

УДК 531.36

© 1998 г. В.Ф. Журавлев

О МОДЕЛИ СУХОГО ТРЕНИЯ В ЗАДАЧЕ КАЧЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассматривается модель комбинированного сухого трения Контенсу [1]. Задача интегрирования касательных напряжений по площадке контакта решена в элементарных функциях в отличие от решения [1], доведенного до эллиптических квадратур. Изучена задача о качении однородного шара по плоскости с сухим трением.

Задача о качении абсолютно твердого тела по поверхности при разных предположениях о характере взаимодействия между ними в точке контакта решалась многими авторами. Обстоятельное изложение современного состояния проблемы и обширную библиографию можно найти в [2].

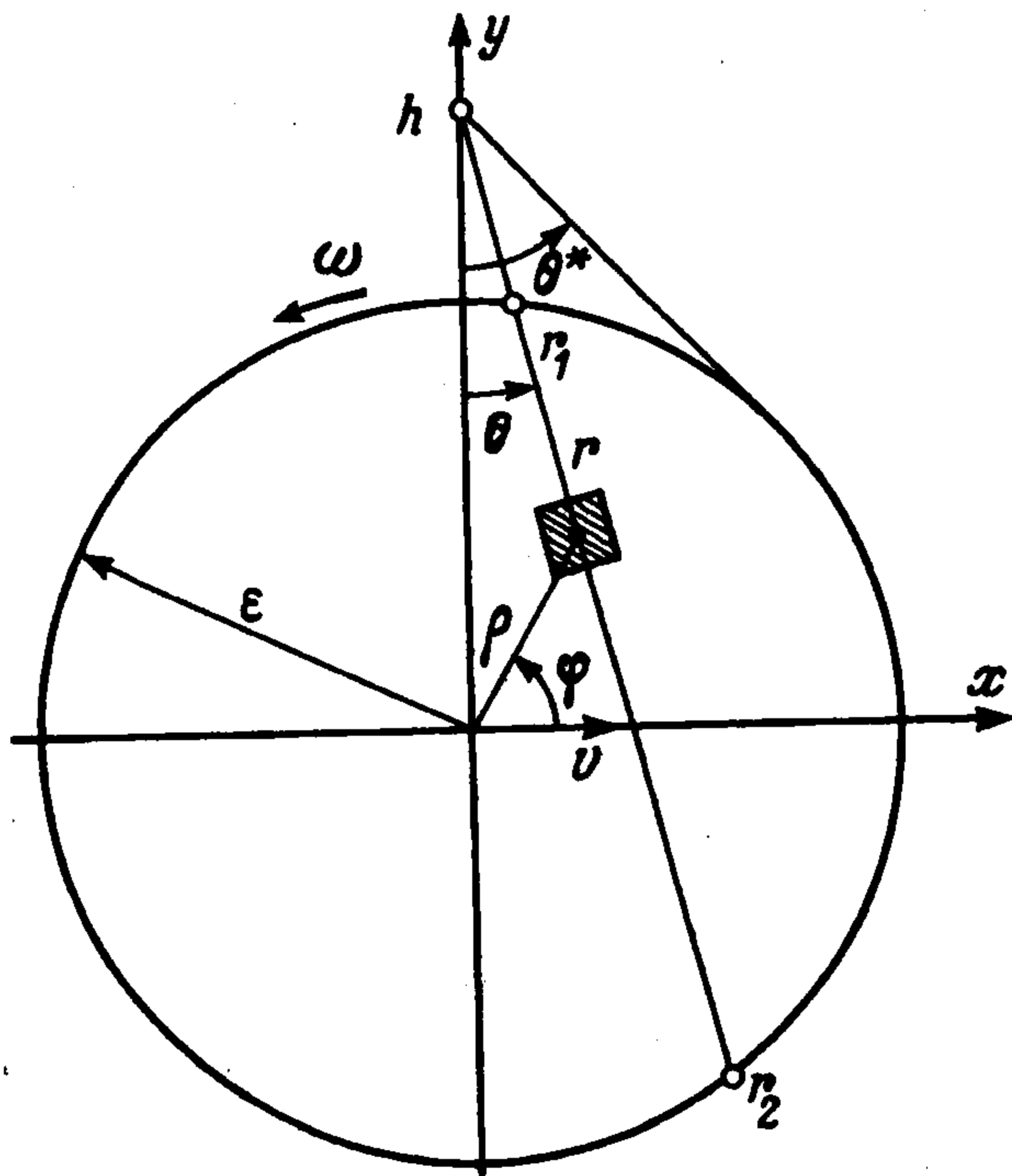
Анализ публикаций приводит к выводу о неудовлетворительном решении указанной задачи, когда взаимодействие в точке контакта описывается силами сухого трения. В этом случае следует различать два типа постановок проблемы: 1) динамические реакции в касательной плоскости в точке контакта предполагаются не превосходящими силы трения трогания, что приводит к условию отсутствия проскальзывания в этой точке и, как следствие, к неголономной связи;

2) проскальзывание допускается, однако его связь с соответствующими реакциями принимается в упрощенной форме. Неудовлетворительность обеих постановок связана с тем, что ссылок на известную гипотезу сухого трения (гипотеза Кулона) для записи условий в контакте недостаточно. Гипотеза Кулона для точечного контакта не сформулировалась, и те условия, которые для него обычно выписываются, на самом деле представляют собой новые гипотезы, не зависящие от гипотезы Кулона.

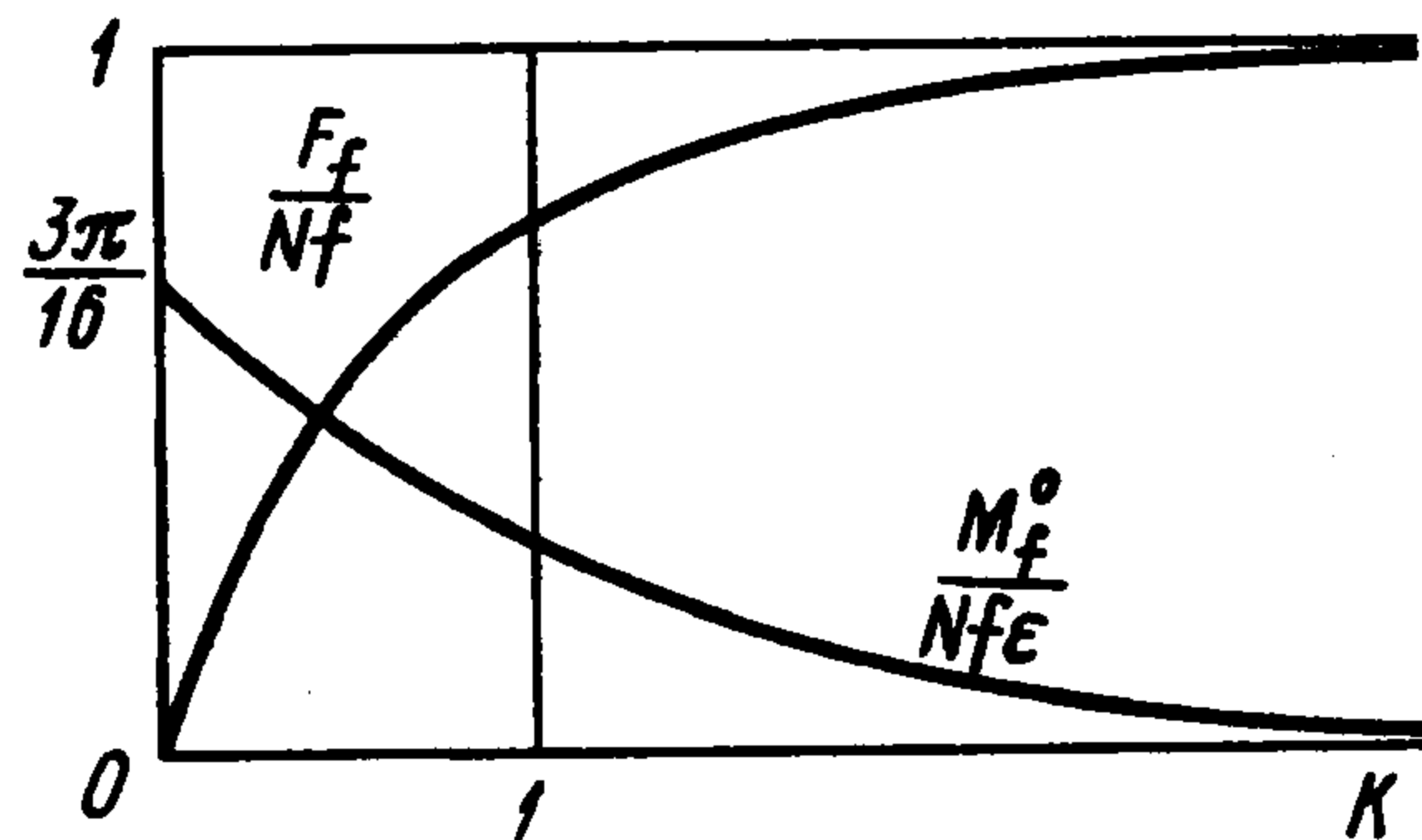
Попытку аккуратно рассмотреть этот вопрос предпринял Контенсу [1], исходя из естественного предположения о том, что для реальных тел точечного контакта не бывает. В соответствии с теорией контактных напряжений Герца тела констатируют по площадке эллиптической формы, в разных точках которой различным является и проскальзывание. Применяя гипотезу Кулона для элементарной площадки внутри области контакта и интегрируя по всей области, Контенсу и выводит те условия, которым должны подчиняться катящиеся тела в силу этой гипотезы. К сожалению, эти условия выражены в неэлементарных функциях, чем, по-видимому, и объясняется отсутствие решенных задач с такими условиями (за исключением задачи о гироскопе Флериэ, решенной самим Контенсу). Между тем эти условия содержат существенные особенности, из-за чего постановки задач в упрощенной постановке оказываются несостоятельными.

Ниже показано, что теория Контенсу допускает значительное упрощение, а ее результаты могут быть представлены в форме, удобной для решения конкретных задач.

1. Модель сухого трения контактирующих тел. Как и в [1], будем предполагать, что контакт тела с поверхностью подчиняется теории контактных напряжений Герца, изложенной, например, в [3], а обе контактирующие поверхности – локально сферические. В этом случае касание происходит по малой круговой площадке радиуса ϵ . Этот радиус зависит от модулей упругости материалов, величины приложенной нагрузки N и радиусов кривизны поверхностей в точке контакта. Распределение нормальных



Фиг. 1



Фиг. 2

контактных напряжений выражается формулой

$$\sigma = \frac{3N}{2\pi\epsilon^2} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{\epsilon^2}}$$

где ρ – расстояние от центра круга контакта до точки, в которой определяется нормальное напряжение σ (фиг. 1).

Будем полагать, что относительное проскальзывание двух тел в пятне контакта складывается из двух простых движений: поступательное скольжение со скоростью v и чистое вращение (верчение) с угловой скоростью ω .

Относительная скорость в произвольной точке перпендикулярна радиусу-вектору этой точки, проведенному из мгновенного центра скоростей. Элементарная сила трения противоположна этой скорости и пропорциональна величине нормального напряжения σ с коэффициентом пропорциональности, равным коэффициенту сухого трения f : $|dF| = \sigma f dx dy$.

Интегрируя проекцию элементарной силы dF на ось x по всей площадке, получаем величину, силы трения скольжения вдоль оси x

$$F_f = f \iint \sigma \cos \theta dx dy \quad (1.1)$$

Из соображений симметрии ясно, что интеграл от проекции элементарной силы на ось y равен нулю, так что (1.1) представляет собой модуль главного вектора касательных сил трения, действующих в площадке контакта.

Двойной интеграл (1.1) был выражен в [1] в полярных координатах φ, ρ , в которых каждый из составляющих интегралов имеет вид эллиптического интеграла. Это и дало основание утверждать [1, 2], что (1.1) нельзя выразить в элементарных функциях.

На самом деле это не так. Интеграл (1.1) выражается в элементарных функциях, если записать его в переменных θ, r (далее вводим переменную $q = r/\epsilon$):

$$F_f = \frac{3Nf}{\pi} \int_0^{\theta^*} Q_1(\theta, k) d\theta, \quad Q_n(\theta, k) = \int_{q_-}^{q_+} \sqrt{-q^2 + 2qk \cos \theta + 1 - k^2} q^n dq \quad (1.2)$$

$$\sin \theta^* = \epsilon/h = \epsilon\omega/v, \quad q_{\pm} = k \cos \theta \pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}, \quad k = h/\epsilon$$

Выражение для силы трения имеет вид (1.2), если мгновенный центр скоростей находится вне пятна контакта, т.е. когда $k > 1$. Если же $k \leq 1$, то вместо (1.2) имеем

$$F_f = \frac{3Nf}{2\pi} \int_0^{\pi} Q_1(\theta, k) d\theta$$

Оба этих интервала вычисляются в элементарных функциях

$$F_f = Nf \times \begin{cases} \frac{3}{32} \pi k (4 - k^2), & k \leq 1 \\ \frac{3}{64k} [4k^2(4 - k^2)\theta^* + 4(k^2 + 2)\sqrt{k^2 - 1}], & k > 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

График функции $F_f(k)$ (1.3) изображен на фиг. 2.

Можно проверить, что не только сама функция F_f непрерывна в точке $k = 1$, но и ее первая производная. Отметим также поведение функции (1.3) при малых и больших k :

$$F_f = \frac{3}{8} \pi Nf k + O(k^2), \quad F_f = Nf \left(1 - \frac{1}{10k^2} \right) + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Для использования закона трения (1.3) в конкретных задачах динамики катящихся твердых тел удобна дробно-линейная аппроксимация функции (1.3) (аппроксимация Паде), сохраняющая производную в нуле и предел в бесконечности:

$$F_f = Nf \frac{3\pi k}{8 + 3\pi k} = Nf \frac{3\pi \nu}{8\epsilon\omega + 3\pi \nu} \quad (1.4)$$

Функция (1.4), передавая точно качественную зависимость силы трения от скорости скольжения ν и скорости вращения ω , достаточно хорошо приближает функцию (1.3) и количественно.

Контенсу [1] ограничился вычислением главного вектора сил трения. Между тем для полного представления условий в контакте требуется еще и вычисление главного момента этих сил относительно центра пятна контакта: $M_f^o = M_f^h - hF_f$, где M_f^h — главный момент сил относительно мгновенного центра скоростей:

$$M_f^h = \frac{3Nf\epsilon}{2\pi} \times \begin{cases} \int_0^{2\pi} Q_2(\theta, k) d\theta, & k \leq 1 \\ 0 \\ \theta^* \\ 2 \int_0^{\theta^*} Q_2(q, k) d\theta & k > 1 \end{cases}$$

Эти интегралы также легко вычисляются:

$$M_f^o = \frac{3Nf\epsilon}{128} \times \begin{cases} \pi(8 - 8k^2 + 3k^4), & k \leq 1 \\ 2[(8 - 8k^2 + 3k^4)\theta^* + 3(2 - k^2)\sqrt{k^2 - 1}], & k > 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Функция (1.5) изображена на фиг. 2. Как и функция (1.3), она гладкая в точке $k = 1$.

Аппроксимация Паде, сохраняющая значение в нуле и поведение на бесконечности момента трения вращения, имеет вид

$$M_f^o = \frac{3\pi Nf\epsilon}{16 + 15\pi k} = \frac{3\pi Nf\epsilon^2 \omega}{16\epsilon\omega + 15\pi \nu} \quad (1.6)$$

Найденные выражения для силы трения скольжения (1.3), (1.4) и момента трения вращения (1.5), (1.6), основанные на применении гипотезы сухого трения Кулона, позволяют сделать принципиальные для применения в задачах динамики катящихся тел выводы.

1°. Трение скольжения и трение вращения не являются независимыми друг от друга. Сила трения скольжения F_f является функцией как скорости скольжения ν , так и угло-

вой скорости вращения ω . Функцией этих же двух аргументов является и момент трения вращения M_f° . Отсюда следует, что часто применяемые условия, в которых эти компоненты не зависят друг от друга, являются умозрительными и к модели сухого трения Кулона никакого отношения не имеют.

2°. Характерное для одномерной модели трения Кулона понятие трения трогания в общем случае отсутствует. При любой отличной от нуля скорости вращения ω трение скольжения F_f в окрестности малых скоростей скольжения ведет себя как вязкое трение. Аналогичная ситуация имеет место и для трения вращения M_f° . По этой же причине такой известный пример неголономной механики, как задача о качении тела без проскальзывания в точке контакта, основан на неправильном представлении законов сухого трения в сложном движении. На самом деле сухое трение по Кулону к неголономной связи приводить не может.

3°. Функции (1.3)–(1.6) не имеют предела в точке $v = \omega = 0$. Это означает, что без априорной информации о характере качения никакое дальнейшее упрощение моделей (1.4) и (1.6) невозможно.

Столь серьезное отличие в проявлении сухого трения, основанного на гипотезе Кулона, от тех упрощенных представлений о нем, которые бытуют в многочисленных решенных задачах о качении твердых тел и которые из гипотезы сухого трения Кулона не следуют, естественно приводят к искаженному представлению о поведении тел в этих задачах. В случаях, когда результаты решенных с такими условиями задач допускают экспериментальную проверку, оказывается, что эксперимент противоречит теории.

Более тщательный анализ условий трения, предпринятый Контенсу [1], как раз и был стимулирован несоответствием никакой из известных моделей (отсутствие проскальзывания, приводящее к неголономной постановке, или наличие проскальзывания с одномерной моделью сухого трения) многократно повторенному эксперименту с гироскопом Флеризэ.

Изучаемая ниже задача о качении однородного шара с условиями сухого трения, определяемыми формулами (1.4), (1.6), приводят к результатам, существенно отличающимся от тех, что были известны для этой задачи ранее (см., например, [2]).

2. Качение с сухим трением однородного тяжелого шара по горизонтальной плоскости. Уравнения движения однородного шара радиуса R и массы m (фиг. 3).

$$J\dot{\omega} = M, \quad m\ddot{r} = F; \quad J = \frac{2}{5}mR^2$$

будем рассматривать в проекциях на неподвижные оси.

Скорость точки шара, совпадающей с центром пятна контакта,

$$v_x = \dot{x} - R\omega_y, \quad v_y = \dot{y} + R\omega_x \quad (2.1)$$

выразим с помощью полярных переменных

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \geq 0, \quad \cos \alpha = v_x/v, \quad \sin \alpha = v_y/v \quad (2.2)$$

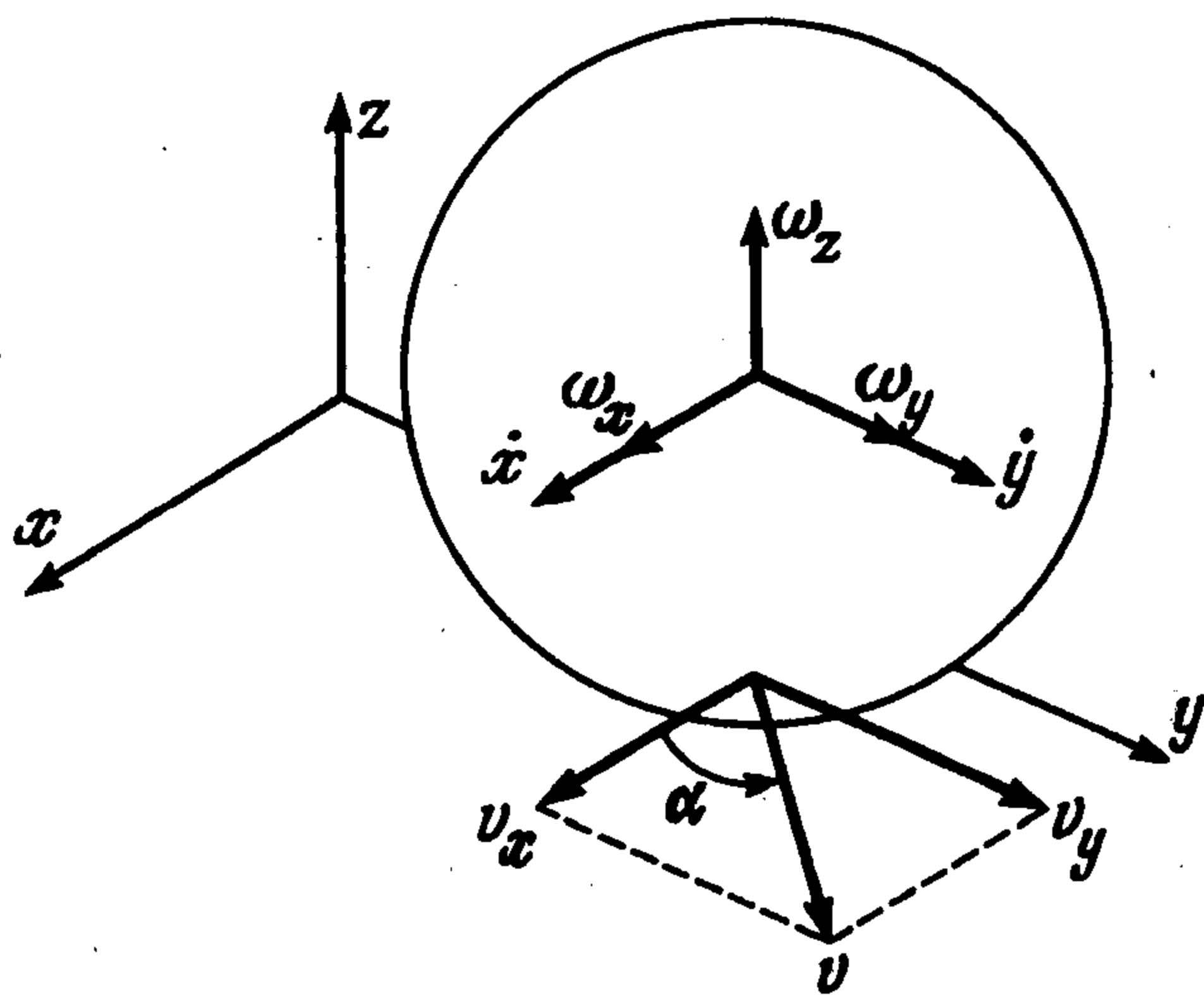
В соответствии с (1.4) для компонент силы F получаем

$$F_x = -F \cos \alpha, \quad F_y = -F \sin \alpha; \quad F = \frac{3\pi N f v}{8\epsilon |\omega_z| + 3\pi v} \quad (2.3)$$

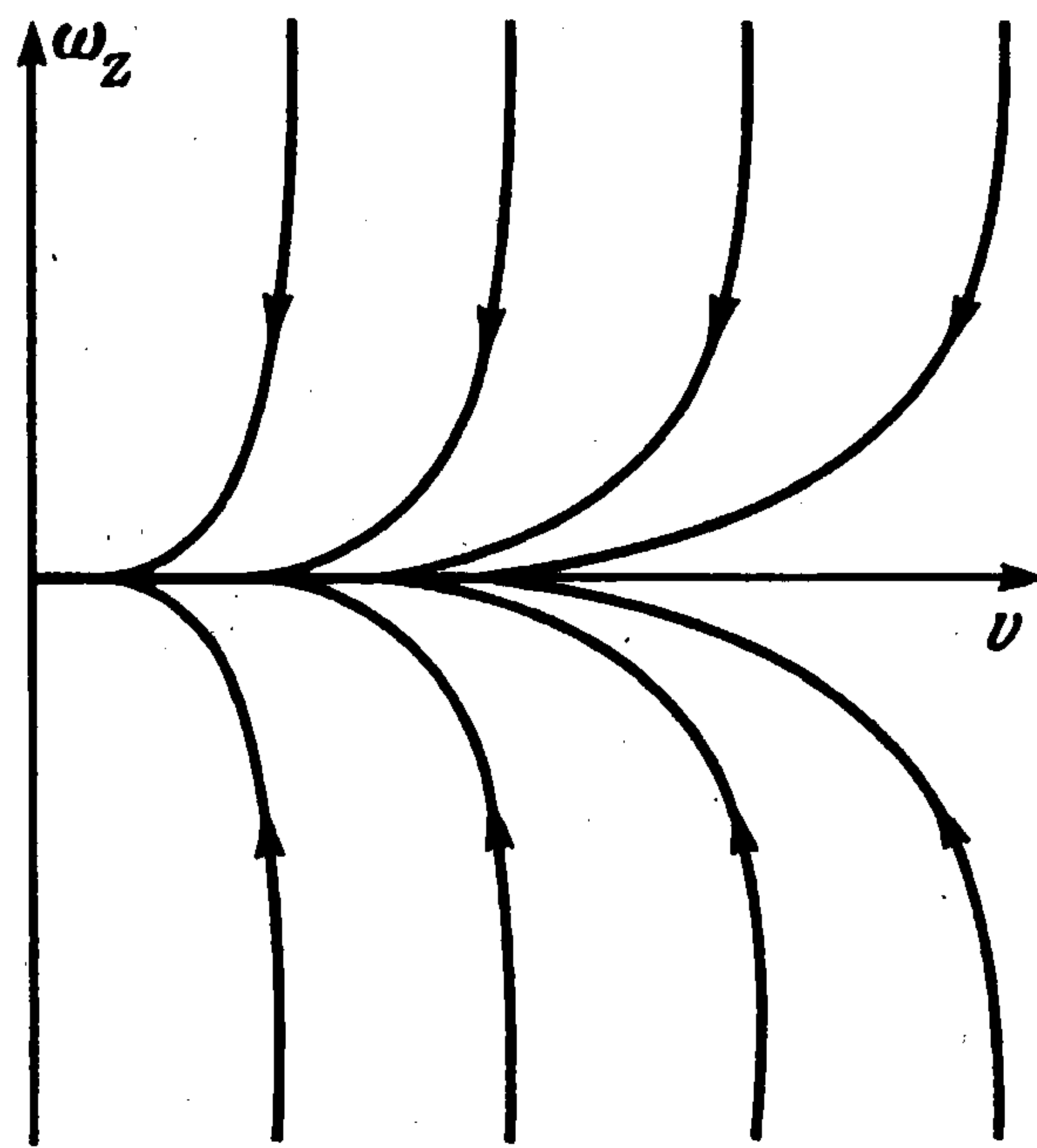
Компоненты момента сил трения, действующего на тело вокруг его центра:

$$M_x = RF_y, \quad M_y = -RF_x, \quad M_z = \frac{3\pi N f \epsilon^2 \omega_z}{16\epsilon |\omega_z| + 15\pi v} \quad (2.4)$$

Последняя компонента записана в соответствии с (1.6).



Фиг. 3



Фиг. 4

Полная система уравнений динамики катящегося с сухим трением тела получается такой:

$$J\dot{\omega}_x = RF_y, \quad J\dot{\omega}_y = -RF_x, \quad J\dot{\omega}_z = -M_z \quad (2.5)$$

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y$$

при учете формул (2.1)–(2.4).

Система (2.5) зависит только от скоростей (угловых и линейных) и не зависит от переменных, определяющих положение и ориентацию тела. В дальнейшем удобно от переменных $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \dot{x}, \dot{y}$ перейти к переменным $\omega_x, \omega_y, u, v, \alpha$, используя формулы (2.1) и (2.2), а также обозначая $u = R\omega_z$ и $\mu = \epsilon/R$. Если после этого выполнить замену времени $t \rightarrow \tau = (3\pi Nf/(2m))t$, то уравнения (2.5) приведутся в новых переменных к виду

$$\frac{d\omega_x}{d\tau} = -\frac{5v \sin \alpha}{R(8\mu|u|+3\pi v)}, \quad \frac{d\omega_y}{d\tau} = \frac{5v \cos \alpha}{R(8\mu|u|+3\pi v)} \quad (2.6)$$

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{5\mu^2 u}{16\mu|u|+15\pi v}, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{7v}{8\mu|u|+3\pi v}, \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = 0$$

Отсюда немедленно следует, что направление относительной скорости проскальзывания при движении шара не изменяется: $\alpha \equiv \text{const}$. Без ограничения общности можно считать $\alpha \equiv 0$, что дает $\omega_x = \text{const}$ и $7R\omega_y + 5v = \text{const}$.

Таким образом, решение системы пяти уравнений свелось к решению системы двух уравнений относительно переменных u, v . В случае, если последняя решается, что все остальные находятся в квадратурах:

$$\omega_y = \frac{1}{7R}(\text{const} - 5v), \quad x = \frac{1}{7} \int (2v + \text{const}) dt, \quad y = y_0 - R\omega_x t$$

Изучим вначале поведение системы качественно. Для этого напишем уравнения интегральных кривых в плоскости u, v

$$\frac{dv}{du} = \frac{7v(16\mu|u|+15\pi v)}{5\mu^2 u(8\mu|u|+3\pi v)}$$

Интегральные кривые представлены на фиг. 4.

В дальнейшем, не уменьшая общности, достаточно рассмотреть случай $u \geq 0$. Точно такие же интегральные кривые имеет следующая система с аналитической правой частью:

$$\frac{du}{d\beta} = -5\mu^2 u(8\mu u + 3\pi v), \quad \frac{dv}{d\beta} = -7v(16\mu u + 15\pi v) \quad (2.7)$$

для которой все кривые достигают положения равновесия за бесконечное время в переменной β . Связь независимых переменных β и τ дается уравнением

$$\tau = \int_0^{\beta} (16\mu u + 15\pi v)(8\mu u + 3\pi v) d\beta \quad (2.8)$$

Система (2.7) имеет частное решение $u = u(1)/\beta$, $v = v(1)/\beta$. Таков же характер поведения при $\beta \rightarrow \infty$ и всех других решений этой системы $u \sim 1/\beta$, $v \sim 1/\beta$. Отсюда следует, что при $\beta \rightarrow \infty$ интеграл (2.8) сходится. Это означает, что все интегральные кривые системы (2.6) в плоскости (u, v) приходят в точку $u = v = 0$ за конечное время. Таким образом, скорость скольжения v и скорость вращения $\omega_z = u/R$ одновременно обращаются в нуль. С этого момента постоянной становится и угловая скорость ω_y . Дальнейшее движение представляет собой качение без скольжения вдоль прямой линии с постоянной линией и угловой скоростью, причем угловая скорость лежит в плоской (x, y) и перпендикулярна линейной скорости.

Аналитическое решение системы (2.6), интересное на конечном интервале времени, на котором существует проскальзывание, может быть построено посредством перехода к каноническим координатам группы подобия $u \rightarrow u' = au$, $v \rightarrow v' = av$, которая, как нетрудно видеть, является группой симметрий системы (2.6). Соответствующая замена $(u, v) \rightarrow (q, p)$, где $q = v/u$, $p = \ln v$, приводит к уравнению с разделяющимися переменными.

Тем самым вся задача сведена к квадратурам.

Аналитическое решение можно существенно упростить, воспользовавшись малостью безразмерного параметра $\mu = \varepsilon/R$ и разыскивая решение в виде подходящих асимптотик по μ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la theorie de la toupie. Gyrodynamios. Symposium Celerina, August 20–23, 1962, Springer-Verlag, 1963; = Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением вращения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
2. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 335 с.
3. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М.: Машгиз, 1958. 975 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.II.1998