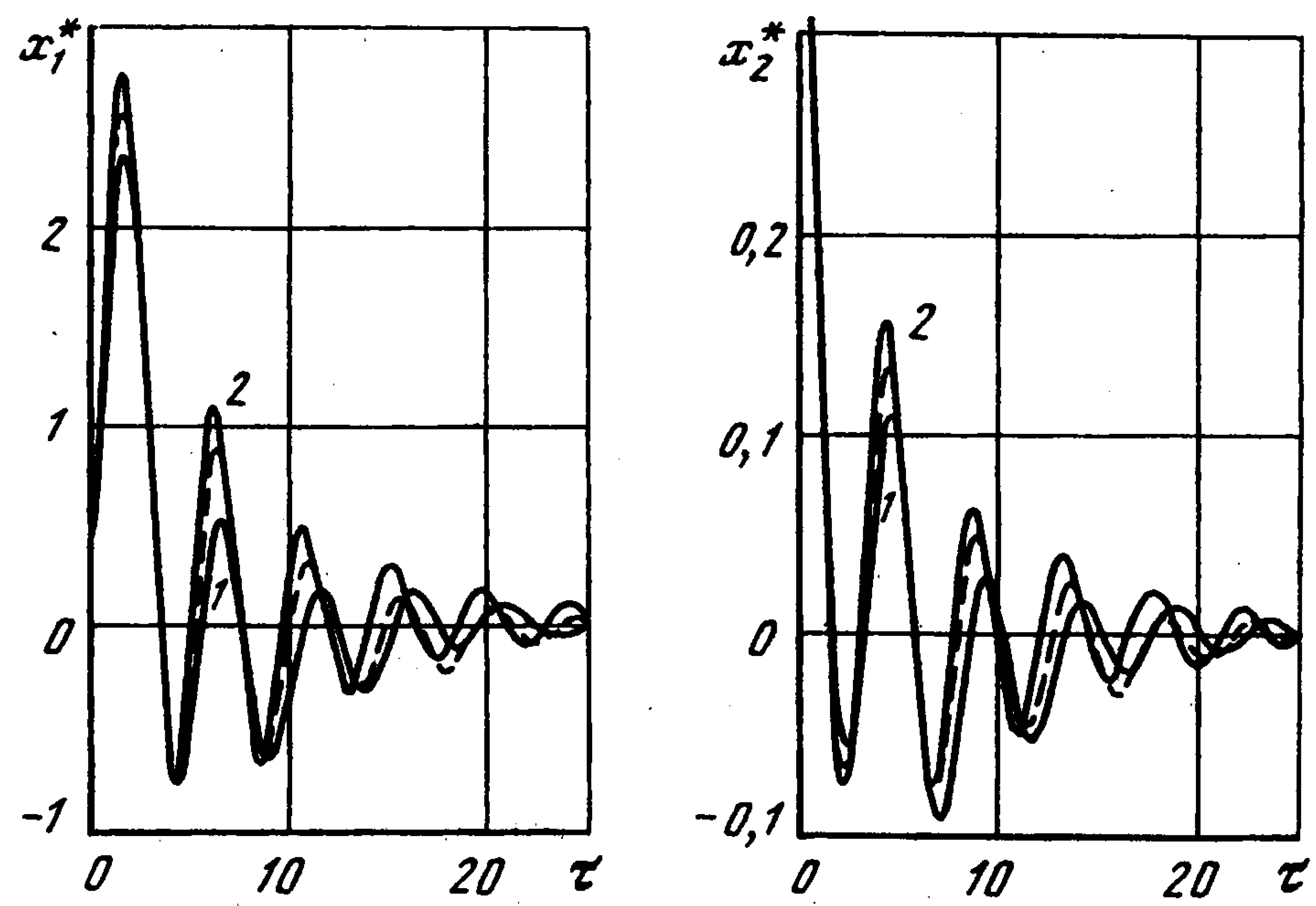
Пусть в начальный момент $t = 0$ рассматриваемая система находилась в состоянии $x_1(0) = 0{,}5$, $x_2(0) = 0{,}4$, $x_3(0) = 0{,}2$, $x_4(0) = -0{,}1$. Требуется погасить колебания системы.



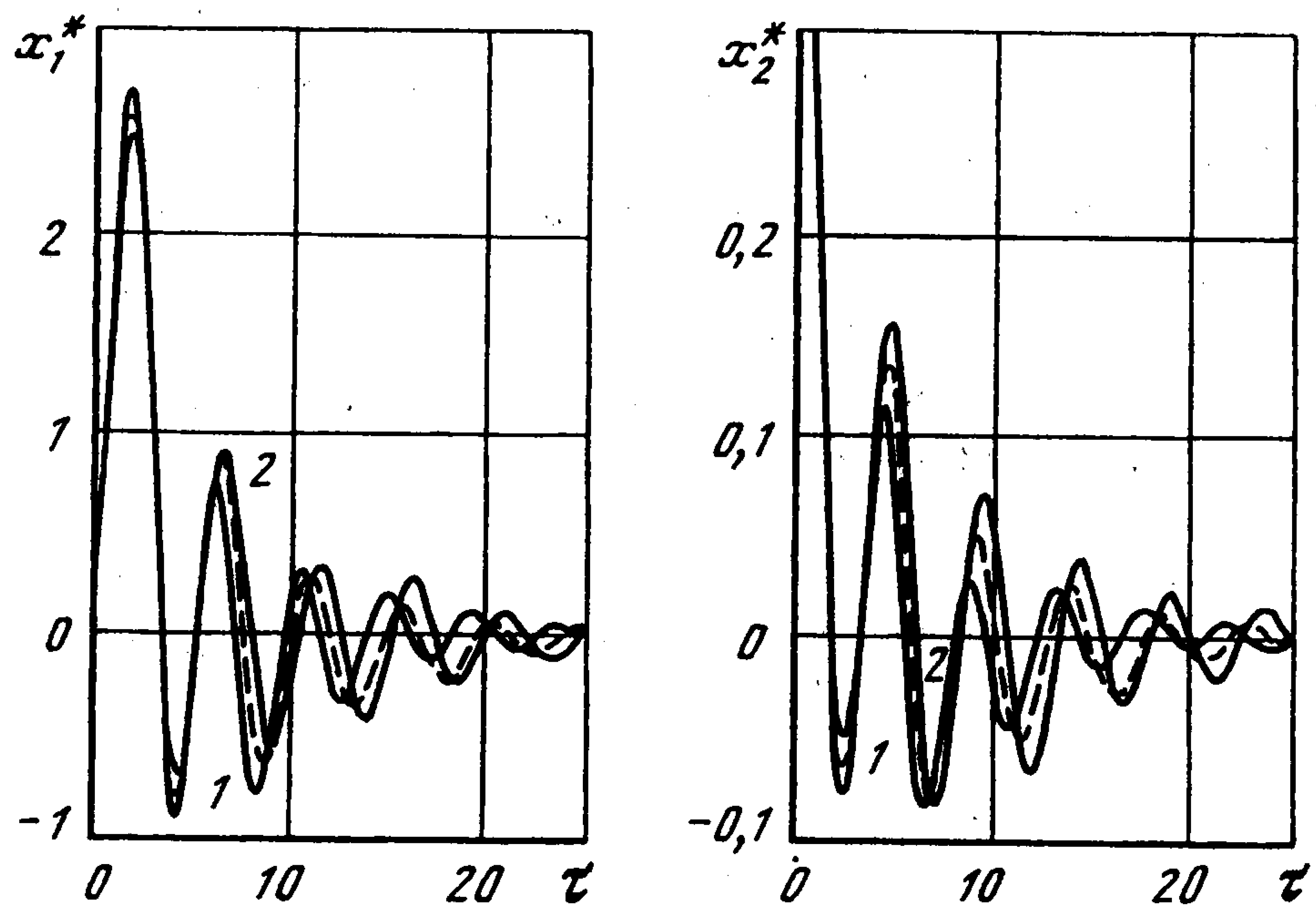
Фиг. 1



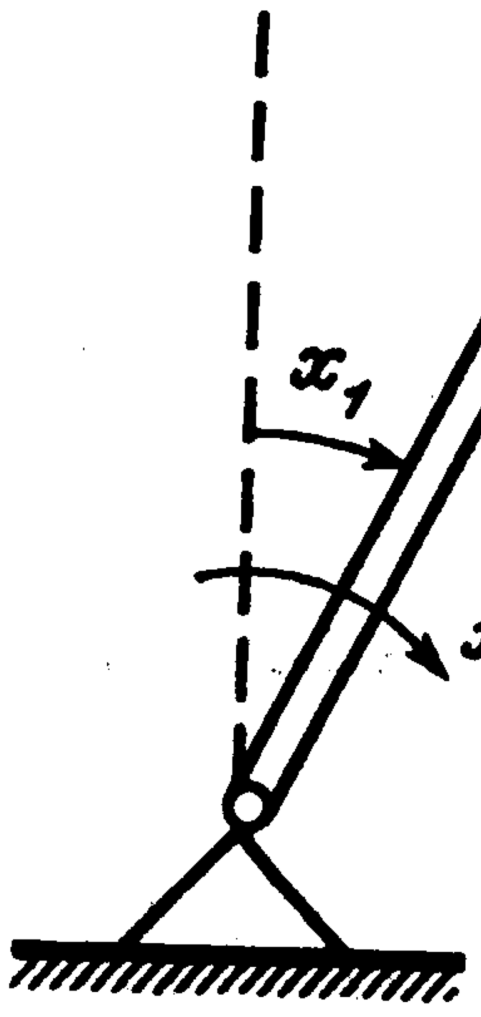
Фиг. 2



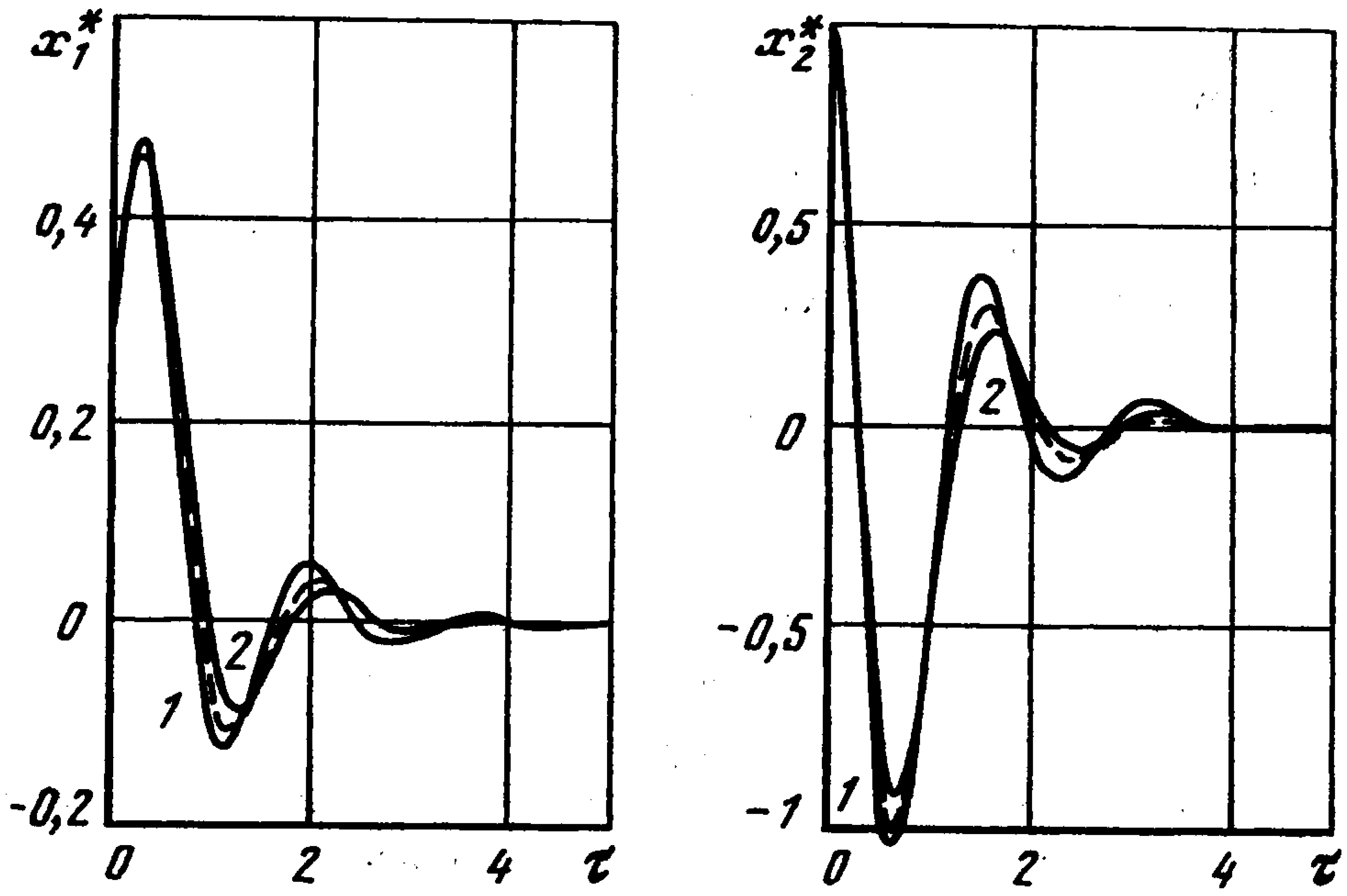
Фиг. 3



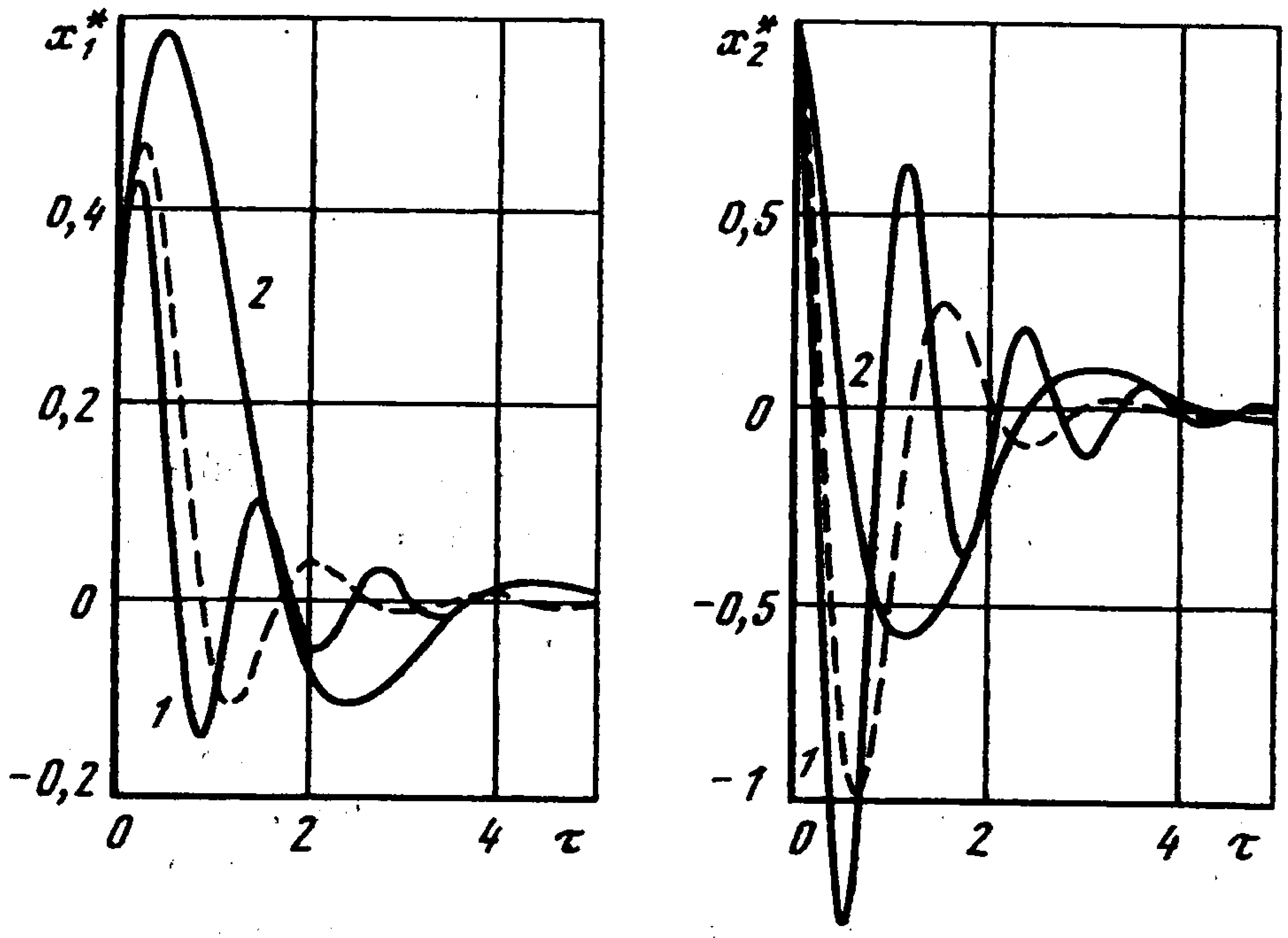
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Робастный стабилизатор рассчитывался на следующие номинальные значения параметров системы: $m_0 = 1$, $M = 10$, $c_{10} = 1$, $c_{20} = 9{,}2$. В расчетах полагали $\Theta = 8$, $\nu = 2$, $h = 0{,}2$.

Сопровождающая задача в данном случае имеет вид

$$\rho \to \min$$

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 + 9{,}2x_2 + u, \quad \dot{x}_4 = 0{,}1x_1 - 1{,}02x_2$$

$$x_1(0) = x_1^*(\tau), \quad x_2(0) = x_2^*(\tau), \quad x_3(0) = x_3^*(\tau), \quad x_4(0) = x_4^*(\tau)$$

$$x_1(\Theta) = 0, \quad x_2(\Theta) = 0, \quad x_3(\Theta) = 0, \quad x_4(\Theta) = 0$$

$$|u(t)| \leq \rho, \quad t \in T = [0, \Theta]$$

где $x^*(\tau) = (x_1^*(\tau),\ x_2^*(\tau),\ x_3^*(\tau),\ x_4^*(\tau))$ – состояние системы (4.1) в текущий момент времени τ.

В процессе работы стабилизатора реализовывались следующие значения параметров системы:

1) изменялся коэффициент c_1 упругости верхней пружины (фиг. 2) (штриховые кривые соответствуют номинальному значению $c_{10} = 1$, сплошные кривые *1*, *2* – реализовавшимся значениям $c_1^* = 0{,}9$ и $c_1^* = 1{,}1$);

2) изменялся коэффициент c_2 упругости нижней пружины (фиг. 3) (штриховые кривые соответствуют номинальному значению $c_{20} = 9{,}2$, сплошные кривые *1, 2* – реализовавшимся значениям $c_2^* = 8{,}28$ и $c_2^* = 10{,}12$);

3) изменялась масса m верхней точки (фиг. 4) (штриховые кривые соответствуют номинальному значению $m_0 = 1$, сплошные кривые *1,2* – реализовавшимся значениям $m^* = 0{,}9$ и $m^* = 1{,}1$).

В качестве второго примера рассмотрим задачу стабилизации математического маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия [9] (фиг. 5).

Математическая модель такой системы имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \ \dot{x}_3 = u \tag{4.2}$$

где x_1 – угол отклонения маятника от вертикали, x_2 – угловая скорость маятника, x_3 – момент, приложенный к маятнику.

В начальный момент $t = 0$ система (4.2) находилась в состоянии $x_1(0) = 0{,}3$, $x_2(0) = 1{,}0$, $x_3(0) = -1{,}2$. Требуется стабилизировать ее в верхнем вертикальном положении $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Сопровождающая задача имеет вид

$$\rho \to \min$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \ \dot{x}_3 = u$$

$$x_1(0) = x_1^*(\tau), \ x_2(0) = x_2^*(\tau), \ x_3(0) = x_3^*(\tau)$$

$$x_1(\Theta) = 0, \ x_2(\Theta) = 0, \ x_3(\Theta) = 0$$

$$|u(t)| \leq \rho, \ t \in T = [0, \Theta]$$

где $x^*(\tau) = (x_1^*(\tau), \ x_2^*(\tau), \ x_3^*(\tau))$ – состояние системы (4.2) в текущий момент τ.

Для решения сопровождающей задачи были выбраны следующие параметры метода: $\Theta = 1$, $h = 0{,}025$, $\nu = 5h$.

В процессе работы стабилизатора реализовывались следующие значения параметров системы:

1) изменялся коэффициент при x_1 (фиг. 6) (штриховые кривые соответствуют номинальному значению $1x_1$, сплошные кривые *1, 2* – реализовавшимся значениям $0{,}5x_1$ и $1{,}5x_1$);

2) изменялся коэффициент при x_3 (фиг. 7) (штриховые кривые соответствуют номинальному значению $1x_3$, сплошные кривые *1,2*– реализовавшимся значениям $0{,}5x_3$ и $1{,}5x_3$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* К методам стабилизации динамических систем // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 67–77.
2. *Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Программно-позиционная оптимизация динамических систем // Кибернетика и системный анализ. 1994. № 1. С. 66–73.
3. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
4. *Бромберг П.В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967. 323 с.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи. Минск: Изд-во Университетское, 1984. 214 с.
6. *Данциг Дж.* Линейное программирование его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966. 600 с.
7. *Gabasov R., Kirillova F.M.* Real-time construction of optimal closable feedbacks // 13th World Congr. IFAC Intern. Federat. of Automatic Control. Vol. D. San Francisco, CA. 1996. P. 231–236.
8. *Gabasov R., Kirillova F.M., Prischepova S.V.* Optimal feedback control. London: Springer, 1995. 202 p. Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 207
9. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475–514.

Минск

Поступила в редакцию
2.VI.1997