УДК 531.36:534.11

© 1998 г. Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров

ОДНОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исследуется слабонелинейная колебательная система с распределенными параметрами. Изложен и обоснован асимптотический метод построения решения, описывающего колебательные движения одномодового (одночастотного) приближения, которые обычно реализуются в практических задачах. Сформулированы конструктивные достаточные условия и проведено обоснование близости приближенного одночастотного решения к точному на асимптотически большом интервале времени. Рассмотрены возможные обобщения структуры возмущающих функций и изучен случай конечномодового приближения. Для иллюстрации эффективности метода одночастотного приближения построены решения конкретных задач, представляющих прикладной интерес.

1. Постановка задачи. Рассмотрим слабонелинейную колебательную систему, описываемую возмущенным уравнением гиперболического типа с однородными граничными условиями третьего рода

$$\ddot{u} = u'' + \varepsilon f(x, u, u', \dot{u}), \quad u = u(x,t), \quad 0 < x < 1 \tag{1.1}$$

$$\alpha_0 u'(0,t) - \beta_0 u(0,t) = 0, \quad \alpha_1 u'(1,t) + \beta_1 u(1,t) = 0 \tag{1.2}$$

$$\alpha_{0,1} \geqslant 0, \quad \beta_{0,1} \geqslant 0, \quad \alpha_{0,1} + \beta_{0,1} = 1, \quad t \geqslant 0$$

Точкой обозначена производная по безразмерному времени t, штрихом – по нормированной пространственной координате x. Параметр ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 \ll 1$), характеризует влияние нелинейных возмущающих факторов, описываемых функцией f довольно общего вида. Граничные условия третьего рода (1.2) с нормированными коэффициентами $\alpha_{0,1}$, $\beta_{0,1}$ учитывают нежесткость крепления упругой системы на ее концах (при $\alpha_{0,1} > 0$). В предельных случаях $\beta_{0,1} = 1$ ($\alpha_{0,1} = 0$) или $\beta_{0,1} = 0$ ($\alpha_{0,1} = 1$) имеют место граничные условия первого или второго рода на одном или обоих концах.

Для колебательной системы, описываемой краевой задачей (1.1), (1.2), по аргументу времени t ставится задача Коши

$$u(x,0) = h(x), \quad \dot{u}(x,0) = g(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1.3}$$

где функции $h(x)$, $g(x)$ определяют распределения смещений u и скоростей $\dot{u}$ в "начальный" момент времени $t = 0$. Отметим, что рассматриваемая система (1.1), (1.2) автономна, т.е. не содержит времени явно. Функции f, h, g далее предполагаются достаточно гладкими и таковыми, что существует сильное (физическое) решение $u(x, t, \varepsilon)$ задача (1.1)–(1.3) (по x функции u, u', $\dot{u}$ интегрируемы с квадратом) на асимптотически большом интервале $t \sim \varepsilon^{-1}$.

При отсутствии возмущений ($\varepsilon = 0$) имеет место классическая начально-краевая задача с граничными условиями третьего рода. Она достаточно хорошо изучена в курсах по математической физике [1–3]. В общем случае ее решение $u_0(x, t)$ – почти периодическая функция времени со счетным базисом $\{\nu_n\}$ несоизмеримых частот ν_n. Это решение может быть представлено в виде ряда Фурье по ортонормированной системе функций (базису) $\{X_n(x)\}$:

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\theta_n(t) \equiv (X(x), \theta(t)), \quad X_n(x) = \frac{\chi_n(x)}{\|\chi_n\|}$$

$$\chi_n(x) = \beta_0 \sin \nu_n x + \alpha_0 \nu_n \cos \nu_n x, \quad \|\chi_n\|^2 = \int_0^1 \chi_n^2(x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\theta_n(t) = h_n \cos \nu_n t + (g_n / \nu_n) \sin \nu_n t \tag{1.4}$$

$$\nu_n = \operatorname*{Arg}_{\nu}[(\beta_0\beta_1 - \nu^2\alpha_0\alpha_1)\sin\nu + (\alpha_0\beta_1 + \beta_0\alpha_1)\nu\cos\nu] > 0$$

$$h_n = \langle h, X_n \rangle \equiv \int_0^1 h(x)X_n(x)dx, \quad g_n = \langle g, X_n \rangle \equiv \int_0^1 g(x)X_n(x)dx$$

Свойства сходимости ряда для u_0 (1.4) и производных определяются скоростью убывания коэффициентов h_n, g_n при $n \to \infty$.

Из уравнения (1.4) для собственных частот ν_n следует, что $\nu_n \to \pi n$ при $\alpha_0\alpha_1 > 0$ и $\nu_n \to \pi\,(n + 1/2)$ при $\alpha_0\alpha_1 = 0$, $\alpha_0\beta_1 + \beta_0\alpha_1 > 0$. Это свойство спектра приводит к весьма сложному поведению во времени функции f после подстановки в нее невозмущенного решения $u_0\,(x, t)$ и его производных. Проблема существования равномерного среднего по t и отсутствия "внутренних" резонансов и "малых знаменателей" представляет принципиальные трудности для применения теории возмущений. Использование стандартного формального подхода к построению приближенного решения (см. [4] и библиографию) связано в общем случае с выполнением ряда ограничительных неконструктивных условий, которые, по-видимому, могут выполняться лишь для линейных функций f. При этом возникают также вопросы сходимости рядов Фурье, представляющих приближенное формальное решение и его производные. Отсутствие должного обоснования вызывает определенные затруднения для уверенного применения предлагаемых алгоритмов решения и сомнения в оценке достоверности получаемых результатов при исследовании конкретных колебательных систем.

Перспективным теоретическим подходом к исследованию сложных многочастотных систем является асимптотическая методика одночастотного приближения [4–7] и примыкающие к ней методы усреднения (разделения движений) [4–8] и локальных интегральных многообразий [4–6, 9]. В прикладных исследованиях установлено, что в нелинейных системах с распределенными параметрами, как правило, реализуются одночастотные колебания главной (низшей) моды [10]. Колебания более высоких мод практически не возбуждаются и, кроме того, они затухают существенно быстрее. Эти наблюдения требуют теоретического обоснования на основе конструктивных достаточных условий.

2. Исследование вспомогательной счетномерной системы. Пока проводимые выкладки носят в основном вспомогательный формальный характер. Они оказываются справедливыми при весьма необременительных требованиях к структуре и гладкости функций f, h, g.

Будем искать решение возмущенной задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда Фурье по ортонормированной полной системе функций $\{X_n(x)\}$:

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\theta_n(t,\varepsilon) \equiv (X, \theta) \tag{2.1}$$

в котором функции $X_n(x)$ определены согласно (1.4), а θ_n – неизвестные обобщенные координаты системы. После подстановки представления (2.1) в уравнение (1.1) с помощью стандартной процедуры для определения искомых переменных θ_n получим счетномерную задачу Коши [4]

$$\ddot{\theta}_n + \nu_n^2\theta_n = \varepsilon f_n(\theta,\dot{\theta}), \quad \theta_n(0,\varepsilon) = h_n, \quad \dot{\theta}_n(0,\varepsilon) = g_n$$
$$\theta = (\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n,\ldots), \quad \dot{\theta} = (\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2,\ldots,\dot{\theta}_n,\ldots) \tag{2.2}$$
$$f_n(\theta,\dot{\theta}) = \langle f(x,(X(x),\theta), (X'(x),\theta), (X(x),\dot{\theta})), X_n(x)\rangle$$

Вместо θ_n, $\dot{\theta}_n$ введем медленные (оскулирующие) переменные a_n, b_n типа переменных Ван дер Поля [6]. Получим стандартную (в смысле Крылова–Боголюбова) счетномерную задачу Коши вида

$$\dot{a}_n = \frac{\varepsilon}{\nu_n}F_n(a,b,\varphi)\cos\varphi_n, \quad \dot{b}_n = -\frac{\varepsilon}{\nu_n}F_n(a,b,\varphi)\sin\varphi_n, \quad n = 1,2,\ldots$$
$$F_n(a,b,\varphi) \equiv f_n(\theta,\dot{\theta}), \quad \varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots) \tag{2.3}$$
$$\theta_n = a_n\sin\varphi_n + b_n\cos\varphi_n, \quad \dot{\theta}_n = \nu_n(a_n\cos\varphi_n - b_n\sin\varphi_n)$$
$$\varphi_n = \nu_n t, \quad a_n(0,\varepsilon) = a_n^0 = g_n/\nu_n, \quad b_n(0,\varepsilon) = b_n^0 = h_n$$

Следует отметить, что функции F_n содержат в качестве аргументов выражения $\nu_m a_m$, $\nu_m b_m$ и, вообще говоря, не удовлетворяют условиям Липшица по a, b, поскольку $\nu_m \sim m \to \infty$. Правые части уравнений (2.3) будут весьма сложными почти периодическими функциями t со счетным базисом частот $\{\nu_n\}$ (1.4). Указанное поведение частот парциальных колебаний ν_n при $n \to \infty$ приводит к отмеченным в разд. 1 общеизвестным трудностям, связанным с проблемой "малых знаменателей", которые усугубляются неограниченной размерностью системы (2.3). Существование равномерного среднего по t этих функций и свойства гладкости средних как функций a, b представляют принципиальные трудности для анализа в общем случае гладкой нелинейной функции f от u, u', $\dot{u}$. Кроме того, уравнения для всех компонентов a_n, b_n будут связанными, что делает нереальным по существу их анализ. Приведенные осложнения затрудняют применение формальной схемы метода усреднения, приема "укорочения" счетномерной системы и ряда других результатов [4].

3. Построение одночастотного приближения. Далее в соответствии с методом одночастотного (одномодового) приближения Крылова–Боголюбова–Митропольского предполагаются выполненными следующие конструктивно проверяемые неформальные условия [4–7, 10].

1°. Начальные распределения смещений $h(x)$ и скоростей $g(x)$ (1.3) удовлетворяют необходимому условию одночастотных колебаний

$$h_1^2 + g_1^2 > 0, \quad h_n^2 + g_n^2 = 0, \quad n = 2,3,\ldots \tag{3.1}$$

Это означает, что $a_n^0 = b_n^0 = 0$, $n \geqslant 2$, т.е. начальное распределение пропорционально первой форме колебаний невозмущенной системы (1.1). На относительно коротком интервале времени $t \sim 1$ движение системы (1.1)–(1.3), (3.1) будет близким к $X_1(x)\theta_1(t)$, поскольку $a_1 = a_1^0 + O(\varepsilon)$, $b_1 = b_1^0 + O(\varepsilon)$, a_n, $b_n = O_n(\varepsilon)$ (см. (1.4), (2.3)). На асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-1}$ указанное состояние движения нарушится и в общем случае произойдет существенное изменение всех оскулирующих переменных a_n, b_n, $n \geqslant 1$. Колебания станут многочастотными, что вновь приведет к отмеченным выше принципиальным трудностям при их асимптотическом анализе и приближенном вычислении.

2°. Сузим класс возмущающих функций системы (1.1) и рассмотрим случай, когда функция f может быть аппроксимирована полиномом конечной степени M от переменных u, u', $\dot u$ в некоторой рассматриваемой области D их изменения

$$f(x,u,u',\dot u)=\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{K} f_{ijk}(x)u^i(u')^j\dot u^k,\quad I+J+K=M \tag{3.2}$$

Из представления (3.2) следует, что после подстановки функции $u_{(1)}(x, a_1, b_1, \varphi_1)$ и ее производных в f получающаяся функция $f_{(1)}$ будет тригонометрическим полиномом, содержащим частоты $m\nu_1$ ($m = 0, 1, ..., M$):

$$f_{(1)}(x,a_1,b_1,\varphi_1)\equiv f(x,u_{(1)},u'_{(1)},\dot u_{(1)}),\quad \varphi_1=\nu_1 t \tag{3.3}$$

$$u_{(1)}=X_1(x)(a_1\sin\varphi_1+b_1\cos\varphi_1),\quad u'_{(1)}=\partial u_{(1)}/\partial x,\quad \dot u_{(1)}=\partial u_{(1)}/\partial t$$

Аналитические свойства функции $f_{(1)}$ (3.3) и ее среднего устанавливаются элементарно.

3°. Введем теперь "частотное" условие, налагаемое на величины ν_n, т.е. на коэффициенты $\alpha_{0,1}$, $\beta_{0,1}$, определяющие собственные частоты невозмущенной системы согласно (1.4). Предположим, что

$$|m\nu_1-\nu_n|\geqslant\gamma>0,\quad m=0,1,\dots,M,\quad n=2,3,\dots \tag{3.4}$$

Тогда, полагая $\theta_n = \dot\theta_n \equiv 0$ для $n \geqslant 2$ в $f_1, f_2, ..., f_n, ...$, (2.2), получим выражения F_n, зависящие от a_1, b_1 и периодически по t с частотным базисом $\{m\nu_1\}$, $m = 0, 1, ..., M$. В результате правые части системы допускают при $a_n = b_n = 0$, $n \geqslant 2$ равномерное усреднение по t, причем согласно (3.4) имеем

$$a_1^\bullet=\nu_1^{-1}F_1^c(a_1,b_1),\quad b_1^\bullet=-\nu_1^{-1}F_1^s(a_1,b_1),\quad a_n^\bullet=b_n^\bullet=0,\quad n\geqslant 2$$

$$a_1(0)=a_1^0,\quad b_1(0)=b_1^0,\quad a_n(0)=b_n(0)=0 \tag{3.5}$$

$$F_1^{c,s}(a_1,b_1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_{(1)}(a_1,b_1,\varphi_1)\begin{Vmatrix}\cos\varphi_1\\ \sin\varphi_1\end{Vmatrix}d\varphi_1,\quad F_n^{c,s}\equiv 0$$

В (3.5) и далее точкой справа обозначена производная по медленному времени $\tau = \varepsilon t$; выражения $F_{(n)}$ означают, что в функции F_n (2.3) подставлены величины $a_n = b_n = 0$, $n \geqslant 2$. Будем предполагать известным решение $\overset{*}{a}_1(\tau)$, $\overset{*}{b}_1(\tau)$ усредненной системы первого приближения (3.5) и соответствующее ему одночастотное приближение искомого решения $u_{(1)}$ согласно (2.1), (2.3), (3.1)

$$a_1=a_1^*(\tau,a_1^0,b_1^0),\quad b_1=b_1^*(\tau,a_1^0,b_1^0),\quad a_n=b_n\equiv 0,\quad n\geqslant 2 \tag{3.6}$$

$$u_{(1)}^*(x,\tau,\varphi_1)=X_1(x)(a_1^*(\tau)\sin\varphi_1+b_1^*(\tau)\cos\varphi_1),\quad 0\leqslant t\leqslant L\varepsilon^{-1},\quad L=\mathrm{const}$$

4°. Считаем, что значения функции $\overset{*}{u}_{(1)}$ (3.6) и ее производных $\overset{*}{u}{}'_{(1)}$, $\overset{*}{\dot u}_{(1)}$, см. (3.3), принадлежат области $D_{(1)}\subset D$ вместе с малой окрестностью; кроме того, существует постоянная Липшица $\lambda(D)$ такая, что

$$|f(x,u_{(1)},u'_{(1)},\dot u_{(1)})-f(x,u,u',\dot u)|\leqslant\lambda(|u_{(1)}-u|+|u'_{(1)}-u'|+|\dot u_{(1)}-\dot u|), \tag{3.7}$$

$$(u,u',\dot u)\in D,\quad (u_{(1)},u'_{(1)},\dot u_{(1)})\in D$$

5°. Предположим, что функция $f_{(1)}(x, a_1, b_1, \varphi_1)$ (3.3) относительно переменной x принадлежит достаточно высокому классу гладкости k по Стеклову [3]. Это условие соответствует отсутствию возмущений краевых условий (1.2) и быстрому убыванию $f_n \to 0$, $n \to \infty$.

Действительно, пусть при $x = 0, 1$ имеют место тождества относительно φ_1: $f_{(1)} = \partial f_{(1)}/\partial x = \ldots = \partial^{k-1} f_{(1)}/\partial x^{k-1} \equiv 0$, а производная $\partial^k f_{(1)}/\partial x^k$ – кусочно-гладкая. Тогда для $f_n(\varphi_1)$ интегрированием по частям получим оценку $f_n = O(\nu_n^{-k})$, т.е. $f_n \sim n^{-k}$ равномерно по φ_1.

4. Оценка точности одночастотного приближения. Для обоснования метода одночастотного приближения применительно к задаче (1.1)–(1.3), удовлетворяющей перечисленным в разд. 3 условиям, рассмотрим разности

$$\delta u = u - \overset{*}{u}_{(1)}, \quad \delta u' = u' - \overset{*}{u}{}'_{(1)}, \quad \delta \dot{u} = \dot{u} - \dot{\overset{*}{u}}_{(1)} \tag{4.1}$$

Здесь $\overset{*}{u}_{(1)}$ – известное согласно (3.6) решение первого приближения. Функция $u = u(x, t, \varepsilon)$ – неизвестное решение исходной начально-краевой задачи, которую можно представить в виде интегрального уравнения с помощью функции Грина G невозмущенной задачи

$$u = u^0(x,t) + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 G(x,y,t-s) f(y,u,u',\dot{u})\,dy\,ds$$

$$u^0(x,t) = X_1(x)(a_1^0 \sin\varphi_1 + b_1^0 \cos\varphi_1), \quad \varphi_1 = \nu_1 t \tag{4.2}$$

$$G(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) X_n(y) \frac{\sin \nu_n t}{\nu_n}$$

Посредством тождественных преобразований приведем разности (4.1) с учетом (4.2) к форме, удобной для применения леммы Гронуолла

$$\delta u = \Delta u_{(1)}(x,t,\tau,\varepsilon) + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 G(x,y,t-s) \Delta f_{(1)}\,dy\,ds$$

$$\Delta u_{(1)} \equiv u^0(x,t) + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 G(x,y,t-s) f(y,\overset{*}{u}_{(1)},\overset{*}{u}{}'_{(1)},\dot{\overset{*}{u}}_{(1)})\,dy\,ds - \overset{*}{u}_{(1)}(x,\tau,\varphi_1) \tag{4.3}$$

$$\Delta f_{(1)} = f(y,u,u',\dot{u}) - f(y,\overset{*}{u}_{(1)}(y,\sigma,\psi_1),\overset{*}{u}{}'_{(1)}(y,\sigma,\psi_1),\dot{\overset{*}{u}}_{(1)}(y,\sigma,\psi_1))$$

$$\delta u' = \partial \delta u / \partial x, \quad \delta \dot{u} = \partial \delta u / \partial t, \quad \sigma = \varepsilon s, \quad \psi_1 = \nu_1 s$$

Для известной функции $\Delta u_{(1)}$ и ее производных по x, t в силу условия 5° разд. 3 имеет место оценка по среднеквадратической норме $L_2(x)$:

$$\|\Delta u_{(1)}\| + \|\Delta u'_{(1)}\| + \|\Delta \dot{u}_{(1)}\| \leqslant \varepsilon U, \quad 0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1} \tag{4.4}$$

Пусть $w = w(x, t)$ – производная функция из $L_2(x)$ ($0 \leqslant x \leqslant 1$, t – параметр); тогда для нее из вида функции Грина G (4.2) следуют оценки

$$\left\| \int_0^1 G(x,y,t-s) w(y,s)\,dy \right\|_{L_2} \leqslant A \|w\|_{L_2}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 G(x,y,t-s) w(y,s)\,dy \right\|_{L_2} \leqslant B \|w\|_{L_2} \tag{4.5}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 G(x,y,t-s) w(y,s)\,dy \right\|_{L_2} \leqslant C \|w\|_{L_2}$$

Оценим погрешности δu, $\delta u'$, $\delta \dot{u}$ по норме в $L_2(x)$ с помощью леммы Гронуолла. Учитывая свойство (3.7) и оценки (4.4), (4.5), получим

$$\|\delta u\|_{L_2} + \|\delta u'\|_{L_2} + \|\delta \dot{u}\|_{L_2} \leqslant \varepsilon U e^{\varepsilon N t}, \quad U = \text{const} \tag{4.6}$$

$$N = \lambda(A + B + C), \quad 0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}, \quad L = \text{const}$$

Из (4.6) следуют оценки порядка ε для δu и ее производных на асимптотически большом интервале времени

$$\|\delta u\|_{L_2} \leqslant \varepsilon U e^{\varepsilon N T}, \quad \|\delta u\|_C = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\delta u| \leqslant \varepsilon U e^{\varepsilon N T} \tag{4.7}$$

$$\|\delta u'\|_{L_2} \leqslant \varepsilon U e^{\varepsilon N T}, \quad \|\delta \dot{u}\|_{L_2} \leqslant \varepsilon U e^{\varepsilon N T}, \quad 0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$$

Таким образом, согласно (4.7) для δu имеет место также более сильная равномерная оценка по x.

5. Возможные обобщения одночастотного подхода. Аналогичные вышеизложенным результаты могут быть получены для возмущающих воздействий более общего вида и при более общих предположениях относительно порождающего и искомого решений.

1°. Функция f может быть представлена конечным тригонометрическим полиномом от t:

$$f = \sum_{p=1}^{P} [f_p^s(x, u, u', \dot{u}) \sin \Omega_p t + f_p^c(x, u, u', \dot{u}) \cos \Omega_p t], \quad \Omega_p \geqslant 0 \tag{5.1}$$

В (5.1) функции f_p^s, f_p^c должны иметь структуру полиномов типа (3.2) по аргументам u, u', $\dot{u}$. Предполагается также, что множество частот $\{\Omega_p\}$ внешних возмущений должно удовлетворять условию отделимости, аналогичному (3.4), а именно:

$$|m_p \nu_1 \pm \Omega_p - \nu_n| \geqslant \gamma > 0, \quad m_p = 0, 1, \dots, M_p, \quad p = 1, \dots, P \tag{5.2}$$

При этом, как следует из (5.2), между частотами $m_p \nu_1$ и Ω_p могут выполняться (с ошибкой $O(\varepsilon)$) или не выполняться условия резонансности, т.е. $|m_p \nu_1 - \Omega_p| = O(\varepsilon)$ или $|m_p \nu_1 - \Omega_p| \geqslant \eta > 0$, где $m_p = 1, \dots, M_p + 1$, $p = 1, \dots, P$.

2°. При усилении требований гладкости к возмущающей функции вида (5.1) структура ее коэффициентов может быть обобщена следующим образом [4]:

$$f_p^{s,c} = f_p^{s,c}(x, u, u', u'', \dot{u}, \dot{u}', \dot{u}'') \tag{5.3}$$

Коэффициенты $f_p^{s,c}$ – функции полиномиального типа (3.2) относительно аргументов u, u', u'', $\dot{u}$, $\dot{u}'$, $\dot{u}''$ степени M_p. Считаются выполненными условия "одночастотности" (5.2), а также предположения наличия или отсутствия внешнего резонанса. Отметим, что члены, содержащие u', u'' (например вида $u'^2 u''$ [10]), отвечают геометрической нелинейности, $\dot{u}''$ – внутренней диссипации, $\dot{u}$ – внешней, а члены, содержащие u, могут быть обусловлены внешней упругой средой. Обобщение структуры функции f (5.3) представляет значительный интерес в прикладном аспекте, см. разд. 7.

3°. Условие одночастотности может быть обобщено на случай, когда возбуждаются несколько низших мод колебаний, а последующие моды удовлетворяют условию отделимости частот типа (5.2). Ограничивающие условия на начальные распределения $h(x)$, $g(x)$ (1.3) имеют вид соотношений, обобщающих (3.1)

$$h_q^2 + g_q^2 > 0, \quad q = 1, \dots, Q, \quad h_n^2 + g_n^2 = O_n(\varepsilon^2), \quad n \geqslant Q + 1 \tag{5.4}$$

Система первого приближения имеет порядок $2Q$ и обобщает уравнения одночастотного приближения (3.5); задачу Коши с учетом (5.4) запишем в виде

$$\dot{a}_q = \nu_q^{-1} F_q^c(a_1, \dots, a_Q, \; b_1, \dots, b_Q), \quad \dot{b}_q = -\nu_q^{-1} F_q^s(a_1, \dots, a_Q, \; b_1, \dots, b_Q) \tag{5.5}$$

$$a_q(0)=a_q^0=g_q\nu_q^{-1},\quad b_g(0)=b_q^0=h_q,\quad q=1,\dots,Q,\quad a_n=b_n\equiv 0,\quad n\geqslant Q+1$$

Усредненные функции $F_n^{c,s}$ (5.5) получаются в результате подстановки выражений θ_q, $\dot\theta_q$ (2.3) в $f_n(t,\theta,\dot\theta)$ при $a_n=b_n=0$ $(n\geqslant Q+1)$ и усреднения по явно входящему аргументу t. Предполагается, что равномерно относительно a_q, b_q функции $F_n\cos\varphi_n$, $F_n\sin\varphi_n$ $(n\geqslant Q+1)$ имеют нулевое среднее: $F_n^{c,s}\equiv 0$; отсюда в первом приближении следует $a_n=b_n=0$, см. (5.5). Соответствующее частотное условие, обобщающее (5.2), может быть представлено в виде

$$\left|\sum_{q=1}^{Q} m_{pq}\nu_q\pm\Omega_p-\nu_n\right|\geqslant\gamma>0,\quad q=1,\dots,Q,\quad n\geqslant Q+1$$
$$m_{pq}=0,\pm1,\dots,\pm M_p,\quad \sum_{q=1}^{Q}|m_{pq}|\leqslant M_p,\quad p=1,\dots,P \tag{5.6}$$

Аналогично п. 1° между частотами $m_{pq}\nu_q$ и Ω_p может выполняться или не выполняться резонансное соотношение. Решением Q-частотного приближения с погрешностью $O(\varepsilon)$ для $t\sim\varepsilon^{-1}$ в соответствии с представлением (2.1) и на основе построений разд. 4 будет функция

$$u_{(Q)}(x,t,\tau)=\sum_{q=1}^{Q}X_q(x)(a_q^*(\tau)\sin\varphi_q+b_q^*(\tau)\cos\varphi_q) \tag{5.7}$$

где $a_q^*(\tau)$, $b_q^*(\tau)$ $(q=1,\dots,Q)$ – решение задачи Коши (5.5).

4°. Изложенный выше подход к построению приближенного решения допускает также обобщение на случай системы с медленно изменяющимися параметрами [4]: $f=f(x,t,\tau,u,u',\dot u,\dots)$. Применение алгоритма построения приближенного решения и проверка условий существенно упрощаются для линейной по u, u', $\dot u$, ... функции f, см. разд. 6.1.

5°. Как и в случае уравнения вида (1.1), аналогично рассматривается задача Q-частотного приближения для более общего уравнения

$$\ddot u=u''-\varkappa^2u+\varepsilon f(x,t,\tau,u,u',\dot u,\dots) \tag{5.8}$$

в котором член $\varkappa^2u$ учитывает влияние внешней упругой среды. Наличие этого слагаемого в задаче (5.8), (1.2) несколько изменяет частоты ν_n собственных колебаний невозмущенной системы, однако их асимптотика при $n\to\infty$ остается прежней, см. разд. 1. Данное обстоятельство свидетельствует о том, что проблема внутреннего резонанса и "малых знаменателей" остается и требуются дополнительные существенные ограничения на структуру функции f и частоты ν_n, аналогичные условиям (3.2), (5.1), (5.6).

6°. С соответствующими требованиями к поведению спектра $\{\nu_n\}$ изложенная в разд. 2 методика может быть применена к приближенному конечночастотному анализу существенно неоднородной слабонелинейной системы, описываемой начально-краевой задачей вида

$$\rho(x)\ddot u=(p(x)u')'-r(x)u+\varepsilon f(x,t,\tau,u,u',\dot u,\dots)$$
$$\alpha_0p(0)u'(0,t)-\beta_0u(0,t)=-\varepsilon\Phi_0(t,\tau,u(0,t),u'(0,t),\dots)$$
$$\alpha_1p(1)u'(1,t)+\beta_1u(1,t)=\varepsilon\Phi_1(t,\tau,u(1,t),u'(1,t),\dots) \tag{5.9}$$
$$u(x,0)=h(x),\quad \dot u(x,0)=g(x),\quad 0<x<1$$
$$p(x)\geqslant p_0>0,\quad \rho(x)\geqslant\rho_0>0,\quad r(x)\geqslant 0$$

Здесь $\rho(x)$ – линейная плотность, $p(x)$ – погонная жесткость, $r(x)$ – коэффициент упругости внешней среды, $\Phi_{0,1}$ – некоторые функции полиномиальной структуры, аналогичные f. Для высокоточных расчетов собственных частот и форм колебаний невозмущенной системы (5.9) могут быть применены развитые эффективные численно-аналитические методы ускоренной сходимости [11, 12].

Следует отметить, что система уравнений типа (2.2) для обобщенных координат $\theta_n = \theta_n(t, \varepsilon)$ в этом случае учитывает малые нелинейные возмущения граничных условий

$$\ddot{\theta}_n + \nu_n^2\theta_n = \varepsilon f_n(t,\tau,\theta,\dot{\theta}) + \varepsilon\Psi_n(t,\tau,\theta,\dot{\theta})$$
$$\Psi_n = \frac{p(1)}{\beta_1} X_n'(1)\Phi_1^*(t,\tau,\theta,\dot{\theta}) - \frac{p(0)}{\beta_0} X_n'(0)\Phi_0^*(t,\tau,\theta,\dot{\theta}) \tag{5.10}$$

Функции $\Phi_{0,1}^*$ в (5.10) означают, что выражения для $u(x, t)$ $\dot{u}(x, t)$ (и их производных) при $x = 0, 1$ представляются в виде (2.1): $(X(\theta), \theta)$, $(X(1), \theta)$, $(X(0), \dot{\theta})$, $(X1), \dot{\theta})$ (и аналогично для производных u', u'', $\dot{u}'$, $\dot{u}''$). Отметим также, что при $\beta_0 = 0$ ($\alpha_0 = 1$) или (и) $\beta_1 = 0$ ($\alpha_1 = 1$) в выражениях Ψ_n (5.10) осуществляются преобразования $(p(0)/\beta_0)\, X_n'(0) = X_n(0)/\alpha_0$ или (и) $(p(1)/\beta_1)\, X_n'(1) = -X_n(1)/\alpha_1$, которые позволяют избавиться от особенностей.

Из выражения для Ψ_n (5.10) следует, что в общем случае нарушается условие 5° разд. 3, поскольку $\Psi_n \sim \nu_n \sim n$. Таким образом, для быстрой сходимости рядов Фурье требуется выполнение условия гладкости $\Phi_{0,1} \equiv 0$. Поэтому требование линейности и однородности граничных условий представляется существенным для обоснования сходимости рядов и малости погрешности решения и его производных.

7°. Наряду со случаем скалярной переменной u можно рассмотреть более общую ситуацию векторной функции $u = (u_1, u_2, ..., u_S)$, каждый из компонентов которой описывается начально-краевой задачей вида (5.9), (1.2), (5.5), а связь между компонентами осуществляется посредством возмущений f, $\Phi_{0,1}$ (например, при исследовании пространственных нелинейных колебаний струны [10], см. разд. 7).

6. Возмущения частного вида. Изложим методику конечномодового приближения в некоторых частных случаях, позволяющих провести построение приближенного решения до конца.

6.1. Линейное возмущение. Рассмотрим задачу (5.9) в предположении линейности функции f относительно неизвестной u и ее производных при $\Phi_{0,1} \equiv 0$. Имеем для f выражение

$$f = F(x,t,\tau) + A(x,\tau)u + B(x,\tau)u' + C(x,\tau)u'' +$$
$$+ E(x,\tau)\dot{u} + R(x,\tau)\dot{u}' + H(x,\tau)\dot{u}'' \tag{6.1}$$

Решение $u(x, t, \varepsilon)$ строим в виде ряда (2.1) согласно методике разд. 2. Пусть ν_n, $X_n(x)$ – известное решение невозмущенной краевой задачи на собственные значения и функции [11, 12]

$$(p(x)X')' + (\lambda\rho(x) - r(x))X = 0, \quad 0 < x < 1$$
$$\alpha_0 p(0)X'(0) - \beta_0 X(0) = 0, \quad \alpha_1 p(1)X'(1) + \beta_1 X(1) = 0 \tag{6.2}$$

причем $\{X_n(x)\}$ – ортонормированная с весом $\rho(x)$ система собственных функций. Тогда в соответствии с (2.2) находим выражения

$$f_n(t,\tau,\theta,\dot{\theta}) = F_n(t,\tau) + \sum_{m=1}^{\infty}(U_{nm}(\tau)\theta_m + V_{nm}(\tau)\dot{\theta}_m)$$

$$U_{nm}(\tau)=\int_0^1 X_n(x)(A(x,\tau)X_m(x)+B(x,\tau)X'_m(x)+C(x,\tau)X''_m(x))dx \tag{6.3}$$

$$V_{nm}(\tau)=\int_0^1 X_n(x)(E(x,\tau)X_m(x)+R(x,\tau)X'_m(x)+H(x,\tau)X''_m(x))dx$$

Подставим теперь согласно (2.3) выражения для θ_n, $\dot\theta_n$ в f_n (6.3); получим счетную систему уравнений в оскулирующих переменных a_n, b_n. Усредняя по явно входящему быстрому времени t, находим формальную счетную систему первого приближения в медленном времени τ:

$$\begin{aligned} \dot a_n &= \tfrac{1}{2}V_{nn}(\tau)a_n+\tfrac{1}{2}\nu_n^{-1}U_{nn}(\tau)b_n+\nu_n^{-1}F_n^c(\tau), \quad a_n(0)=a_n^0 \\ \dot b_n &= -\tfrac{1}{2}\nu_n^{-1}U_{nn}(\tau)a_n+\tfrac{1}{2}V_{nn}(\tau)b_n-\nu_n^{-1}F_n^s(\tau), \quad b_n(0)=b_n^0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$F_n^{c,s}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F_n(t,\tau)\begin{Vmatrix}\cos\nu_n t\\ \sin\nu_n t\end{Vmatrix}dt, \quad n=1,2,\ldots$$

Отметим, что уравнения (6.4) имеют определенную структуру и для различных n оказываются несвязанными. Коэффициенты $-\tfrac{1}{2}V_{nn}$ характеризуют парциальную диссипацию, а $\tfrac{1}{2}\nu_n^{-1}U_{nn}$ – дополнительную эффективную упругость. Задачи Коши допускают полное аналитическое решение в виде квадратур от известных функций

$$\begin{Vmatrix}a_n^*(\tau)\\ b_n^*(\tau)\end{Vmatrix}=\Pi(\chi_n(\tau))\begin{Vmatrix}a_n^0\\ b_n^0\end{Vmatrix}\exp\gamma_n(\tau)+\frac{1}{\nu_n}\int_0^\tau\Pi(\Delta\chi_n)\begin{Vmatrix}F_n^c(\sigma)\\ -F_n^s(\sigma)\end{Vmatrix}\exp\Delta\gamma_n(\tau,\sigma)d\sigma$$

$$\chi_n(\tau)=\frac{1}{2\nu_n}\int_0^\tau U_{nn}(\sigma)d\sigma, \quad \gamma_n(\tau)=\frac{1}{2}\int_0^\tau V_{nn}(\sigma)d\sigma, \quad \Pi^{-1}(\chi_n)=\Pi^T(\chi_n) \tag{6.5}$$

$$\Delta\chi_n(\tau,\sigma)=\chi_n(\tau)-\chi_n(\sigma), \quad \Delta\gamma_n(\tau,\sigma)=\gamma_n(\tau)-\gamma_n(\sigma)$$

Здесь $\Pi(\chi_n)$ – матрица поворота на угол χ_n размером 2×2. Формальное решение первого приближения $u_{(1)}(x,t,\tau)$ получается после подстановки медленных функций $a_n^*(\tau)$, $b_n^*(\tau)$ в выражении для θ_n, а затем в (2.1).

Потребуем, чтобы коэффициенты Фурье начальных распределений для смещений $h_n=\langle h,X_n\rangle_\rho=0$ и скоростей $g_n=\langle g,X_n\rangle_\rho=0$ и, кроме того, $F_n^{c,s}(\tau)\equiv 0$ при $n\geqslant Q+1$. Тогда при условии достаточно быстрого убывания коэффициентов $U_{nq}(\tau)$, $V_{nq}(\tau)$ при $n\to\infty$ для всех $q=1,2,\ldots,Q$, $|\tau|\leqslant L$ получим неформальное конечномодовое решение

$$u_{(Q)}(x,t,\tau)=\sum_{q=1}^{Q}X_q(x)(a_q^*(\tau)\sin\nu_q t+b_q^*(\tau)\cos\nu_q t) \tag{6.6}$$

Коэффициенты $U_{nq}(\tau)$, $V_{nq}(\tau)$ будут убывать со скоростью $\nu_n^k\sim n^{-k}$, если функции A, B,C,E,R,H по x обладают гладкими производными до $(k-1)$-го порядка включительно, обращающимися в нуль при $x=0$ и $x=1$, а k-я производная является кусочно-гладкой [3] (см. условие 5° разд. 3).

6.2. Квазиконсервативное возмущение. Предположим, что функция f не содержит явно времени и производных $\dot u,\dot u',\dot u''$, т.е. имеет вид полинома степени M относительно u,u',u''. Пусть также выполнены условия одночастотного приближения (3.1), (3.4). Тогда усредненные уравнения для a_1, b_1 согласно (3.5) имеют в медленном времени τ вид неавтономной системы

$$\dot{a}_1 = \nu_1^{-1} F_1^c(\tau, a_1, b_1), \quad \dot{b}_1 = -\nu_1^{-1} F_1^s(\tau, a_1, b_1), \quad a_n, b_n \equiv 0, \quad n \geqslant 2$$

$$F_1^{c,s}(\tau, a_1, b_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{(1)}(\tau, a_1 \sin\varphi_1 + b_1 \cos\varphi_1) \begin{Vmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \end{Vmatrix} d\varphi_1 \tag{6.7}$$

$$F_{(1)}(\tau, \theta_1) = \int_0^1 f(x, \tau, X_1(x)\theta_1, \; X_1'(x)\theta_1, \; X_1''(x)\theta_1) X_1(x) dx$$

Отметим следующее структурное свойство системы (6.7), позволяющее полностью проинтегрировать уравнения. Оно состоит в том, что, умножая первое уравнение на a_1, второе на b_1, и складывая их, получим $(a_1^2 + b_1^2)^{\cdot} = 0$, т.е. амплитуда первой моды $r_1 = (a_1^2 + b_1^2)^{1/2} = \mathrm{const}$ и определяется начальными значениями a_1^0, b_1^0. Представим искомые функции a_1, b_1 в виде $a_1 = r_1 \cos\psi_1$, $b_1 = r_1 \sin\psi_1$. Для неизвестной фазы ψ_1 после дифференцирования по τ и использования соотношений (6.7) получим выражение

$$\psi_1(\tau) = \psi_1^0 - \frac{1}{r_1 \nu_1} \int_0^\tau F_1^s(\sigma, r_1, 0) d\sigma, \quad \cos\psi_1^0 = \frac{a_1^0}{r_1}, \quad \sin\psi_1^0 = \frac{b_1^0}{r_1} \tag{6.8}$$

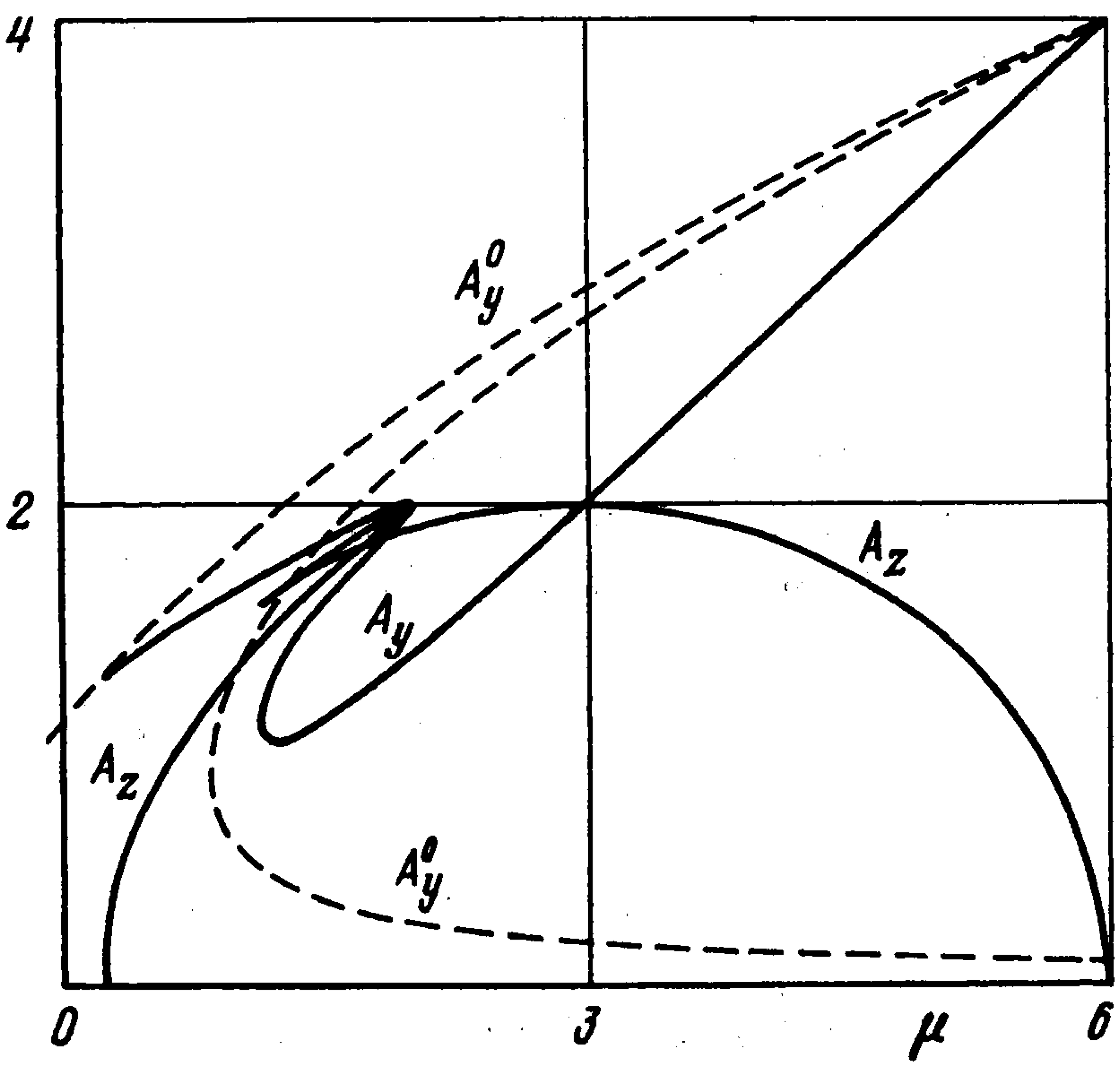
Таким образом, в первом одномодовом приближении амплитуда колебаний r_1 и энергия $\tfrac{1}{2}(\nu_1^2\theta_1^2 + \dot{\theta}_1^2) = \tfrac{1}{2}\nu_1^2 r_1^2$ сохраняются с погрешностью $O(\varepsilon)$ на промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Фаза колебаний определяется в соответствии с (6.8); в итоге получим $\theta_1 = r_1 \sin(\nu_1 t + \psi_1(\tau))$.

7. Пространственные колебания неоднородной струны. Рассмотрим пространственные нелинейные колебания неоднородной струны с закрепленными концами. Учтем растяжимость нити, а также силы линейной диссипации и распределенного воздействия со стороны внешней среды. Вывод уравнений и анализ вынужденных установившихся колебаний проведем по аналогии со случаем однородной струны [10, 13, 14]. Учитывая последующие члены разложения в выражении для потенциальной энергии упругих деформаций и растяжимость, получим начально-краевую задачу для двумерного вектора с граничными условиями первого рода

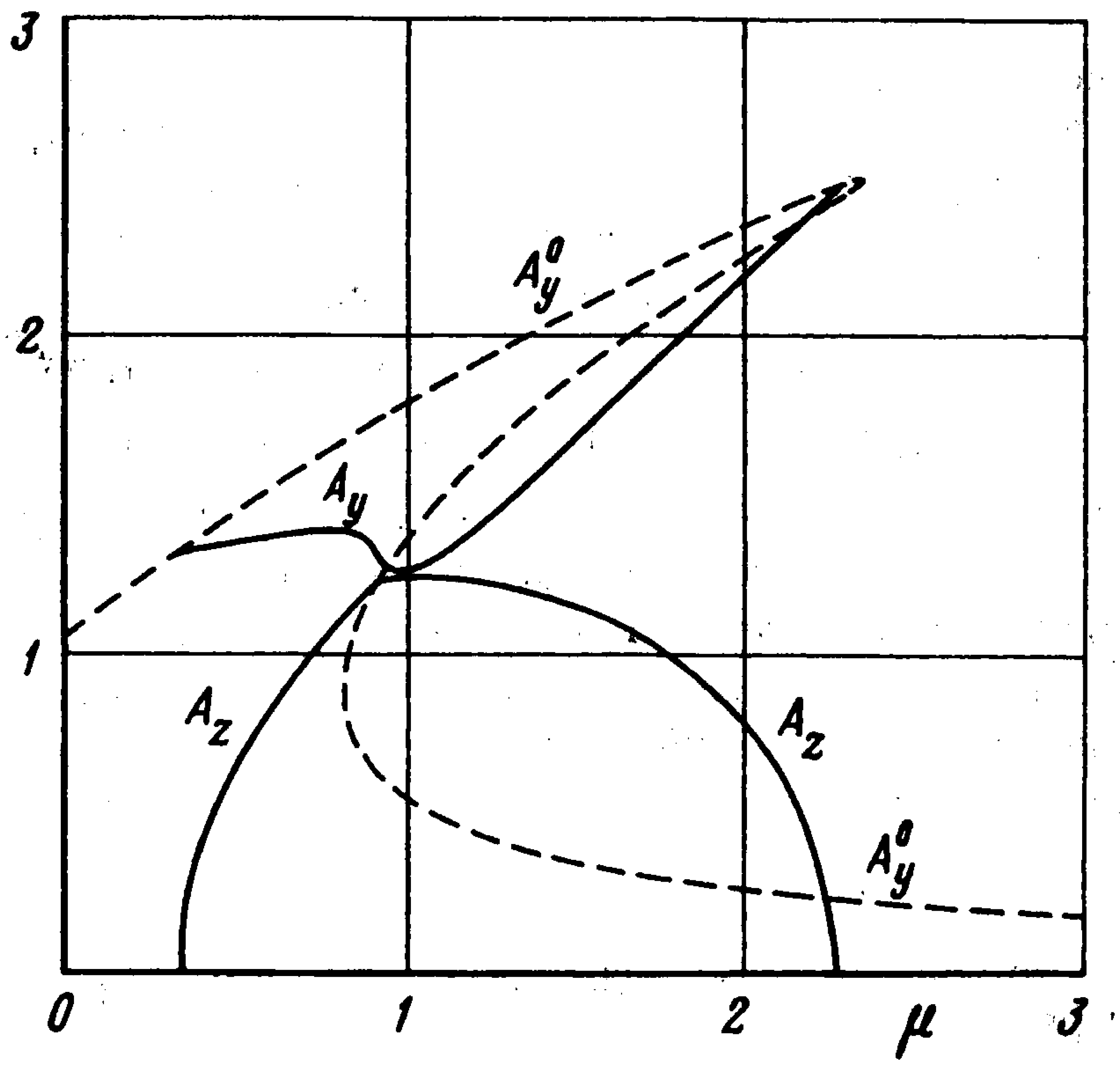
$$\begin{aligned} &\rho(x)\ddot{\mathbf{u}} = \mathrm{T}\mathbf{u}'' - \mathrm{K}(x)\dot{\mathbf{u}} + \tfrac{1}{8}(P(x)\partial\mathbf{u}'^4 / \partial\mathbf{u}')' + \mathbf{\Phi}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t \geqslant 0 \\ &\mathbf{u}(0,t) = \mathbf{u}(l,t) = 0, \quad \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{h}(x), \quad \dot{\mathbf{u}}(x,0) = \mathbf{g}(x) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь l – длина, $\rho(x) = dS(x)$ – линейная плотность струны, d – объемная плотность, $S(x)$ – площадь поперечного сечения, Т – сила натяжения нити; эти характеристики отвечают недеформированному состоянию. Далее $P(x) = ES(x) - \mathrm{T}$, E – модуль Юнга, Φ – распределенная периодическая по t внешняя сила, $\mathrm{K}(x)$ – погонный коэффициент внешнего линейного трения. Вектор $\mathbf{u}$ описывает смещения точек струны в плоскости yz, ортогональной ее недеформированному состоянию; концы струны жестко закреплены. Величина $\mathbf{u}'^4$ в (7.1) определяется обычным образом: $\mathbf{u}'^4 = (y'^2 + z'^2)^2$; производная по вектору $\mathbf{u}'$ понимается также в обычном смысле. Отметим, что линейная плотность должна зависеть от величины деформации $\mathbf{u}'$ из-за изменения длины струны. Однако вследствие сильного неравенства $ES \gg \mathrm{T}$, которое справедливо для реальных материалов (обычно $ES/\mathrm{T} \sim 10^2$–10^3), этим изменением можно пренебречь и, кроме того, величина Т может быть отброшена в выражении для $P(x)$.

Пусть S_0 – характерное значение $S(x)$, причем $S/S_0 \sim 1$ для всех $0 < x < l$; u_0 – максимальное смещение $\mathbf{u}(x, t)$, т.е. $|\mathbf{u}| \leqslant u_0$. Введем безразмерные переменные, взяв в качестве единицы длины величину l, а единицы времени – ν_*^{-1}, где $\nu_*^2 = \mathrm{T}(l^2 d S_0)^{-1}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Обозначим через K_0 максимальное значение $K(x)$, а через Φ_0 – максимум $|\Phi|$ по x, t и предположим относительную малость соответствующих возмущающих слагаемых: геометрической нелинейности, диссипации и внешнего воздействия [10, 13]. Тогда система (7.1) приводится к виду, допускающему применение асимптотического подхода. Представим для наглядности уравнения пространственных колебаний в координатной форме с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$:

$$r(x)\ddot{y} = y'' + (\varepsilon/2)[r(x)(y'^3 + y'z'^2)]' - \varepsilon\varkappa(x)\dot{y} + \varepsilon F_y(x,t)$$

$$r(x)\ddot{z} = z'' + (\varepsilon/2)[r(x)(y'^2z' + z'^3)]' - \varepsilon\varkappa(x)\dot{z} + \varepsilon F_z(x,t) \tag{7.2}$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad r(x) = S(x)/S_0, \quad (ES_0/\mathrm{T})(u_0/l)^2 = \varepsilon$$

$$\varepsilon\varkappa(x) \equiv \mathrm{K}(x)(\nu_* d S_0)^{-1}, \quad \varepsilon\mathbf{F}(x,t) \equiv \mathbf{\Phi}(x,t)l^2(\mathrm{T}u_0)^{-1}$$

Граничные условия при $x = 0, 1$ имеют вид (7.1), а начальные распределения h, g приведены к безразмерным переменным.

Предположим, что краевые задачи для уравнений (7.2) при $\varepsilon = 0$ допускают достаточно полное исследование, т.е. известно решение задачи Штурма – Лиувилля типа (6.2)

$$X'' + \lambda r(x)X = 0, \quad X(0) = X(1) = 0, \quad \{\lambda_n\}, \quad \{X_n(x)\}$$

Здесь λ_n – собственные значения, $X_n(x)$ – ортонормированные с весом $r(x)$ собственные функции. Это решение может быть эффективно построено с помощью метода ускоренной (квадратичной) сходимости [11, 12]. Согласно процедуре разд. 2 получим уравнения одномодового приближения (векторное уравнение типа Дуффинга)

$$\ddot{\mathbf{s}}_1 + \lambda_1\mathbf{s}_1 = -\varepsilon\gamma_1 s_1^2\mathbf{s}_1 - \varepsilon\sigma_1\dot{\mathbf{s}}_1 + \varepsilon\mathbf{f}_1(\Omega t) \quad (\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}^*\cos\Omega t), \quad \mathbf{u}_{(1)} = X_1\mathbf{s}_1$$
$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 X_1'^4(x)r(x)dx, \quad \sigma_1 = \int_0^1 X_1(x)\varkappa(x)dx, \quad \mathbf{f}_1(\Omega t) \equiv \int_0^1 X_1(x)\mathbf{F}(x,t)dx \qquad (7.3)$$

К квазилинейной колебательной системе (7.3) применимы методы малого параметра [4–6, 8]. Свободные ($\mathbf{f}_1 \equiv 0$) и вынужденные (в ε-окрестности главного резонанса $\Omega = \nu_1$) колебания без учета диссипации ($\sigma_1 = 0$) подробно изучены [10, 13]. Построены и проанализированы резонансные кривые для установившихся колебаний; исследована устойчивость по Ляпунову в весьма интересном случае, когда внешнее возбуждение действует только в одной из плоскостей, а колебания в другой плоскости имеют параметрический характер.

Для адекватной интерпретации результатов эксперимента [13] требуется учет диссипации, например с помощью модели (7.3) при $\sigma_1 > 0$. Соответствующие резонансные кривые путем масштабных преобразований сводятся к однопараметрическому семейству [14]. В качестве параметра семейства удобно взять σ_1, а параметры $\lambda_1 = \gamma_1 = f_y^* = 1, f_z^* = 0$. Типичные зависимости амплитуд плоских A_y^0 ($A_z^0 \equiv 0$) и пространственных A_y, A_z колебаний от параметра частотной расстройки $\mu = (\Omega - 1)\varepsilon^{-1} > 0$ для значений $\sigma_1 = 0{,}25$ и $\sigma_1 = 0{,}4$ приведены на фиг. 1, 2; они имеют весьма экзотический характер. Отметим, что $A_z > 0$ в некотором диапазоне изменения $\mu > 0$, зависящим от σ_1. Для достаточно больших значений $\sigma_1 > 3^{1/2}4^{-5/6} \simeq 0{,}546$ установившиеся колебания в плоскости xz невозможны [14]. Отметим, что учет внутреннего рассеяния типа $H(x)\dot{u}''$ (6.1) приводит к тем же результатам; тогда σ_1 – суммарный коэффициент линейной диссипации по первой моде.

Авторы благодарят Г.В. Костина за помощь в построении графиков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00221, 96-01-00265).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1, М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
3. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
4. *Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. Киев: Вища шк., 1976. 589 с.
5. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН СССР, 1937. 363 с.
6. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
7. *Нестеров С.В.* Обоснование метода Крылова–Боголюбова для систем с распределенными постоянными // Тр. Моск. Энергет. ин-та. Высш. математика. 1972. Вып. 146. С. 98–106.

8. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
9. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
10. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Анализ пространственных нелинейных колебаний струны // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 88–101.
11. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.
12. *Нестеров С.В., Акуленко Л.Д.* Эффективное решение задачи Штурма–Лиувилля // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 1. С. 44–46.
13. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Вынужденные нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 17–24.
14. *Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В.* Влияние диссипации на пространственные нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 19–28.

Москва

Поступила в редакцию
6.I.1998