УДК 531.36:534.1

© 1998 г. А.А. Джумабаева, А.Л. Куницын

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ПРИ МНОГОКРАТНОМ РЕЗОНАНСЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача об устойчивости периодического движения нелинейной периодической гамильтоновой системы в случае чисто мнимых характеристических показателей, одновременно удовлетворяющих нескольким резонансным соотношениям четвертого порядка. Формулируются условия устойчивости и неустойчивости по членам третьего порядка включительно. Некоторые выводы обобщают результаты, полученные ранее [1].

Рассмотрим задачу об устойчивости точки покоя гамильтоновой системы уравнений с функцией Гамильтона $H(x, y, t) = H_2 + H_3 + \ldots$, где H_l – формы l-го порядка переменных $x = (x_1, \ldots,, x_N)$ и $y = (y_1, \ldots, y_N)$ с периодическими по времени t коэффициентами периода ω. Будем предполагать, что все характеристические показатели $\lambda_s = i\omega_s$ линейной части соответствующей канонической системы уравнений чисто мнимые, различные и удовлетворяют, кроме того, одновременно нескольким соотношениям внутреннего резонанса четвертого порядка

$$\langle \mathbf{p}, \Omega \rangle = 2\pi\omega^{-1}q; \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1}$$

и резонансы ниже четвертого порядка отсутствуют. Здесь $\mathbf{p}$ – n-вектор с целочисленными взаимно простыми компонентами одновременно не равными нулю, $|p_1| +, \ldots, +|p_n| = 4$, $\Omega = |\omega_1, \ldots, \omega_n|$ – вектор характеристических показателей $(1 \leqslant n \leqslant N)$.

Случай двукратного резонанса вида (1) для автономных систем рассматривался ранее [1] и были получены достаточные условия устойчивости модельной (содержащей члены до третьего порядка включительно) системы.

Цель работы – обобщение этих результатов на периодические системы и рассмотрение новых типов резонансов, возникающих вследствие неавтономности. Во всех дальнейших рассуждениях будем считать, что форма H_2 уже приведена к каноническому виду $2H_2 = \omega_1(x_1^2 + y_1^2) + \ldots + \omega_N(x_N^2 + y_N^2)$, что, как известно [2], всегда возможно.

Рассмотрим вначале случай, когда все резонансы (1) независимы (т.е. не содержат общих показателей). Пусть имеется μ резонансных соотношений, содержащих n_ν $(\nu = 1, \ldots, \mu)$ показателей каждое, так что

$$\langle p_\nu, \Omega_\nu \rangle = 2\pi\omega^{-1}q_\nu; \quad q_\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (\nu = 1, \ldots, \mu) \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{p}_\nu = | p_{m_{\nu-1}+1}, \ldots, p_{m_\nu} |$, $\Omega_\nu = | \omega_{m_{\nu-1}+1}, \ldots, \omega_{m_\nu} |$; при этом $n_0 = 0$,

$$n_1 + \ldots + n_\mu = n \leqslant N, \quad m_\nu = n_1 + \ldots + n_\nu, \text{ а } \|\mathbf{p}_\nu\| = |p_{m_{\nu-1}+1}| +, \ldots, + |p_{m_\nu}| = 4$$

Как известно [3–5], в случае однократного резонанса (1) исходную систему посредством полиномиального канонического преобразования с периодическими коэффициентами можно привести к нормальной форме, в которой будут отсутствовать члены четного порядка, а члены нечетного порядка не будут содержать времени t. Такого же результата можно добиться и в случае многократного резонанса (2). В специально подобранных полярных координатах r_j, θ_j [5] нормализованная (до членов четвертого порядка включительно) часть гамильтониана примет вид

$$2H = \sum_{j=1}^{N} \omega_j r_j + 2H_4 \tag{3}$$

$$H_4 = \sum_{\nu=1}^{\mu} A_\nu \sqrt{R_\nu} \cos\psi_\nu + \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} r_i r_j, \qquad R_\nu = \Pi r_\alpha^{p_\alpha}, \quad \psi_\nu = \sum p_\alpha \theta_\alpha$$

Здесь в суммах и произведениях индекс α пробегает все значения от $m_{\nu-1}+1$ до m_ν, где $m_{\nu-1} = n_1 + \ldots + n_{\nu-1}$.

Полученная нормальная форма полностью совпадает с нормальной формой, приведенной ранее [1] при $\mu = 2$. Кроме того, представление (3) не исключает наличия среди резонансов (2) "одночастотных" (соответствующих $n_\nu = 1$), невозможных в автономной системе.

Как и в [1], будем называть резонанс слабым, если в отсутствие других резонансов он не приводит к неустойчивости модельной системы; в противном случае будем называть его сильным.

Легко показать, что для тривиального решения модельной системы, соответствующей гамильтониану (3) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если среди резонансов (2) есть хотя бы один сильный, то тривиальное решение модельной системы неустойчиво.

Пусть сильному резонансу соответствует $\nu = \gamma$ в (2). Тогда, полагая в канонической системе, соответствующей гамильтониану (3), все $r_j = 0$, кроме тех, для которых $j = m_{\gamma-1}+1, \ldots, m_\gamma$ получим систему уравнений, описывающих ситуацию с одним резонансом, при котором, согласно условию теоремы, тривиальное решение неустойчиво. Отсюда вытекает и неустойчивость тривиального решения всей исходной системы.

Случай, когда все резонансы слабые, является более сложным. При этом необходимо различать два вида слабых резонансов: А – слабость резонанса обусловлена переменной знака среди компонент резонансного вектора $\mathbf{p}_\nu$ (в этом случае – устойчивость в любом конечном порядке [3]) и Б – все компоненты резонансного вектора $\mathbf{p}_\nu$ одного знака, а слабость каждого резонанса обусловлена неравенствами

$$|A_\nu| < |S_\nu| \quad (\nu = 1,\ldots,\mu); \qquad S_\nu = \left(\sum A_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta\right) \Big/ (2\sqrt{P_\nu}), \quad P_\nu = \Pi p_\alpha^{p_\alpha}$$

Здесь в суммах и произведениях индексы α и β пробегают все значения от $m_{\nu-1}+1$ до m_ν, где $m_{\nu-1} = n_1 + \ldots + n_{\nu-1}$.

Теорема 2. Пусть в системе отсутствует одночастотный резонанс и все резонансы слабые в смысле А. Тогда тривиальное решение модельной системы, соответствующей гамильтониану (3), устойчиво.

В этом случае модельная система, соответствующая гамильтониану (3), имеет знакоопределенный интеграл

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i r_i = \text{const}, \qquad \gamma_i = \text{const} > 0$$

Действительно, требование тождественного обращения в нуль производной $\dot{\Phi}$ в силу соответствующей модельной системы приводит к тождеству

$$\dot{\Phi} = -2\sum_{\nu=1}^{\mu} A_\nu \sqrt{R_\nu} \sin\psi_\nu \left(\sum \gamma_\alpha p_\alpha\right) \equiv 0$$

которое может выполняться лишь при условии $\sum\gamma_\alpha p_\alpha = 0$ (индекс α пробегает все значения от $m_{\nu-1}+1$ до m_ν, $\nu = 1, \ldots, \mu$).

Полученные уравнения относительно γ_α всегда имеют строго положительное решение, если есть перемена знака среди чисел p_α, и следовательно, Φ действительно является определенно-положительным интегралом, что и доказывает устойчивость модельной системы.

Более сложным является случай, когда резонансы слабые в смысле Б.

Теорема 3. Пусть в системе все μ резонансов слабые и среди них имеется любое число слабых в смысле Б. Тогда тривиальное решение модельной системы, соответствующей гамильтониану (3), устойчиво, если среди величин S_i ($i = 1, \ldots, m$) нет перемены знака и $q_i = 0$.

Не нарушая общности, будем считать, что первые k резонансов слабы в смысле А и все остальные – в смысле Б. В этом случае система имеет следующие интегралы:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{l} \gamma_j r_j + \sum_{i=n+1}^{N} \gamma_i r_i \quad (l = n_1 + \ldots + n_k)$$

$$I_s = r_s - \frac{p_s}{p_{m_{\nu-1}+1}} r_{m_{\nu-1}+1} \quad (s = m_{\nu-1}+2, \ldots, m_\nu,\ \nu = k+1, \ldots, \mu) \tag{4}$$

$$H_4 = \sum_{\nu=1}^{\mu} A_\nu \sqrt{R_\nu} \cos\psi_\nu + \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} r_i r_j$$

из которых построим интеграл (суммирование по индексу s производится согласно (4))

$$G = \Phi^4 + \sum I_s^4 + H_4^2$$

являющийся знакоопределенным. Действительно, поскольку при $r_j = r_i = 0$, $r_s = p_j / p_{m_{\nu-1}+1} r_{n_{\nu-1}+1}$ имеем

$$\Phi = I_s = 0, \quad H_4 = 2 \sum_{\nu=k+1}^{\mu} \frac{r^2_{m_{\nu-1}+1}}{p^2_{m_{\nu-1}+1}} \sqrt{P_\nu} (A_\nu \cos\theta_\nu + S_\nu)$$

то, учитывая, что резонансы слабы в смысле Б и что среди S_ν ($\nu = k+1, \ldots, \mu$) нет перемены знака, убеждаемся, что G – определенно-положительная функция.

Следствие 1. Пусть в системе все μ резонансов слабые и среди них только один слабый в смысле Б. Тогда тривиальное решение модельной системы, соответствующей гамильтониану (3), устойчиво.

Рассмотрим теперь случай взаимодействия резонансов, зацепленных по одной частоте. Пусть имеется μ резонансных соотношений, содержащих n_ν ($\nu = 1, \ldots, \mu$) показателей каждое, так что

$$p_\nu^* \omega_0 + \langle \mathbf{p}_\nu, \Omega_\nu \rangle = 2\pi\omega^{-1} q_\nu; \quad q_\nu = 0, \pm1, \pm2, \ldots \ (\nu = 1, \ldots, \mu) \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{p}_\nu = | p_{m_{\nu-1}+1}, \ldots, p_{m_\nu} |$, $\Omega_\nu = | \omega_{m_{\nu-1}+1}, \ldots, \omega_{m_\nu} |$; при этом $n_0 = 0$, $n_1 + \ldots + n_\mu = n \leqslant N$, $m_\nu = n_1 + \ldots + n_\nu$, а $| p_\nu^* | + \| \mathbf{p}_\nu \| = 4$.

В специально подобранных полярных координатах r_j, θ_j [5] нормализованная (до членов четвертого порядка включительно) часть гамильтониана примет тот же вид, что и (3),

$$2H=\sum_{j=1}^{N}\omega_j r_j+2H_4 \tag{6}$$

$$H_4=\sum_{\nu=1}^{\mu}A_\nu\sqrt{R_\nu}\cos\psi_\nu+\sum_{i,j=1}^{N}A_{ij}r_ir_j,\quad R_\nu=r_0^{|p_\nu^*|}\Pi r_\alpha^{|p_\alpha|},\quad \psi_\nu=p_\nu^*\theta_0+\sum p_\alpha\theta_\alpha$$

Полученная нормальная форма полностью совпадает с нормальной формой, приведенной ранее [1] при $\mu = 2$.

Можно убедиться, что для тривиального решения модельной системы, соответствующей гамильтониану (6), справедлива теорема 1.

При взаимодействии слабых резонансов, содержащих одну общую частоту, ситуация оказывается более сложной, чем при независимых резонансах. В этом случае достаточные условия устойчивости даются следующими теоремами.

Теорема 4. Пусть все резонансы слабы в смысле А. Тогда тривиальное решение модельной системы, соответствующей гамильтониану (6), устойчиво.

Доказательство опять основывается на существовании знакоопределенного интеграла

$$\Phi=\sum_{i=0}^{N}\gamma_i r_i=\text{const}$$

где γ_i – положительные постоянные. Действительно, требование тождественного обращения в нуль производной $\dot\Phi$ приводит к тождеству

$$\dot\Phi=-2\sum_{\nu=1}^{\mu}A_\nu\sqrt{R_\nu}\sin\Psi_\nu\left(\sum\gamma_\alpha p_a+\gamma_0 p_\nu^*\right)\equiv 0$$

которое может выполняться лишь при условии $\sum\gamma_\alpha p_a+\gamma_0 p_\nu^*=0$ (индекс α пробегает все значения от $m_{\nu-1}+1$ до $m_{\nu-1}+m_\nu$, $\nu = 1, \ldots, \mu$).

Полученные уравнения относительно γ_α, всегда имеют строго положительное решение, если есть перемена знака среди чисел p_α, p_ν^* и следовательно, Φ действительно является определенно-положительным интегралом, что и доказывает устойчивость модельной системы.

Более сложным является случай, когда резонансы слабые в смысле Б.

Введем обозначение

$$S_{\gamma\nu}=\sum_i\sum_j C_{ij}p_ip_j\quad (j=m_{\gamma-1}+1,\ldots,m_\gamma,\ i=m_{\nu-1}+1,\ldots,m_\nu)$$

Теорема 5. Пусть в системе все μ резонансов слабые и среди них имеется любое число слабых в смысле Б. Тогда тривиальное решение модельной системы, соответствующее гамильтониану (6), устойчиво, если среди величин S_i, S_{ij} ($i = 1, \ldots, \mu - k$, $j = 1, \ldots, \mu - k$) нет перемены знака, а среди компонент резонансного вектора $\mathbf{p}_\nu$, соответствующего слабому резонансу в смысле А, есть перемена знака и $q_i = 0$.

Не нарушая общности, будем считать, что первые k резонансов слабы в смысле А, остальные – в смысле Б. Система имеет следующие интегралы:

$$\Phi=\sum_{s=1}^{l}\gamma_s r_s+\sum_{i=n+1}^{N}\gamma_i r_i\quad (l=n_1+\ldots+n_k)$$

$$I_j=r_j-\frac{p_j}{p_{m_{\nu-1}+1}}r_{m_{\nu-1}+1}\quad (j=m_{\gamma-1}+2,\ldots,m_\gamma,\ \nu=k+1,\ldots,\mu) \tag{7}$$

$$\hat{I}_{sj} = r_0 - \frac{p_s}{p_{m_{\upsilon-1}+1}} r_{m_{\upsilon-1}+1} - \frac{p_j}{p_{m_{\nu-1}+1}} r_{m_{\nu-1}+1} \quad (\upsilon = 1,\ldots,k,\ \nu = k+1,\ldots,\mu)$$

$$H_4 = \sum_{\nu=1}^{\mu} A_\nu \sqrt{R_\nu} \cos\psi_\nu + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} A_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta$$

из которых построим интеграл (суммирование по индексам s и j производится согласно (7))

$$G = \Phi^4 + \sum I_j^4 + \sum\sum I_{sj}^4 + H_4^2$$

являющийся знакоопределенным. Действительно, поскольку при

$$r_s = r_i = 0, \quad r_j = p_j / p_{m_{\nu-1}+1} r_{m_{\nu-1}+1}, \quad r_0 = p_j^* / p_{n_{\nu-1}+1} r_{n_{\nu-1}+1}$$

имеем

$$\Phi = \hat{I}_{sj} = I_j = 0$$

$$H_4 = \sum_{\upsilon=k+1}^{\mu} \left(2 \frac{r_{m_{\upsilon-1}+1}^2}{p_{m_{\upsilon-1}+1}^2} \sqrt{P_\upsilon} (A_\upsilon \cos\theta_\upsilon + S_\upsilon) + \sum_{\substack{\nu=k+1 \\ (\nu\neq\upsilon)}}^{\mu} \frac{r_{m_{\upsilon-1}+1} r_{m_{\nu-1}+1}}{p_{m_{\upsilon-1}+1} p_{m_{\nu-1}+1}} S_{\nu\upsilon} \right)$$

то, учитывая, что резонансы слабы в смысле Б и что среди S_υ, $S_{\nu\upsilon}$ ($\upsilon = k + 1, \ldots, \mu$, $\nu = k + 1, \ldots, \mu$) нет перемены знака, убеждаемся, что G – определенно-положительная функция.

Следствие 2. Пусть в системе все μ резонансов слабые в смысле Б. Тогда тривиальное решение модельной системы, соответствующей гамильтониану (6), устойчиво, если среди величин S_i, S_{ij} ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$) нет перемены знака и $q_i = 0$.

Рассмотрим случай, когда общей компонентой многократного резонанса является одночастотный резонанс. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Если одночастотный резонанс слабый, а все остальные слабы в смысле А и среди компонент резонансного вектора $\mathbf{p}_\nu$, соответствующего слабому резонансу в смысле А, есть перемена знака, то тривиальное решение модельной системы устойчиво.

Заметим, что система имеет интегралы

$$\Phi = \sum_{s=1}^{l} \gamma_s r_s + \sum_{i=n+1}^{N} \gamma_i r_i \quad (l = n_1 + \ldots + n_k)$$

$$I_j = r_j - r_{00} - \frac{p_j}{p_{m_{\nu-1}+1}} r_{m_{\nu-1}+1}$$

$$(j = m_{\gamma-1} + 2, \ldots, m_\gamma,\ \nu = k+1, \ldots, \mu,\ \dot{r}_{00} = -4A_0 r_0^2 \cos(4\theta_0 - \varphi_0)) \tag{8}$$

$$H_4 = \sum_{\nu=1}^{\mu} A_\nu \sqrt{R_\nu} \cos\psi_\nu + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} A_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta + A_0 r_0^2 \sin(4\theta_0 - \varphi_0)$$

из которых построим интеграл (суммирование по индексу j производится согласно (8))

$$G = \Phi^4 + \sum I_j^4 + H_4^2$$

являющийся знакоопределенным. Действительно, поскольку при $r_s = r_i = 0$, $r_0 = r_{00}$ имеем

$$\Phi = I_j = 0, \quad H_4 = r_{00}^2(A_0 \sin(4\theta_0 - \varphi_0) + C_{00})$$

то, учитывая, что одночастотный резонанс слабый (т.е. $C_{00} > A_0$), убеждаемся, что интеграл G – определенно-положительная функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куницын А.Л., Туякбаев А.А.* Устойчивость гамильтоновых систем при многократном резонансе четвертого порядка. // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4 С. 672–675.
2. *Ляпунов А.М.* Сбор. Соч.: Т. 2. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
3. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
4. *Куницын А.Л., Ташимов Л.Т.* Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. Алма-Ата: Гылым, 1990. 195 с.
5. *Куницын А.Л., Маркеев А.П.* Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 4. С. 58–139.

Москва

Поступила в редакцию
24.VI.1997