УДК 531.381,531.395

© 1998 г. В.Ю. Ольшанский

О ПРИВОДИМОСТИ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается механическая система, состоящая из неизменяемого твердого тела (носителя) и подсистемы, конфигурация и состав которой могут изменяться со временем (движение ее элементов относительно носителя задано). Изучается свободное движение системы без динамической симметрии в однородном поле силы тяжести. Получены необходимые и достаточные условия существования двух квадратичных по компонентам абсолютной угловой скорости носителя интегралов. Показано, что исходная динамическая система приводима к автономной системе гиростата в том и только том случае, когда движение обладает двумя названными квадратичными интегралами; указан явный вид линейного преобразования к автономной системе. Найдена явная форма интегралов и условий их существования. Рассмотрены примеры движений с двумя квадратичными интегралами.

1. Рассматривается механическая система K, состоящая из неизменяемого твердого тела K_1 (носителя) и подсистемы K_2, движение элементов которой относительно носителя задано. Подсистема K_2 может включать в себя конфигурационно изменяемую и изменяющуюся по составу компоненты.

Известны [1] уравнения вращательного движения носителя системы переменного состава. Ниже используется другая [2], предложенная автором, форма этих уравнений.

Пусть E_1 – инерциальная система отсчета (СО), E_2 – СО, неизменно связанная с носителем, E_3 – главная СО, связанная с главными центральными осями инерции системы K. Обозначим: m_n – масса материальной точки M_n, C – центр масс K, $\mathbf{r} = \mathbf{CM}_n$; $(\ )_i^{\bullet}$ – производная по времени t в СО в E_i, $(\ )^{\bullet} = (\ )_2^{\bullet}$; далее

$$\mathbf{G}_i = \sum m_n \mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n)_i^{\bullet}, \quad \mathbf{M}_i^f = -\sum m_n \mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n)_i^{\bullet\bullet} \tag{1.1}$$

Суммирование здесь выполняется по всем элементам K; $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{M}_i^f$ – соответственно кинетический момент и главный момент (относительно C) сил инерции в движении элементов K относительно СО, перемещающейся вместе с C поступательно по отношению к СО E_i.

Обозначим: J – оператор инерции системы K в ее центре масс C. Зададим линейный симметрический оператор Λ тождеством

$$\Lambda\mathbf{x} \equiv J^{\bullet}\mathbf{x} - \sum m_n [\mathbf{r}_n^{\bullet} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}_n) + \mathbf{r}_n \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}_n^{\bullet})] \tag{1.2}$$

Правая часть этого тождества не изменится, если всюду от дифференцирования в E_2 перейти к дифференцированию в любой СО E_i.

Если $\mathbf{x}_{ij}$ – угловая скорость СО E_i относительно E_j, то

$$J\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{G}_j - \mathbf{G}_i \tag{1.3}$$

$$\Lambda\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{M}_j^f - \mathbf{M}_i^f + (\mathbf{G}_j)_j^{\bullet} - (\mathbf{G}_i)_i^{\bullet} \tag{1.4}$$

Пусть на систему K действуют внешние силы и $\mathbf{M}^e$ – их главный момент относительно C, $\mathbf{M}_r$ – главный момент (относительно C) реактивных сил и возможно наличие некоторого управляющего момента $\mathbf{M}^*$, заданного в E_2. Обозначим $\mathbf{M} = \mathbf{M}^e + \mathbf{M}_r + \mathbf{M}^*$. Так как при переходе от инерциальной СО E_1 к СО E_1', движущейся вместе с C поступательно относительно E_1, кориолисовы силы инерции не возникают, а главный момент (относительно C) переносных сил инерции равен нулю, то сумма моментов $\mathbf{M}$ и главного момента $\mathbf{M}_1^f$ сил инерции в движении относительно E_1' равна нулю. Отсюда, используя свойство (1.4) оператора Λ для $i = 2, j = 1$, получим $(\mathbf{G}_1)_1^{\bullet} = \Lambda\mathbf{x}_{21} + \mathbf{M} + \mathbf{M}_2^f + \dot{\mathbf{G}}_2$. Переходя здесь к дифференцированию в E_2 и учитывая, что $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 + J\mathbf{x}_{21}$, получим уравнение

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y} \times \mathbf{x} + \Lambda\mathbf{x} + \mathbf{L}, \quad \mathbf{y} = J\mathbf{x} + \mathbf{G}_2 \tag{1.5}$$

$$(\mathbf{L} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_2^f + \dot{\mathbf{G}}_2, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^e + \mathbf{M}_r + \mathbf{M}^*)$$

Здесь и ниже $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{21}$ – абсолютная угловая скорость носителя.

Уравнение вида (1.5), дополненное уравнением Пуассона, описывает и движение вокруг неподвижной точки носителя [3].

Для рассматриваемого далее случая свободного движения в однородном поле имеем $\mathbf{M}^e = 0$ и уравнение (1.5), описывающее вращение носителя, отделяется от системы, описывающей движение носителя в целом. Считаем законы изменения конфигурации и состава системы K заданными, тогда операторы $J(t)$, $\Lambda(t)$ и векторные функции $\mathbf{G}_2(t)$, $\mathbf{L}(t)$ заданы в E_2. Полагаем $J, \mathbf{G}_2 \in C^1[0, +\infty)$, $\Lambda, \mathbf{L} \in C[0, +\infty)$.

В ряде работ[1] изучалась система с изменяемой конфигурацией, реактивные воздействия на которую обусловлены отсоединением рабочего тела с заданными абсолютными скоростями его частиц. Уравнения, описывающие вращение носителя для этой модели, содержатся в (1.5) при $\Lambda \equiv 0$. Для конфигурационно изменяемой системы постоянного состава также $\Lambda \equiv 0$.

2. Всюду ниже считаем, что динамическая симметрия отсутствует. Полученные ранее [2] условия существования квадратичного интеграла (КИ) в полной форме

$$(\mathbf{y}, B\mathbf{y}) + (\mathbf{m}, \mathbf{y}) + \varphi(t) = \text{const} \tag{2.1}$$

системы (1.5) даются теоремой 1.

Обозначим: A_i, $\mathbf{e}_i$ – собственные значения и векторы оператора инерции J, $|\mathbf{e}_i| = 1$, $\lambda_{ij} = (\mathbf{e}_i, \Lambda\mathbf{e}_j)$, $x^{(k)} = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_k)$, $\Delta A_i = (A_j - A_k)\delta_{ijk}$, $a_i = A_i\Delta A_i$, $f_i = a_i\beta_{1i}$, где

$$\beta_{1i} = \exp\left(-2\int_0^t A_i^{-1}(\xi)\lambda_{ii}(\xi)d\xi\right), \quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{2.2}$$

Теорема 1. Для существования интеграла (2.1) системы (1.5) в случае, когда оператор B – невырожденный, а собственные значения оператора J различны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(\mathbf{G}_s)_s^{\bullet} + \Lambda\mathbf{x}_{s2} = \mathbf{L} \tag{2.3}$$

и функции f_i были линейно зависимы. Интеграл приводится к виду

$$(J\mathbf{x}_{s1},\ B_1C_sJ\mathbf{x}_{s1}) = \text{const} \tag{2.4}$$

---

[1] *Макеев Н.Н.* Интегральные многообразия уравнений динамики сложных механических систем: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.01. Санкт-Петербург, 1992, 29 с.

Собственными векторами операторов B_1, C_s являются $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$; β_{1i} – собственные значения B_1. Собственными значениями c_{si} оператора C_s может быть любой набор постоянных из условия линейной зависимости функций f_i:

$$c_{s1}f_1 + c_{s2}f_2 + c_{s3}f_3 \equiv 0, \quad c_{si} \equiv \text{const} \tag{2.5}$$

Угловая скорость $\mathbf{x}_{s3}$ базиса E_s, участвующего в записи условия (2.3), относительно E_3 задается условием

$$a_k\beta_k x_{s3}^{(k)} = \delta_{ijk}(A_i\beta_i - A_j\beta_j)G_3^{(k)} - (A_i\beta_i + A_j\beta_j)\lambda_{ij} \tag{2.6}$$

Здесь (i, j, k) – любая перестановка (1, 2, 3), $\beta_i = \beta_{1i}c_{si}$. Необходимое условие (2.3) может быть записано в виде [2]

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}_s^f = 0 \tag{2.7}$$

Здесь $\mathbf{M} = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}^*$, и, учитывая, что $\mathbf{M} + \mathbf{M}_1^f = 0$, получим $\mathbf{M}_s^f = \mathbf{M}_1^f$.

Определение 1. Движение СО E_s с полюсом в центре масс C системы K назовем квазипоступательным, если главный момент (относительно C) сил инерции в движении по отношению к E_s равен главному моменту (относительно C) сил инерции по отношению к СО E_1', т.е. $\mathbf{M}_s^f = \mathbf{M}_1^f$. Систему отсчета E_s и ее базис будем называть КП-системой и КП-базисом.

Здесь E_1', как и выше, система отсчета, движущаяся вместе с C поступательно относительно инерциальной СО E_1. Очевидно, что СО E_1' – одна из КП-систем отсчета.

Необходимое условие (2.3) существования интеграла означает, что базис E_s – один из множества КП-базисов.

Условие (2.5) линейной зависимости функций f_i можно записать в виде $n_f < 3$, где n_f – размерность линейной оболочки множества $\{f_1, f_2, f_3\}$.

По формуле (2.6) для каждого набора постоянных c_{s1}, c_{s2}, c_{s3} можно единственным образом найти $\mathbf{x}_{s3}$. Для сокращения формулировок введем следующее определение, считая, что $n_f < 3$.

Определение 2. Базис E_s, угловая скорость которого $\mathbf{x}_{s3}$ относительно главного базиса задается формулой (2.6), где постоянные собственные значения c_{si} оператора C_s удовлетворяет условию (2.5) будем называть допустимым базисом, соответствующим оператору C_s. СО с полюсом в C и допустимым базисом назовем допустимой СО.

Для теоремы 1 можно дать теперь следующую формулировку.

Теорема 1′. Для существования КИ (2.1) системы (1.5) в случае, когда оператор B – невырожденный, а собственные значения оператора J различны, необходимо и достаточно, чтобы $n_f < 3$ и допустимая СО, соответствующая некоторому оператору C_s, являлась КП-системой. Интеграл при этом может быть записан в виде (2.4).

При $n_f = 2$ условие (2.5) определяет единственный (с точностью до общего множителя) набор постоянных c_{si} и система может иметь лишь один КИ (2.1), который записывается в виде (2.4). Для существования двух независимых КИ необходимо $n_f = 1$, т.е.

$$f_i = \beta_{1i}a_i = a_{i0}f(t), \quad f(0) = 1; \quad i = 1, 2, 3 \ (a_{i0} = a_i(0)) \tag{2.8}$$

Условия существования двух независимых КИ, вытекающие из теоремы 1′, можно сформулировать следующим образом.

Предложение 1. Система (1.5) при отсутствии динамической симметрии имеет два независимых КИ в полной форме тогда и только тогда, когда функции $f_i(t)$ пропорциональны между собой и существуют два допустимых КП-базиса, соответствующих различным операторам C_n, C_m. Интегралы при этом имеют вид

$$(J\mathbf{x}_{n1},\ B_1 C_n J\mathbf{x}_{n1}) = \text{const}, \quad (J\,\mathbf{x}_{m1},\ B_1 C_m J\mathbf{x}_{m1}) = \text{const} \tag{2.9}$$

Ниже приведена более простая система условий существования двух КИ.

3. Получим описание множества допустимых базисов в случае существования двух независимых КИ.

Пусть существуют два независимых КИ, тогда их можно записать в виде (2.9). Постоянные собственные значения операторов C_n, C_m должны удовлетворять условию (2.5), которое при учете (2.8) означает, что наборы $\{c_{ni}\}$, $\{c_{mi}\}$ являются линейно независимыми решениями уравнения

$$a_{10}u_1 + a_{20}u_2 + a_{30}u_3 = 0$$

Независимыми решениями этого уравнения являются также $u_i = 1$ и $u_i = A_{i0}^{-1}$ (i = = 1, 2, 3). Поскольку любая линейная комбинация интегралов (2.9) является также КИ, то приходим к следующему утверждению.

Предложение 2. Если система (1.5) при отсутствии динамической симметрии имеет два независимых КИ в полной форме, то любой КИ системы есть линейная комбинация интегралов

$$(J\mathbf{x}_{41},\ B_1 J\mathbf{x}_{41}) = \text{const}, \quad (J\,\mathbf{x}_{51},\ B_1 J_0^{-1} J\mathbf{x}_{51}) = \text{const} \tag{3.1}$$

Здесь E_4 – допустимый базис, соответствующий тождественному оператору E, E_5 – допустимый базис, соответствующий J_0^{-1}, $J_0 = J(0)$.

Предложение 3. Угловая скорость относительно E_5 произвольного допустимого базиса E_s при наличии двух КИ имеет вид

$$\mathbf{x}_{s5} = (J_0 + \nu_s E)^{-1} J_0 \mathbf{x}_{45}, \quad \nu_s = \text{const} \tag{3.2}$$

Доказательство. В соответствии с предложением 2 любой КИ можно записать в виде линейной комбинации интегралов (3.1). С другой стороны, по теореме 1 любой КИ имеет вид (2.4). Следовательно,

$$\alpha_{s1}(J\mathbf{x}_{41}, B_1 J\mathbf{x}_{41}) + \alpha_{s2}(J\mathbf{x}_{51}, B_1 J_0^{-1} J\mathbf{x}_{51}) = (J\mathbf{x}_{s1}, B_1 C_s J\mathbf{x}_{s1}) + \text{const}$$

Здесь $\mathbf{x}_{k1} = \mathbf{x}_{k2} + \mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{21}$; сравнение квадратичных и линейных по $\mathbf{x}$ членов приводит к условиям

$$C_s = \alpha_{s1}E + \alpha_{s2}J_0^{-1}, \quad \alpha_{s1}\mathbf{x}_{42} + \alpha_{s2}J_0^{-1}\mathbf{x}_{52} = (\alpha_{s1}E + \alpha_{s2}J_0^{-1})\mathbf{x}_{s2}$$

Из последнего условия следует, что $(\alpha_{s1}E + \alpha_{s2}J_0^{-1})\mathbf{x}_{s5} = \alpha_{s1}\mathbf{x}_{45}$, и, обозначив $\nu_s =$ $= \alpha_{s2}\alpha_{s1}^{-1}$, получим представление всего множества допустимых угловых скоростей в виде (3.2), где ν_s – произвольный постоянный параметр. Для допустимого базиса E_5 имеем $\mathbf{x}_{s5} = 0$, и для него можно сохранить представление (3.2), положив $\nu_5 = \infty$.

Из формулы (2.6) при учете условия (2.8) для E_4, E_5 получим

$$\begin{aligned}
x_{43}^{(k)} &= a_{k0}^{-1}[(A_{i0}h_i - A_{j0}h_j)G_3^{(k)}\delta_{ijk} - (A_{i0}h_i + A_{j0}h_j)\lambda_{ij}] \\
x_{53}^{(k)} &= A_{k0}a_{k0}^{-1}[(h_i - h_j)G_3^{(k)}\delta_{ijk} - (h_i + h_j)\lambda_{ij}] \\
x_{54}^{(k)} &= h_i h_j a_{k0}^{-1}[(\Delta A_i - \Delta A_j)\delta_{ijk}\lambda_{ij} - \Delta A_k G_3^{(k)}]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $A_{i0} = A_i(0)$, $h_i = \Delta A_{i0}(\Delta A_i)^{-1}$.

Случай $\mathbf{x}_{45} = 0$ (базисы E_4, E_5 совпадают) разобран ранее [2].

Приведем еще одно описание множества допустимых угловых скоростей, эквивалентное (3.2).

Обозначим [2] оператор с собственными значениями и векторами λ_{ii}, $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$ через Λ_1 и $\Lambda_2 = \Lambda - \Lambda_1$. Из (2.2) получим

$$(B_1)_3^{\bullet} = -2B_1J^{-1}\Lambda_1 \tag{3.4}$$

Условие (2.6) выполнено тогда и только тогда, когда [2] оператор F_1 – кососимметрический:

$$F_1 = B_1C_sFJ^{-1}, \quad F = \Lambda_2 + M(\mathbf{G}_3 - J\mathbf{x}_{s3}) + M(\mathbf{x}_{s3})J \tag{3.5}$$

Всюду $M(\mathbf{b})$ – оператор векторного умножения на $\mathbf{b}$: $M(\mathbf{b})\mathbf{x} \equiv \mathbf{b} \times \mathbf{x}$.

Выполним замену $\mathbf{x}_{s3} = \mathbf{w} + \mathbf{a}$ и выберем $\mathbf{a}$ так, чтобы оператор $\Lambda_2 + M(\mathbf{G}_3 - J\mathbf{a}) + M(\mathbf{a})J$ был кососимметрическим с сопутствующим вектором $\mathbf{c}$:

$$\Lambda_2 + M(\mathbf{G}_3 - J\mathbf{a}) + M(\mathbf{a})J = M(\mathbf{c}) \tag{3.6}$$

Последнее равенство определяет векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$. Так как Λ_2 – симметрический оператор, то из (3.6) следует, что

$$\Lambda_2 = (JM(\mathbf{a}) - M(\mathbf{a})J)/2, \quad M(\mathbf{c}) = M(\mathbf{G}_3 - J\mathbf{a}) + (JM(\mathbf{a}) + M(\mathbf{a})J)/2 \tag{3.7}$$

$$a^{(k)} = -2\lambda_{ij}(\Delta A_k)^{-1}, \quad c^{(k)} = G_3^{(k)} + (\Delta A_j - \Delta A_i)(\Delta A_k)^{-1}\lambda_{ij}\delta_{ijk} \tag{3.8}$$

Оператор F принимает вид $F = M(\mathbf{c}) + M(\mathbf{w})J - M(J\mathbf{w})$.

Обозначив $D = B_1C_s$, условие $F_1 = -F_1^{\mathrm{T}}$ запишем в виде

$$DM(\mathbf{c} - J\mathbf{w})J^{-1} - J^{-1}M(\mathbf{c} - J\mathbf{w})D = M(\mathbf{w})D - DM(\mathbf{w})$$

Умножая на $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$, приведем к эквивалентной системе условий

$$(\mathbf{c} - J\mathbf{w})^{(k)}(d_jA_i^{-1} - d_iA_j^{-1}) = w^{(k)}(d_i - d_j) \tag{3.9}$$

Здесь d_i – собственные значения D, (i, j, k) – перестановка (1, 2, 3).

Так как $C_s = \alpha_{s1}E + \alpha_{s2}J_0^{-1}$, то, учитывая (2.8), запишем

$$d_i = a_{i0}a_i^{-1}(\alpha_{s1} + \alpha_{s2}A_{i0}^{-1})f$$

Система условий (3.9) принимает вид

$$J\mathbf{w} + \lambda_s\mathbf{w} = \mathbf{c} \tag{3.10}$$

где

$$\lambda_s(t) = A_1A_2A_3(\sum A_i(A_{i0} + \nu_s)\Delta A_{i0})^{-1}\sum A_i^{-1}(A_{i0} + \nu_s)\Delta A_{i0} \tag{3.11}$$

Здесь и ниже – суммирование по i от $i = 1$ до $i = 3$; $\nu_s = \alpha_{s1}\alpha_{s2}^{-1}$.

Доказано следующее утверждение.

Предложение 4. Угловая скорость относительно E_3 произвольной допустимой СО E_s при наличии двух КИ может быть записана в виде

$$\mathbf{x}_{s3} = \mathbf{a} + (J + \lambda_sE)^{-1}\mathbf{c} \tag{3.12}$$

Предложение 5. Описания (3.2) и (3.12) множества допустимых угловых скоростей эквивалентны.

Доказательство. Из (3.12) следует, что

$$\mathbf{x}_{45} = (\mathbf{x}_{43} - \mathbf{a}) - (\mathbf{x}_{53} - \mathbf{a}) = (J + \lambda_4E)^{-1}[\mathbf{c} - (J + \lambda_4E)(\mathbf{x}_{53} - \mathbf{a})]$$

и формулу (3.12) можно записать в виде

$$\mathbf{x}_{s5} = (J + \lambda_s E)^{-1}[(\lambda_4 - \lambda_s)(\mathbf{x}_{53} - a) + (J + \lambda_4 E)\mathbf{x}_{45}]$$

совпадающем с (3.2), если

$$[(\lambda_s - \lambda_4)J_0 + \nu_s(J + \lambda_4 E)]\mathbf{x}_{45} = (\lambda_4 - \lambda_s)(J_0 + \nu_s E)(\mathbf{x}_{53} - \mathbf{a})$$

Непосредственно проверяется, что это равенство является тождеством по ν_s, если использовать явные выражения (3.3), (3.8), (3.11) для $\mathbf{x}_{53}$, $\mathbf{x}_{54}$, $\mathbf{a}$, λ_s.

Предложение 6. Множество допустимых базисов системы с двумя КИ имеет инвариант $\mathbf{G}_s \times \mathbf{x}_{s3} + \Lambda_2 \mathbf{x}_{s3}$, т.е. справедливо равенство

$$\mathbf{G}_s \times \mathbf{x}_{s3} + \Lambda_2 \mathbf{x}_{s3} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = (J\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} \tag{3.13}$$

где $\mathbf{p}$ не зависит от выбора допустимого базиса E_s.

Доказательство. Из условия (3.10), задающего множество допустимых базисов, следует, что

$$0 = (J\mathbf{w} - \mathbf{c}) \times \mathbf{w} = (J\mathbf{x}_{s3} - J\mathbf{a} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{x}_{s3} - \mathbf{a})$$

откуда

$$(J\mathbf{x}_{s3}) \times \mathbf{x}_{s3} = (J\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{x}_{s3} + (J\mathbf{x}_{s3}) \times \mathbf{a} - (J\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$$

Учитывая равенство (3.6), получим (3.13).

4. Отметим некоторые свойства допустимых КП-базисов.

Предложение 7. Для любого допустимого КП-базиса E_s системы с двумя КИ справедливо равенство

$$B_1^{-1/2}(B_1^{1/2} J\mathbf{x}_{s3})_3^\bullet = \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{M}_3^f - \mathbf{M} \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть E_s – некоторый КП-базис. Тогда выполнено условие (2.7) и, следовательно, условие (2.3), которое, переходя к дифференцированию в E_3, можно записать в виде

$$(\mathbf{G}_3 - J\mathbf{x}_{s3})_3^\bullet + \mathbf{G}_s \times \mathbf{x}_{s3} + \Lambda \mathbf{x}_{s2} = \mathbf{L}$$

Отсюда, считая E_s одним из допустимых базисов и учитывая свойство (3.13), получим

$$(J\mathbf{x}_{s3})_3^\bullet - \Lambda_1 \mathbf{x}_{s3} = \mathbf{p} + \Lambda \mathbf{x}_{32} + (\mathbf{G}_3)_3^\bullet - \mathbf{L} \tag{4.2}$$

Из формулы (3.4) следует, что $(J\mathbf{x})_3^\bullet - \Lambda_1 \mathbf{x} = B_1^{-1/2}(B_1^{1/2} J\mathbf{x})_3^\bullet$. Используя свойство (1.4) оператора Λ, заключаем, что правая часть равенства (4.2) равна $\mathbf{b}$, что и доказывает (4.1).

Предложение 8. Для системы с двумя КИ угловая скорость $\mathbf{x}_{mn}$ вращения двух произвольных допустимых КП-базисов относительно друг друга удовлетворяет условию

$$(B_1^{1/2} J\mathbf{x}_{mn})_3^\bullet = 0 \tag{4.3}$$

Доказательство следует из предложения 7.

Предложение 9. Если система имеет два КИ, то условие (4.3) выполнено для всех допустимых базисов тогда и только тогда, когда оно выполнено для каких-то двух различных допустимых базисов. В частности, эквивалентной формой условия (4.3) является

$$B_1^{1/2} J\mathbf{x}_{45} = \mathbf{G}_0, \quad (\mathbf{G}_0)_3^\bullet = 0 \tag{4.4}$$

Доказательство. Из формулы (3.2) получим, что

$$\mathbf{x}_{mn} = (J_0 + \nu_m E)^{-1}(J_0 + \nu_n E)^{-1}(\nu_n - \nu_m)J_0\mathbf{x}_{45}$$

и ясна эквивалентность (4.3) и (4.4).

5. Покажем, что полученные выше необходимые условия являются и достаточными для существования двух КИ.

Теорема 2. Система (1.5), описывающая вращение носителя изменяемой системы при свободном движении, обладает при отсутствии динамической симметрии двумя КИ в полной форме тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.8), (4.4) и условие

$$B_1^{-1/2}(B_1^{1/2}J\mathbf{x}_{43})_3^{\bullet} = \mathbf{b} \tag{5.1}$$

Здесь E_4, E_5 – допустимые базисы, соответствующие операторам E и J_0^{-1}.

Доказательство. Необходимость условий (2.8), (4.4), (5.1) показана выше, докажем их достаточность. Покажем, что при выполнении условия (5.1) допустимый базис E_4 является КП-базисом. Это условие при учете (3.4) запишем в виде $(J\mathbf{x}_{43})_3^{\bullet} - \Lambda_1\mathbf{x}_{43} = \mathbf{b}$. Используя свойство (3.13) допустимых базисов и формулу (1.4), условие (5.1) запишем в виде

$$(J\mathbf{x}_{43})_3^{\bullet} = \mathbf{G}_4 \times \mathbf{x}_{43} - \mathbf{M}_4^f - \mathbf{M} + (\mathbf{G}_3)_3^{\bullet} - (\mathbf{G}_4)_4^{\bullet}$$

Отсюда в силу (1.3) имеем $\mathbf{M} + \mathbf{M}_4^f = (\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_4 - J\mathbf{x}_{43})_3^{\bullet} \equiv 0$, и E_4 есть КП-базис.

Если выполнены условия (4.4), (5.1), то $B_1^{-1/2}(B_1^{1/2}J\mathbf{x}_{53})_3^{\bullet} = \mathbf{b}$, и допустимый базис E_5 тоже является КП-базисом. В соответствии с предложением 1 исходная система имеет два КИ.

Критерий существования двух КИ в случае $\Lambda \equiv 0$ слудующий.

Теорема 3. Система (1.5) при $\Lambda \equiv 0$ и отсутствии динамической симметрии имеет два независимых КИ в полной форме тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) $a_i = a_{i0}f(t)$; $f(0) = 1$, $i = 1,2,3$

2) $\mathbf{G}_3 = (A_1A_2A_3)^{-1}f(t)J\mathbf{k}_0$, $(\mathbf{k}_0)_3^{\bullet} = 0$

3) $\mathbf{L} = 0$.

Доказательство. При $\Lambda \equiv 0$ имеем $B_1 = E$, и условие 1 получаем из условия (2.8). Из формулы (3.3) получим

$$\mathbf{x}_{43} = J^{-1}\mathbf{G}_3, \quad \mathbf{x}_{45} = A_1A_2A_3(A_{10}A_{20}A_{30}f)^{-1}J_0J^{-2}\mathbf{G}_3 \tag{5.2}$$

Условие (5.1) преобразуется в условие 2 теоремы 3.

Условие (5.1) запишется в виде $(\mathbf{G}_3)_3^{\bullet} = \mathbf{b}$. При $\Lambda \equiv 0$ имеем $\mathbf{a} = \mathbf{p} = 0$, $\mathbf{c} = \mathbf{G}_3$ и $\mathbf{b} = -\mathbf{M}_3^f - \mathbf{M}$. Из формулы (1.4) следует, что

$$\mathbf{M}_3^f + (\mathbf{G}_3)_3^{\bullet} = \mathbf{M}_2^f + (\mathbf{G}_2)_2^{\bullet}$$

Тогда $\mathbf{b} = (\mathbf{G}_3)_3^{\bullet} - \mathbf{L}$, т.е. $\mathbf{L} = 0$, что завершает доказательство.

В первом условии теоремы 3 только два равенства из трех могут быть независимыми, и это условие в пространстве переменных $\eta_i = a_{i0}^{-1}A_i (i = 1,2,3)$ задает круговой конус

$$\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3 = 0 \tag{5.3}$$

Следовательно, условие 1 налагает лишь одну связь на допустимые законы изменения главных моментов инерции $A_i(t)$.

Для изменяемой системы постоянного состава $\mathbf{M}_r = 0$, и при отсутствии дополнительного управляющего момента $\mathbf{M}^*$ имеем $\mathbf{L} = 0$.

Предложение 10. Свободное движение конфигурационно изменяемой системы постоянного состава без динамической симметрии в однородном поле тяжести обладает двумя независимыми КИ в полной форме тогда и только тогда, когда выполнены условия 1, 2 теоремы 3.

6. Покажем, что при наличии двух независимых КИ исходная система (1.5) может быть приведена к автономной системе гиростата (см. ниже, формула (6.7)). Поскольку эта автономная система имеет два КИ (формула (6.9)), то условия теоремы 2 необходимы и достаточны для приведения системы (1.5) к автономной системе гиростата.

Предложение 11. Условие $n_f = 1$ эквивалентно тождеству

$$B_1 J(\mathbf{x}\times J\mathbf{x}) \equiv f(t) J_0(\mathbf{x}\times J_0\mathbf{x}) \tag{6.1}$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что

$$J\mathbf{x}\times\mathbf{x} \equiv \Delta A_1 x^{(2)} x^{(3)}\mathbf{e}_1 + \Delta A_2 x^{(1)} x^{(3)}\mathbf{e}_2 + \Delta A_3 x^{(1)} x^{(2)}\mathbf{e}_3$$

и отсюда следует эквивалентность тождества (6.1) условиям (2.8).

Пусть теперь допустимые базисы E_4, E_5, определенные в предложении 2, являются КП-базисами. Тогда для $s = 4$ и $s = 5$ выполнено условие (2.3) и система (1.5) может быть записана в виде

$$\Lambda\mathbf{x}_{51} = (\mathbf{G}_1)_1^\bullet - (\mathbf{G}_5)_5^\bullet$$

Обозначим $\mathbf{v} = \mathbf{x}_{51}$; учитывая равенство (1.3), получим

$$(J\mathbf{v})_3^\bullet + \mathbf{v}\times J\mathbf{v} = \Lambda_1\mathbf{v} + \Lambda_2\mathbf{v} + \mathbf{x}_{53}\times J\mathbf{v} + (\mathbf{G}_3 - J\mathbf{x}_{53})\times\mathbf{v} \tag{6.2}$$

Подставим сюда Λ_2 из (3.6) и обозначим $\mathbf{w}_5 = \mathbf{x}_{53} - \mathbf{a}$. В соответствии с (3.10) имеем $\mathbf{w}_5 = (\lambda_5 E + J)^{-1}\mathbf{c}$, и уравнение (6.2) принимает вид

$$(J\mathbf{v})_3^\bullet + \mathbf{v}\times J\mathbf{v} = \Lambda_1\mathbf{v} + [(J+\lambda_5 E)^{-1}\mathbf{c}]\times[(J+\lambda_5 E)\mathbf{v}] \tag{6.3}$$

Предложение 12. При $n_f = 1$ справедливо представление

$$(J+\lambda_5 E)^{-1} = \nu B_1^{-1} J^{-1} J_0, \quad \nu = -(\Delta A_1 \Delta A_2 \Delta A_3)^{-1} f(t)\Sigma A_i \Delta A_{i0} \tag{6.4}$$

Доказательство. При доказательстве предложения 3 было отмечено, что для базиса E_5 можно использовать формулу (3.2) с $\nu_5 = \infty$. Тогда, используя соотношение (3.11), имеем

$$(A_i + \lambda_5)^{-1} = -(\Delta A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 \Delta A_{i0})^{-1} \Delta A_i \Sigma A_i \Delta A_{i0}$$

и, учитывая условие (2.8), получаем формулу (6.4).

Правая часть уравнения (6.3) при учете формулы (6.4) преобразуется к виду $\Lambda_1\mathbf{v} + (B_1^{-1} J^{-1} J_0 \mathbf{c})\times(B_1 J J_0^{-1}\mathbf{v})$. Сравнение формул (3.3), (3.8) приводит при учете (2.8) к связи

$$\mathbf{c} = \Pi_{-1} f(t) J_0^{-1} J^2 B_1^2 \mathbf{x}_{54}, \quad \Pi_\lambda = \prod_{i=1}^{3} A_{i0} A_i^{-1} \beta_{1i}^\lambda \tag{6.5}$$

Введем переменную

$$\mathbf{u} = B_1^{1/2} J_0^{-1} J\mathbf{v} = B_1^{1/2} J_0^{-1} J\mathbf{x}_{51} \tag{6.6}$$

Уравнение (6.3) при учете соотношения (6.5) и условия (4.4) запишем в виде

$$J_0(B_1^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u})_3^{\bullet} + (J^{-1}J_0B_1^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u}) \times (J_0B_1^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u}) = \Pi_{-1}f(t)(B_1^{\frac{1}{2}}\mathbf{G}_0) \times (B_1^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}) + \Lambda_1 J^{-1}J_0B_1^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u}$$

Так как для симметрического оператора A с собственными значениями a_1, a_2, a_3 справедливо тождество $A(A\mathbf{b}_1 \times A\mathbf{b}_2) \equiv a_1a_2a_3\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$ то, учитывая формулу (3.4) и тождество (6.1), последнее дифференциальное уравнение для $\mathbf{u}$ представим в форме

$$J_0(\mathbf{u})_3^{\bullet} = (J_0\mathbf{u} + \mathbf{G}_0) \times \mathbf{u}f(t)\Pi_{-1/2}$$

Переходя к переменной τ, $d\tau = \Pi_{-1/2}f(t)dt$, получим автономную систему

$$J_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}\Big|_{E_3} = (J_0\mathbf{u} + \mathbf{G}_0) \times \mathbf{u} \tag{6.7}$$

Формулу, задающую $\tau(t)$ можно, учитывая (2.8), записать в виде

$$d\tau = (f^{-1}\prod_{i=1}^{3}\frac{A_{i0}\Delta A_i}{\Delta A_{i0}A_i})^{1/2}dt \tag{6.8}$$

Система (6.7) совпадает с системой Эйлера для абсолютной угловой скорости гиростата с постоянным гиростатическим моментом. Эта система интегрируется в квадратурах и имеет два КИ:

$$|J_0\mathbf{u} + \mathbf{G}_0| = \text{const}, \ (\mathbf{u}, J_0\mathbf{u}) = \text{const} \tag{6.9}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 4. Система (1.5), описывающая вращение носителя при свободном движении изменяемой системы в однородном поле силы тяжести, при отсутствии динамической симметрии приводима невырожденным линейным преобразованием $\mathbf{u} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$, $\tau = \tau(t)$ к автономной динамической системе гиростата (6.7) тогда и только тогда, когда исходная система (1.5) имеет два КИ в полной форме.

7. Покажем, что существует простая связь между вращениями относительно носителя допустимых КП-базисов и равномерными вращениями эквивалентного гиростата при наличии у системы двух КИ.

Система (6.7) имеет класс решений вида $\mathbf{u} = \mathbf{const}$ в E_3, соответствующих равномерным вращениям эквивалентного гиростата. При этом $(J_0\mathbf{u} + \mathbf{G}_0) \parallel \mathbf{u}$ и

$$\gamma_1(J_0\mathbf{u} + \mathbf{G}_0) + \gamma_2\mathbf{u} = 0, \ \gamma_1, \gamma_2 = \text{const} \tag{7.1}$$

Данное условие задает все множество абсолютных угловых скоростей равномерных вращений гиростата.

Если исходная система (1.5) имеет два КИ, то любое ее решение может быть получено при помощи преобразования (6.6) из некоторого решения автономной системы (6.7). Множество частных решений системы (1.5), соответствующих равномерным вращениям эквивалентного гиростата, задается условием, получаемым из условия (7.1) при учете связи (6.6), где $\mathbf{x}_{51} = \mathbf{x} + \mathbf{x}_{52}$,

$$\gamma_1 J_0 B_1^{1/2} J_0^{-1} J(\mathbf{x} + \mathbf{x}_{52}) + \gamma_1\mathbf{G}_0 + \gamma_2 B_1^{1/2} J_0^{-1} J(\mathbf{x} + \mathbf{x}_{52}) = 0$$

Подставив сюда $\mathbf{G}_0$ из условия (4.4), получим

$$(\gamma_1 J_0 + \gamma_2 E)(\mathbf{x} + \mathbf{x}_{52}) + \gamma_1 J_0 \mathbf{x}_{45} = 0 \tag{7.2}$$

В соответствии с предложением 3 угловая скорость $\mathbf{x}_{2s}$ носителя относительно некоторого допустимого базиса E_s может быть записана в виде

$$\mathbf{x}_{2s} = \mathbf{x}_{25} + \mathbf{x}_{5s} = \mathbf{x}_{25} - (J_0 + \nu_s E)^{-1} J_0 \mathbf{x}_{45}$$

Следовательно, при $\nu_s = \gamma_2\gamma_1^{-1}$ вектор $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{2s}$ удовлетворяет условию (7.2). Получено следующее свойство.

Предложение 13. Угловая скорость носителя изменяемой системы с двумя КИ относительно любого из допустимых КП-базисов этой системы является частным решением системы (1.5), соответствующим (по формуле (6.6)) абсолютной угловой скорости некоторого равномерного вращения эквивалентного гиростата.

8. Рассмотрим примеры движения изменяемых систем с двумя КИ.

Пример 1. Пусть K – конфигурационно изменяемая система постоянного состава, у которой центр масс C и главные оси не смещаются относительно носителя и кинетический момент (относительно C) движения по отношению к носителю равен нулю. Рассматриваем случай, когда динамическая симметрия отсутствует.

Воспользуемся теоремой 3. Условие 3 выполнено. Базисы E_3 и E_2 совпадают, $\mathbf{G}_3 = 0$ и условие 2 тоже выполнено, причем $\mathbf{k}_0 = \mathbf{G}_0 = 0$.

Рассматриваемую систему K можно реализовать в виде системы, состоящей из трех пар материальных точек, находящихся на трех взаимно перпендикулярных осях. Каждая пара расположена симметрично относительно точки C. Расстояние до точки пересечения осей C и масса каждой точки пары равны ρ_i, m_i. Базис E_2 свяжем с данными осями.

В соответствии с теоремой 3 система K будет иметь два КИ, если расстояния $\rho_i(t)$ связаны условием, получающимся из (5.3), а именно

$$\xi_1^4 - \xi_2^4 + \xi_3^4 = 0; \ \xi_i = m_i^{1/2}\chi_i^{1/4}\rho_i, \ \chi_i = \left| m_j^2\rho_{j0}^4 - m_k^2\rho_{k0}^4 \right| \tag{8.1}$$

Считаем, что $m_1\rho_{10}^2 > m_2\rho_{20}^2 > m_3\rho_{30}^2$.

Квадратичные интегралы могут быть записаны в виде

$$| J_0^{-1/2} J\mathbf{x}_{21} | = \text{const}, \ | J\mathbf{x}_{21} | = \text{const} \tag{8.2}$$

Пример 2. Пусть у системы K, описанной в примере 1, кинетический момент движений относительно носителя отличен от нуля. Условие 3 теоремы 3 тождественно выполнено, а условие 1 приводит к связи (5.3) между главными моментами инерции. Можно считать, например, что система реализована по-прежнему в виде трех пар смещающихся материальных точек, а в центре масс C расположен маховик, влиянием которого на моменты инерции системы пренебрегаем. Тогда расстояния $\rho_i(t)$ должны быть связаны, как и в примере 1, условием (8.1).

Рассмотрим случай, когда кинетический момент $\mathbf{G}_2$ сохраняет свое направление в главном базисе (ось вращения маховика неподвижна относительно носителя). Условие 2 теоремы 3 очевидно выполняется, если $J = \mu(t)J_0$. Если же изменение оператора инерции не является подобным, то данное условие выполняется, только если фиксированное в E_2 направление кинетического момента внутренних движений $\mathbf{G}_2$ совпадает с одним из главных направлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р., Левин Л.М.* Об уравнениях движения ракеты // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 3. С. 301–312.
2. *Ольшанский В.Ю.* Свободное движение сложной механической системы с квадратичными интегралами // Космич. исследования. 1996. Т. 34. № 2. С. 145–149.
3. *Ольшанский В.Ю.* Линейный и квадратичный интегралы сложной механической системы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 37–46.

Саратов

Поступила в редакцию
4.III.1997