

УДК 531.36

© 1998 г.

А.П. Иванов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ НЕСКОЛЬКО ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА

Исследуются такие периодические решения систем дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, которые пересекают две или более поверхности разрыва одновременно. Показано, что отображение Пуанкаре вдоль фазовых траекторий системы в окрестности неподвижной точки, соответствующей периодическому движению, в общем случае кусочно-дифференцируемо: эта окрестность распадается на несколько секторов, в которых матрицы Якоби различны. Для таких отображений теоремы об устойчивости по первому приближению [1] неприменимы, и требуется создание новых критериев устойчивости. Получен ряд необходимых, а также достаточных условий устойчивости. Данные результаты применяются к исследованию симметричных режимов движения виброударной системы с двумя ударными парами.

Ранее метод исследования устойчивости по первому приближению в разрывных системах применялся [2] для решений, пересекающих одну поверхность разрыва. При этом соответствующее отображение Пуанкаре оказалось дифференцируемым, что позволило использовать теоремы Ляпунова.

1. Постановка задачи. Одним из наиболее эффективных подходов к исследованию устойчивости периодических движений динамических систем является метод линеаризации. Он включает в себя следующие два этапа:

1) построение и решение уравнений в вариациях в окрестности исследуемого решения;

2) проверка условий устойчивости.

Пусть $x^*(t) - \tau$ – периодическое решение системы

$$\dot{x} = F(x, t), \quad x, F \in R^n \quad (1.1)$$

где правая часть 2π -периодична по t (при этом период решения τ кратен 2π).

В случае, если функция F непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности траектории $x^*(t)$, можно воспользоваться теорией Пуанкаре – Ляпунова. Фундаментальная матрица решений $Y(t_0, t)$ определяется из уравнения

$$\dot{Y}(t_0, t) = F_x(x^*(t), t)Y(t_0, t), \quad Y(t_0, t_0) = E_n \quad (1.2)$$

где F_x – матрица Якоби. Для устойчивости достаточно, чтобы все собственные значения определяющей матрицы $Y(t_0, t_0 + \tau)$ (т.е. мультипликаторы Флоке) лежали

строго внутри единичного круга на комплексной плоскости, и необходимо, чтобы они лежали внутри либо на границе этого круга [1].

Заметим, что данному периодическому движению можно сопоставить неподвижную точку отображения Пуанкаре $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ вдоль решений системы (1.1) для сечения $t = t_0 = (\text{mod } \tau)$. Это отображение дифференцируемо, а его матрица Якоби совпадает с определяющей матрицей $Y(t_0, t_0 + \tau)$.

К дополнительным техническим трудностям приводит рассмотрение системы (1.1) с разрывной правой частью. Был исследован [2] случай, когда вектор-функция $F(x, t)$ разрывна на гладкой поверхности $f(x, t) = 0$, причем F и F_x непрерывны с обеих сторон поверхности вплоть до самой поверхности. Относительно решения предполагалось, что оно пересекает без касания поверхность разрыва. Показано, что если начальный момент t_0 не совпадает с моментом пересечения поверхности разрыва, то отображение φ дифференцируемо, а его матрицу Якоби можно построить, «сшивая» решения системы (1.2) в моменты t' пересечения поверхности разрыва по формуле

$$Y(t_0, t' + 0) = BY(t_0, t' - 0) \quad (1.3)$$

где

$$B = E_n + ((F^-, \text{grad } f) + \partial f / \partial t)^{-1} (F^+ - F^-) (\text{grad } f)^T$$

Здесь верхний индекс T означает транспонирование, E_n – единичная матрица.

После вычисления определяющей матрицы вопрос об устойчивости решается точно так же, как в гладком случае.

Другой тип разрывов присущ системам с ударами: по достижении границы области непрерывного движения (заданной одной или несколькими неравенствами вида $f(x) \geq 0$) фазовая траектория терпит скачкообразный разрыв в соответствии с формулой

$$x^+ = x^- + I(x^-) \quad (1.4)$$

где индексы минус и плюс соответствуют началу и окончанию удара, I – ударный импульс.

Данный тип периодических движений можно исследовать по аналогии с предыдущим. Скачок фундаментальной матрицы решений при ударе описывается формулой (1.3), где

$$B = E_{2n} + I_x + (F^-, \text{grad } f)^{-1} (F^+ - F^- - I_x F^-) (\text{grad } f)^T \quad (1.5)$$

И в этом случае разрывный характер траекторий не приводит к потере дифференцируемости отображения Пуанкаре.

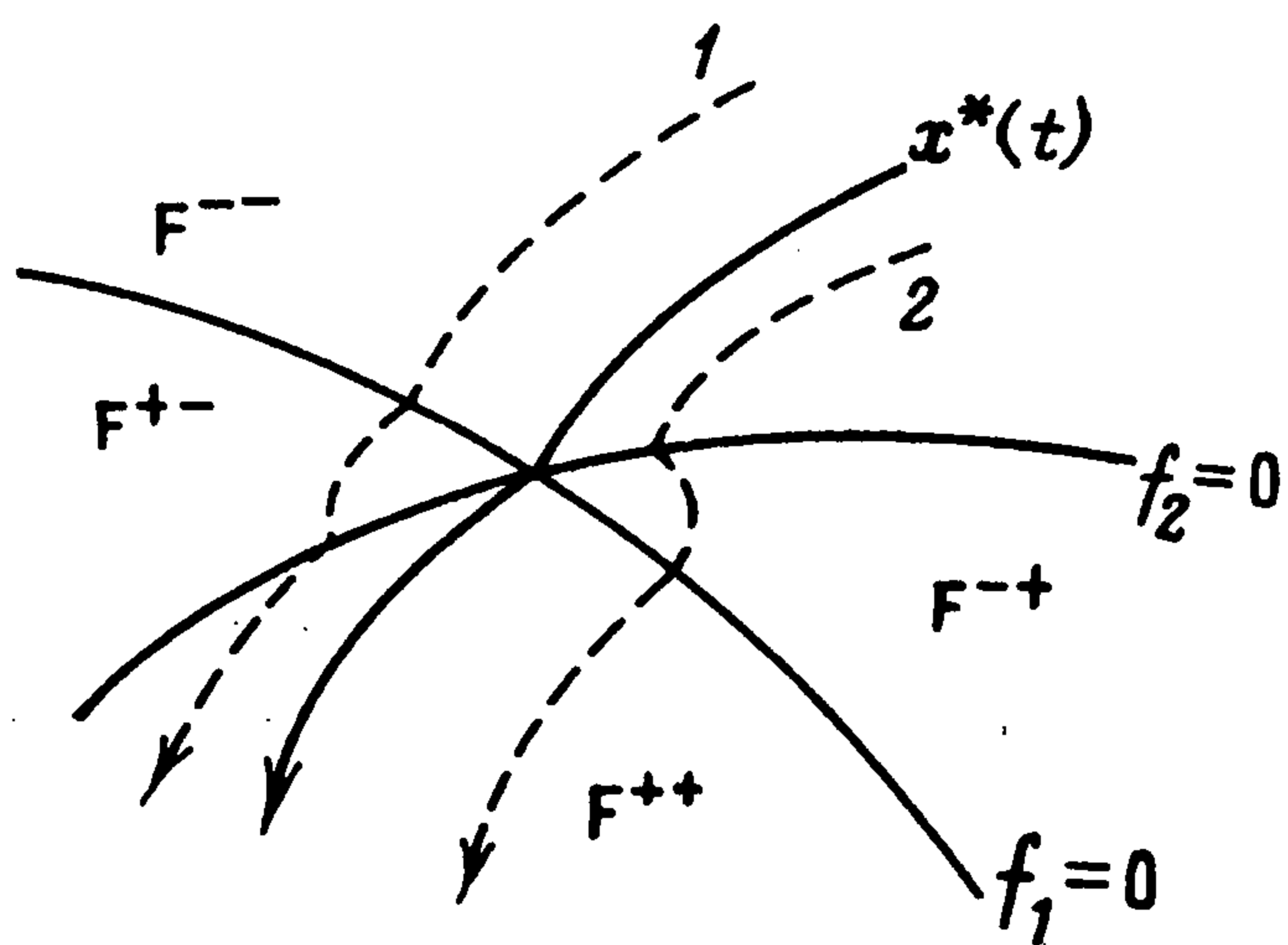
В данной работе обсуждается устойчивость периодических траекторий, пересекающих несколько поверхностей разрыва одновременно. К задачам такого рода может приводить исследование систем с переменной структурой [3, 4], а также механических систем с несколькими ударными парами, между которыми нет жестких связей [5].

2. Вариация решений, пересекающих несколько поверхностей разрыва. Допустим, что правая часть системы (1.1) терпит разрывы на поверхностях

$$f_j(x) = 0 \quad (j = 1, \dots, k) \quad (2.1)$$

Все поверхности (2.1) – гладкие (т.е. непрерывно дифференцируемые, без особых точек). Они делят фазовое пространство на несколько областей Ω_s , ($s = 1, \dots, r$, причем в точках пересечения двух или более поверхностей их нормальные векторы предполагаются линейно независимыми). Правая часть системы (1.1) непрерывно дифференцируема в каждой из замкнутых областей $\bar{\Omega}_s \times R$.

Рассмотрим решение $x^*(t)$, при $t = t'$ пересекающее сразу две поверхности $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$. Будем считать, что пересечения происходят без касания, т.е. векторы



Фиг. 1

$\dot{x}^*(t' \pm 0)$ трансверсальны обеим поверхностям. Обозначим $y(t) = x(t) - x^*(t)$ — вариацию решения и исследуем ее поведение вблизи точки разрыва. Окрестность этой точки делится поверхностями разрыва на четыре части, в каждой из которых функция F определена по-разному (фиг. 1). Будем обозначать соответствующие непрерывные компоненты F^{--} , F^{-+} , F^{+-} и F^{++} , где индексы минус и плюс обозначают те полупространства, в которых невозмущенная траектория находится соответственно до и после пересечения поверхностей разрыва.

Как известно, на участках непрерывности правой части системы (1.1) справедлива оценка

$$y(t) = Y(t_0, t)y(t_0) + O(\|y(t_0)\|^2) \quad (2.2)$$

где $Y(t_0, t)$ — решение системы (1.2). Данное соотношение позволяет определить моменты пересечения возмущенной траекторией поверхностей разрыва. Пусть $\bar{x}(t')$ — возмущенная траектория для уравнений движения с правой частью F^{--} , $t' + \Delta_j t$ — моменты пересечения этой траекторией поверхностей $f_j = 0$ ($j = 1, 2$).

Определим величины $\Delta_{1,2}t$ из формул

$$0 = f_j(\bar{x}(t' + \Delta_j t)) = (\text{grad } f_j, y(t')) + (\text{grad } f_j, \dot{x}^*)\Delta_j t + O(\Delta_j t)^2$$

Следовательно,

$$\Delta_j t = (\text{grad } f_j|_{x^*(t')}, y(t')) / V_j + O(\|y\|^2), \quad V_j = -(\text{grad } f_j, F^{--}(x^*(t'), t')) \quad (2.3)$$

В зависимости от начального возмущения $y(t_0)$ возможны неравенства $\Delta_1 t < \Delta_2 t$ или $\Delta_1 t > \Delta_2 t$. В первом из этих случаев возмущенная траектория сначала пересечет поверхность $f_1 = 0$, а затем — поверхность $f_2 = 0$. При обратном знаке неравенства последовательность пересечения поверхностей разрыва обратная (фиг. 1).

Для определения скачков фундаментальной матрицы решений воспользуемся формулой (1.3). При этом следует учитывать, что возмущенная траектория может пересекать поверхности разрыва одновременно или поочередно в том или ином порядке. В итоге получаем следующее утверждение.

Предложение 1. Для решения $x^*(t)$ системы (1.1), пересекающего при $t = t'$ без касания две поверхности (2.1) разрыва правой части, при $t > t'$ остается справедливой оценка (2.2), где фундаментальная матрица решений терпит разрыв в соответствии со следующими формулами:

$$B = \begin{cases} B_2(F^{+-}, F^{++})B_1(F^{--}, F^{+-}), & \Delta_2 t < \Delta_1 t \\ B_1(F^{-+}, F^{++})B_2(F^{--}, F^{-+}), & \Delta_2 t > \Delta_1 t \\ B_0 & \Delta_2 t = \Delta_1 t \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$B_j(u, v) = E_n + (u, \text{grad } f_j)^{-1}(v - u)(\text{grad } f_j)^T, \quad j = 1, 2$$

$$B_0 = B_1(F^{--}, F^{++})$$

Данное предложение можно обобщить на случай, когда траектория пересекает одновременно $k \geq 3$ поверхностей разрыва: при этом число вариантов в формуле (2.4)

возрастает. Последовательность, в которой возмущенная траектория пересекает поверхности разрыва (2.1), зависит от величин $\Delta_j t$ в формулах (2.3), где $j = 1, \dots, k$. Первой пересекается поверхность, для которой эта величина минимальна. Для того чтобы определить, какая поверхность будет пересечена второй, необходимо учесть изменение правых частей системы при пересечении одной из поверхностей разрыва. Подставляя это измененное выражение в формулы (2.3), рассчитаем значения $\Delta_j^{(1)} t$, где индекс j пробегает все значения от единицы до k , за исключением индекса первой из пересеченных поверхностей. Минимальное из чисел $\Delta_j^{(1)} t$ показывает индекс второй пересекаемой поверхности, и т.д.

Обобщение иного рода касается систем с односторонними связями. В таких системах траектории не пересекают поверхностей (2.1), но по достижении одной из таких поверхностей терпят разрыв в соответствии с формулой (1.4).

Заметим, что в общем случае при ударе о две или более связи ударный импульс $I(x^-)$ в формуле (2.3) задается разрывной функцией, что свидетельствует о неустойчивости движений с кратными ударами [5]. Поэтому содержательным является исследование важного частного случая ортогональных связей [6], для которого выполняется соотношение $I = I_1 + I_2$, где $I_{1,2}$ – импульсы при ударе о каждую из связей по отдельности. Условия ортогональности в системах с несколькими ударными парами выполнены, в частности, в отсутствие жестких связей между этими парами. При наличии жестких связей условия ортогональности выполнены лишь на множестве нулевой меры в пространстве конструктивных параметров.

Объединяя формулы (1.5) и (2.4), приходим к следующему утверждению.

Предложение 2. Для решения $x^*(t)$ системы (1.1), включающего при $t = t'$ удар о две поверхности (2.1), при $t > t'$ остается справедливой оценка (2.2), где фундаментальная матрица решений терпит разрыв в соответствии с формулами (2.4), где

$$B_j(u, v) = E_n + I_{jx} + (u, \text{grad } f_j)^{-1} (v - u - I_{jx} u) (\text{grad } f_j)^T, \quad j = 1, 2 \quad (2.5)$$

$$B_0 = E_n + I_x + (F^{--}, \text{grad } f_1)^{-1} (F^{++} - F^{--} - I_x F^{--}) (\text{grad } f_1)^T$$

3. Условия устойчивости по первому приближению. Пусть $\varphi: R^n \mapsto R^n$ – отображение, имеющую неподвижную точку в начале координат. Через эту точку проходят гладкие поверхности $\psi_1(x) = 0, \psi_2(x) = 0, \dots, \psi_s(x) = 0$, имеющие попарно различные нормали в начале координат и разбивающие окрестность начала на области G_1, G_2, \dots, G_r . Будем считать, что отображение φ непрерывно дифференцируемо в замыкании каждой из областей G_k , непрерывно (но не дифференцируемо) в начале координат, и выполняются соотношения

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{если } x \in G_1 \\ \dots \\ \varphi_r(x), & \text{если } x \in G_r \\ \varphi_{r+1}(x), & \text{если } \psi_1(x) = 0 \\ \dots \\ \varphi_{r+s}(x), & \text{если } \psi_s(x) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\varphi_k(x) = A_k x + O(x^2), \quad k = 1, \dots, r+s$$

В точках граничных поверхностей $\psi_j(x) = 0$ отображение φ может быть разрывным.

Систему первого приближения получим, заменяя поверхности разрыва $\psi_j(x) = 0$ их касательными плоскостями $(\text{grad } \psi_j(0), x) = 0$ и отбрасывая в формулах (3.1) члены $O(x^2)$:

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{\Phi}_1(\mathbf{x}), & \text{если } \mathbf{x} \in \bar{G}_1 \\ \dots \\ \bar{\Phi}_r(\mathbf{x}), & \text{если } \mathbf{x} \in \bar{G}_r \\ \bar{\Phi}_{r+1}(\mathbf{x}), & \text{если } (\text{grad } \psi_1(0), \mathbf{x}) = 0 \\ \dots \\ \bar{\Phi}_{r+s}(\mathbf{x}), & \text{если } (\text{grad } \psi_s(0), \mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\bar{\Phi}_k(\mathbf{x}) = A_k \mathbf{x}, \quad k = 1, \dots, r+s$$

В формулах (3.2) \bar{G}_k обозначает одну из областей, на которые окрестность начала координат делится плоскостями $(\mathbf{x}, \text{grad } \psi_k(0))$, A_k – квадратные матрицы порядка n . Таким образом, отображение $\bar{\Phi}_k$ линейно, а $\bar{\Phi}(\mathbf{x})$ – однородно (но не аддитивно).

Выясним, в каких случаях вывод об устойчивости системы (3.1) можно сделать на основе анализа матриц A_k . Заметим, что ошибкой было бы связывать напрямую этот вывод с расположением собственных значений этих матриц по отношению к единичной окружности.

Примеры. 1°. Рассмотрим кусочно-линейное отображение двумерной плоскости в себя вида

$$A(\mathbf{x}) = \begin{cases} A_+ \mathbf{x} & x_2 > 0 \\ A_- \mathbf{x} & x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$A_+ = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix}, \quad A_- = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}, \quad \alpha \in (-1, 0)$$

Собственные значения каждой из матриц A_+ , A_- по модулю меньше единицы, что свидетельствует об асимптотической устойчивости каждой из матриц по отдельности. В то же время произведение

$$A_+ A_- = \begin{vmatrix} \alpha^2 + 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

обладает собственным вектором $\Gamma^* = (1, \alpha - \alpha^3 + \dots)^T$ с собственным значением $\lambda^* = 1 + 2\alpha^2 - \alpha^4 + \dots > 1$. При этом вектор Γ^* лежит в полуплоскости $x_2 < 0$, а вектор $A\Gamma^*$ – в области $x_2 > 0$.

Таким образом, отображение A неустойчиво.

2°. Несколько сложнее построить пример неустойчивого непрерывного кусочно-линейного отображения, для которого каждая из компонент асимптотически устойчива. Положим в (3.3)

$$A_+ = \begin{vmatrix} 0 & -0,95 \\ 1 & -1,9 \end{vmatrix}, \quad A_- = \begin{vmatrix} 0 & -0,6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Для каждой из матриц A_+ , A_- выполнены условия асимптотической устойчивости (мультипликаторы лежат внутри единичной окружности). Кроме того, на линии «склейки» $x_2 = 0$ отображения при помощи этих матриц совпадают. В то же время отображение A^5 обладает собственным вектором $\Gamma^* = (1; 0)$:

$$A^5(\Gamma^*) = A_-^3 A_+^2(\Gamma^*) = 1,026\Gamma^*$$

Поскольку собственное значение больше единицы, отображение неустойчиво.

3°. Пример противоположного взаимодействия матриц можно получить, полагая в (3.3)

$$A_+ = \text{diag}\{-2; -0, 1\}, \quad A_- = \text{diag}\{-0, 1; -2\}$$

В данном случае, очевидно, каждая из матриц A^+ и A^- неустойчива. В то же время «составное» разрывное отображение A асимптотически устойчиво. В самом деле, под действием этого отображения знаки обеих координат любого вектора изменяются на про-

тивоположные. Следовательно, элементы последовательности I, AI, A^2I, A^3I, \dots поочередно лежат в полуплоскостях $x_2 > 0$ и $x_2 < 0$ (исключение составляет случай, когда начальный вектор лежит в плоскости $x_2 = 0$, при этом под действием степеней оператора A его вторая координата останется нулевой, а первая координата убывает в геометрической прогрессии со знаменателем $0,1$). Вывод об устойчивости следует из равенства

$$A_+ A_- = \text{diag}\{0, 2; 0, 2\}$$

Сформулируем некоторые условия, выполнение которых в системе (3.2) позволяет сделать вывод об устойчивости «полной» системы (3.1).

Предложение 3. Пусть норма всех матриц A_k в формулах (3.2) не превосходит некоторого числа $q \in (0, 1)$ (по отношению к некоторой норме $\|x\|$ в R^n). Тогда неподвижная точка отображения (3.1) асимптотически устойчива.

Действительно, в этом случае можно воспользоваться теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости для отображений [7], полагая функцию Ляпунова равной $\|x\|$.

Предложение 4. Пусть одно из отображений $\bar{\varphi}_{k^*}$ в формуле (3.2) обладает внутри своей области определения G_k собственным вектором I^* с собственным значением $\rho > 1$. Тогда неподвижная точка отображения (3.1) неустойчива.

Доказательство. Рассмотрим компоненту φ_{k^*} отображения (3.1). Как известно [1, 8], при наличии в системе дифференциальных уравнений v положительных характеристических чисел существует v -параметрическое семейство решений, асимптотических к особой точке при $t \rightarrow -\infty$. Аналогичное утверждение справедливо и для систем с дискретным временем. За счет подбора параметров можно построить решение линейной системы с матрицей A_{k^*} , лежащее на инвариантной прямой с направляющим вектором I^* . Решение полной системы, соответствующее этим параметрам, будет асимптотически приближаться к этой прямой быстрее, чем к началу координат. Следовательно, в некоторой окрестности начала оно лежит в области G_{k^*} , т.е. является решением системы (3.1). Очевидно, что существование асимптотической траектории свидетельствует о неустойчивости, так как в произвольную точку этой кривой можно попасть из сколь угодно малой окрестности начала.

Следствие. Вывод о неустойчивости остается в силе в случае, когда условиям предложения 4 удовлетворяет некоторая натуральная степень отображения $\bar{\varphi}$.

В самом деле, квадрат, куб и т.д. отображения (3.2) представляют собой отображение такого же типа (с другим разбиением на подобласти дифференцируемости \bar{G}_j).

Заметим, что наличие у одного из отображений $\bar{\varphi}_k$ отрицательных собственных значений, меньших минус единицы, или мнимых собственных значений вне единичной окружности не обязательно свидетельствует о неустойчивости (см. пример 3 в данном разделе).

Предложение 5. Допустим, что в некотором базисе в R^n отображение (3.2) имеет блочно-треугольную матрицу

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1q} \\ 0 & C_{22} & \dots & C_{2q} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & C_{qq} \end{vmatrix} x \quad (3.4)$$

где диагональные блоки представляют собой квадратные матрицы, элементы которых для всех компонент $\bar{\varphi}_k$ ($k = 1, \dots, r + s$) одинаковы (блоки, стоящие выше диагонали, могут быть различными).

Тогда вопрос об устойчивости неподвижной точки отображения (3.1) решается по первому приближению (3.4) так же, как и в регулярном случае (см. разд. 1).

Доказательство. Заметим, что коэффициенты характеристического уравнения для матрицы (3.4) не зависят от вида ее блоков, стоящих выше диагонали. Допустим сначала, что все эти блоки равны нулю и $\varphi^*(x)$ – линейное отображение с блочно-диагональной матрицей, полученной из матрицы (3.4) при $C_{ij} \equiv 0$ для всех $i < j$.

Отображение $\varphi^*(x)$ обладает функцией Ляпунова $V(x)$, представляющей собой квадратичную форму и удовлетворяющей уравнению [1, 7]

$$V(\varphi^*(x)) - V(x) = \lambda V(x) - \|x\|^2 \quad (3.5)$$

В случае, когда все собственные значения отображения $\varphi^*(x)$ по модулю меньше единицы, форма V положительно определена, а $\lambda = 0$, что свидетельствует об асимптотической устойчивости упрощенной системы. При наличии собственных значений вне единичной окружности $\lambda > 0$, а функция V может принимать отрицательные значения (неустойчивость).

Используем квадратичную форму V для построения функции Ляпунова для системы первого приближения (3.4). Для этого сделаем вспомогательную замену переменных $x \mapsto x_\epsilon$, такую, чтобы отображение (3.4) имело в новых переменных матрицу с теми же диагональными блоками, но с "уменьшенными" блоками, лежащими выше диагонали. Точнее, все элементы наддиагональных матриц должны быть сделаны по абсолютной величине меньше, чем ϵ при всех вариантах определения матрицы (3.4).

Для осуществления этой замены достаточно подобрать масштабирующие множители μ_k и положить $x_k = \mu_k x_{\epsilon k}$. Действительно, при умножении всех переменных, соответствующих второму диагональному блоку матрицы (3.4), на одну и ту же постоянную D все блоки во второй строке умножаются на D и одновременно все блоки во втором столбце разделяются на D . Следовательно, при такой операции матрица C_{22} остается неизменной, а C_{12} уменьшается в D раз. Затем путем масштабирования переменных, соответствующих третьему диагональному блоку, можно уменьшить блоки C_{13} и C_{23} и т.д.

Положим

$$V_\epsilon(x) = V(x_\epsilon) \quad (3.6)$$

Тогда вследствие (3.5), (3.6)

$$V_\epsilon(\varphi(x)) - V_\epsilon(x) = \lambda V_\epsilon(x) - \|x_\epsilon\|^2 (1 + O(\epsilon)) \quad (3.7)$$

Для достаточно малых значений ϵ и в достаточно малой окрестности начала координат квадратичная форма V_ϵ является функцией Ляпунова для системы (3.1), что и доказывает сформулированное утверждение.

4. Исследование системы с двумя ударными парами. Рассмотрим систему с двумя однотипными ударными парами, между которыми имеется взаимодействие:

$$\ddot{x}_1 = \Phi(x_1, \dot{x}_1, t) + G(x_1 - x_2, \dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad \ddot{x}_2 = \Phi(x_2, \dot{x}_2, t) - G(x_1 - x_2, \dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (4.1)$$

$$x_{1,2} \geq 0, \quad \Phi(x, \dot{x}, t + \tau) \equiv \Phi(x, \dot{x}, t), \quad G(0, 0) = 0$$

Удар в j -й паре ($j = 1, 2$) происходит при выполнении соотношений $x_j = 0$, $\dot{x}_j < 0$ и описывается равенством

$$\dot{x}_j^+ = -e\dot{x}_j^- \quad (4.2)$$

где $e \in (0, 1]$ – ньютоновский коэффициент восстановления.

Уравнениями вида (4.1) описывается, в частности, движение на вибрирующем двухступенчатом основании двух одинаковых шариков, соединенных пружинкой [9].

Если бы взаимодействие между двумя подсистемами отсутствовало, то в уравнениях (4.1) исчезли бы члены $\pm G$. В этом случае уравнения допускают такие

решения, для которых $x_1 \equiv x_2$. Если среди решений подсистемы имеются l_τ -периодические ($l \in N$), то они сохраняются и в полной системе, если $G(0, 0) = 0$.

Исследуем устойчивость движений с одним ударом за период:

$$x_1(t) = x_2(t) = x^*(t), \quad x^*(t + \tau) \equiv x^*(t), \quad x^*(t') = 0, \quad \dot{x}^*(t' - 0) = -V \quad (4.3)$$

причем величина $x^*(t)$ остается при $t \neq t' \pmod{\tau}$ строго положительной.

Перейдем в системе (4.1) к новым переменным по формулам

$$z_{1,2} = (x_1 \pm x_2)/2 \quad (4.4)$$

Физический смысл этих переменных таков: z_1 – среднее значение текущего зазора в ударных парах, z_2 – мера асимметрии двух подсистем в текущий момент времени.

Полагая $y_{1,2}(t) = z_{1,2}(t) - x^*(t)$, составим уравнения в вариациях для системы в переменных (4.4)

$$\ddot{y}_1 = \Phi_x(t)y_1 + \Phi_{\dot{x}}(t)\dot{y}_1, \quad \ddot{y}_2 = (\Phi_x(t) + 2G_x)y_2 + (\Phi_{\dot{x}}(t) + 2G_{\dot{x}})\dot{y}_2 \quad (4.5)$$

$$\Phi_x(t) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x^*(t), \dot{x}^*(t), t), \quad \Phi_{\dot{x}}(t) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \Phi(x^*(t), \dot{x}^*(t), t), \quad G_x = \frac{\partial}{\partial x} G(0, 0),$$

$$G_{\dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} G(0, 0)$$

В системе (4.5) переменные разделяются, поэтому ее решение сводится к интегрированию двух линейных систем второго порядка с периодическими коэффициентами. Полученная в результате матрица фундаментальных решений $Y(t_0, t)$ в переменных $y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2$ имеет блочно-диагональную форму, где диагональные блоки имеют второй порядок:

$$Y(t_0, t) = \begin{Bmatrix} Y_1(t_0, t) & 0 \\ 0 & Y_2(t_0, t) \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Вычислим матрицы удара в формулах (2.4), (2.5). Заметим, что в исходных переменных

$$I_1 = -\frac{1+e}{2}(0, \dot{x}_1^-, 0, 0), \quad I_2 = -\frac{1+e}{2}(0, 0, 0, \dot{x}_2^-)$$

Поскольку при ударе об одну из связей начальные условия для удара о другую связь не изменяются, то ударные импульсы при кратном ударе независимы, и условие ортогональности выполнено. В переменных $z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2$ имеем

$$F^{--} = (-V, \Phi_-, 0, 0)^T, \quad F^{++} = (eV, \Phi_+, 0, 0)^T$$

$$F^{\pm\mp} = \left(-\frac{1-e}{2}V, \frac{1}{2}(\Phi_+ + \Phi_-), \pm \frac{1+e}{2}V, \pm \frac{1}{2}(\Phi_+ - \Phi_-) + G_{\pm} \right)^T \quad (4.7)$$

$$\Phi_- = \Phi(0, -V, t'), \quad \Phi_+ = \Phi(0, eV, t'), \quad G_{\pm} = G(0, \pm(1+e)V)$$

$$I_{1,2} = -\frac{1+e}{2}(0, \dot{z}_1^- \pm \dot{z}_2^-, 0, \dot{z}_2^- \pm \dot{z}_1^-)^T, \quad \text{grad } f_{1,2} = (1, 0, \pm 1, 0)^T$$

В результате расчетов B по формулам (2.4) получаем выражения, у которых первый, второй и четвертый столбцы для всех трех вариантов совпадают:

$$\text{col}_1 = (-e, -\xi, 0, 0), \quad \text{col}_2 = (0, -e, 0, 0), \quad \text{col}_4 = (0, 0, 0, -e) \quad (4.8)$$

Третий столбец матрицы \mathbf{B} зависит от очередности ударов и выглядит так:

$$\text{col}_3 = (0, -\eta_+ G_+, -\xi - \eta_- G_+, 0), \text{ для } \Delta_2 t < \Delta_1 \quad (4.9)$$

$$\text{col}_3 = (0, -\eta_+ G_-, -\xi + \eta_- G_-, 0), \text{ для } \Delta_2 t > \Delta_1 \quad (4.10)$$

$$\text{col}_3 = (-(1+e), -\xi, 1, 0), \text{ для } \Delta_2 t = \Delta_1 \quad (4.11)$$

Здесь $\xi = (\Phi_+ + e\Phi_-)/V$, $\eta^\pm = (1 \pm e)/V$.

Заметим, что очередность ударов о связи в рассматриваемой задаче определяется знаком величины y_2 в момент $t = t'$. При одновременном ударе $y_2 = 0$, и элементы третьего столбца матрицы \mathbf{B}_0 не влияют на значение $\mathbf{Y}(t_0, t' + 0)$. Если положить этот столбец равным полусумме столбцов (4.9) и (4.10), то результат не изменится. При этом вследствие (4.6) получим, что определяющая матрица удовлетворяет условиям предложения 5, если $G_- = -G_+$. Данное условие означает симметрию силы взаимодействия между элементами двух ударных пар. В случае, когда $G^\pm = 0$, отображение Пуанкаре ϕ дифференцируемо, в противном случае – кусочно-дифференцируемо.

Согласно предложению 5, условия устойчивости обсуждаемых симметричных периодических движений распадаются на две группы. Первая из них соответствует движению одной ударной пары при отсутствии связи с другой парой; при этом определяющая матрица составляется как произведение матрицы $\mathbf{Y}_1(t_0, t_0 + \tau)$ на минор второго порядка в левом верхнем углу матрицы удара. Вторая группа описывает влияние на устойчивость связи между парами, соответствующая ей определяющая матрица равна произведению $\mathbf{Y}_2(t_0, t_0 + \tau)$ на минор второго порядка в правом нижнем углу матрицы удара.

Одной из базовых моделей теории виброударных систем является частица на вибрирующем основании [10]. В этой системе

$$\Phi(x, \dot{x}, t) = -g - \ddot{h}(t)$$

где g – ускорение свободного падения, $h(t)$ – аппликата опорной поверхности в некоторой инерциальной системе координат. Условия существования движения с одним ударом за период $l\tau$ выглядят так:

$$V = \frac{gl\tau}{1+e}, \quad \dot{h}(t') = \frac{1-e}{2(1+e)} gl\tau \quad (4.12)$$

Поскольку $\Phi_x = \Phi_{\dot{x}} \equiv 0$, то несложно выписать решение системы (4.5): в формуле (4.6)

$$\mathbf{Y}_1(t', t' + l\tau) = \begin{vmatrix} 1 & l\tau \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2(t', t' + l\tau) = \begin{vmatrix} c_l + ks_l & s_l \\ -c^2 s_l & c_l - ks_l \end{vmatrix} \quad (4.13)$$

$$c_l = \exp(-kl\tau) \cos(\delta l\tau), \quad s_l = \delta^{-1} \exp(-kl\tau) \sin(\delta l\tau), \quad \delta = \sqrt{c^2 - k^2}$$

$$k = -G_x(0, 0), \quad c^2 = -G_x(0, 0)/2$$

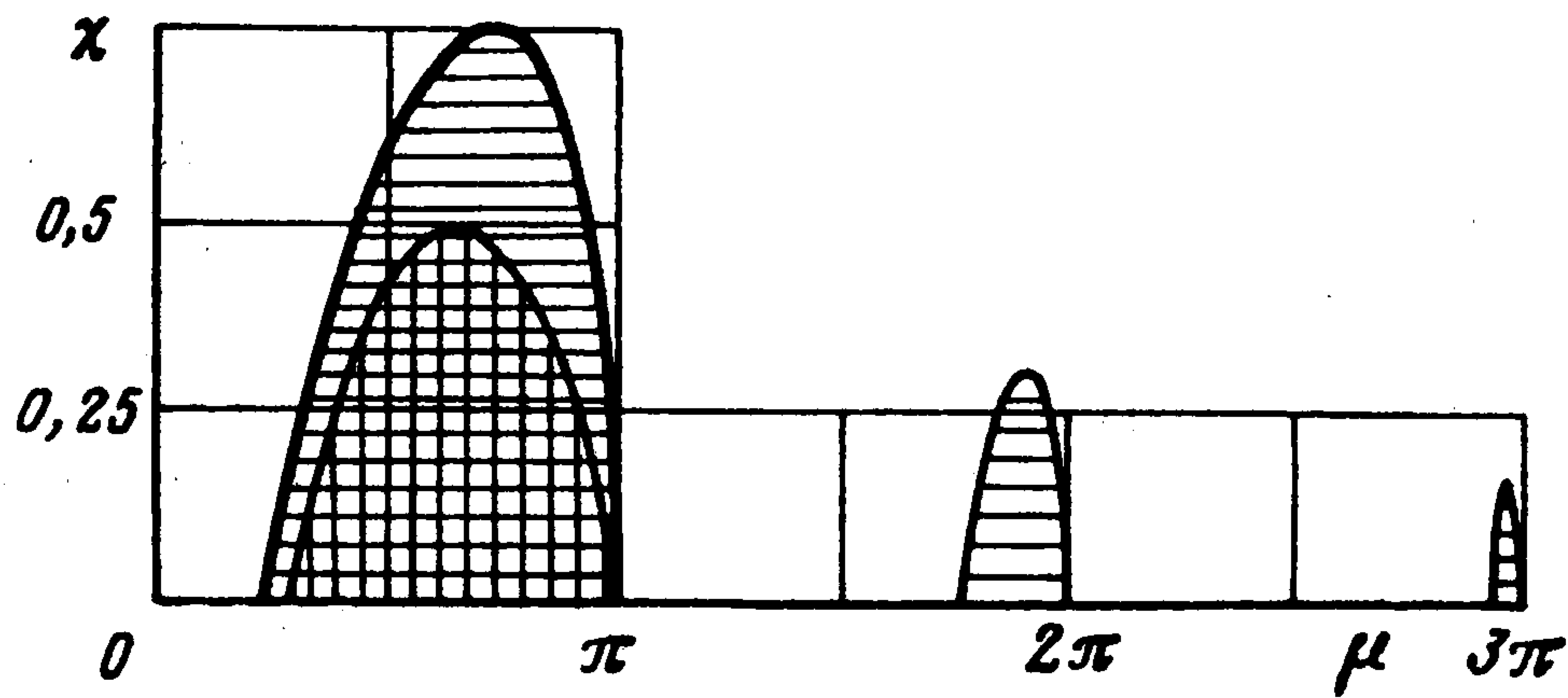
Первую группу условий устойчивости получаем в виде неравенств Шура для характеристического многочлена второго порядка:

$$|\text{Tr } \mathbf{C}_{11}| < 1 + \det \mathbf{C}_{11} < 2, \quad \mathbf{C}_{11} = \mathbf{B}_{11} \mathbf{Y}_1(t', t' + l\tau) \quad (4.14)$$

где \mathbf{B}_{11} – левый верхний минор второго порядка в матрицах (4.8).

При учете условий (4.12) неравенства (4.14) принимают вид

$$-\frac{2(1+e^2)}{(1+e)^2} g < \ddot{h}(t') < 0 \quad (4.15)$$



Фиг. 2

Вторая группа условий устойчивости имеет вид, аналогичный (4.14), но с заменой матрицы C_{11} на $C_{22} = B_{22}Y_2(t', t' + l\tau)$. Произведя необходимые расчеты, получим в итоге такое неравенство:

$$\left| \left(\frac{1+e}{l\tau} \left(1 + \frac{\ddot{h}(t')}{g} \right) - \frac{1-e}{V} G_+ \right) s_l - 2ec_l \right| < 1 + e^2 \exp(-2kl\tau) \quad (4.16)$$

Выполнение обоих условий (4.15), (4.16) гарантирует асимптотическую устойчивость рассматриваемого движения, при противоположном знаке хотя бы одного из этих неравенств имеет место неустойчивость.

В частности, пусть основание движется по гармоническому закону $h(t) = \varepsilon \sin \omega t$ ($\omega = 2\pi/\tau$), удары абсолютно упруги, а пружина линейна (в этом случае определитель матрицы C_{11} равен единице, и неравенства (4.15) необходимы для устойчивости, но недостаточны). Тогда из условия периодичности (4.12) следует, что существуют два типа периодических решений: для которых $\sin \omega t' = 1$ или $\sin \omega t' = -1$. Второе из этих решений не удовлетворяет неравенству (4.15), ввиду чего оно неустойчиво. Условия устойчивости для первого движения примут вид

$$\Gamma < 1, \quad \left| 2 \frac{\sin(\delta l\tau)}{\delta l\tau} (1 - \Gamma) - \cos(\delta l\tau) \right| < \text{ch}(kl\tau) \quad (4.17)$$

где $\Gamma = \varepsilon\omega^2/g$ – интенсивность возбуждения.

Область (4.17) представлена на фиг. 2 в плоскости параметров $\mu = \delta l\tau$, $\chi = kl\tau$ для значения $\Gamma = 0,05$. Зоны неустойчивости, отмеченные штриховкой, имеют вид "зубьев", основания которых лежат на оси абсцисс и примыкают справа к точкам $m\pi$, $m \in N$. Ширина и высота зубьев убывают с ростом их номера. Здесь подтверждается полученный в [9] вывод в том, что для идеальной пружины малой жесткости имеет место устойчивость, которая с ростом жесткости сменяется на неустойчивость.

При возрастании параметра Γ размеры зон неустойчивости уменьшаются.

При $e < 1$, как показывают расчеты, размеры области неустойчивости сокращаются. Так, при $e = 0,7$, $\ddot{h}(t')/g = -0,05$ сохраняется лишь один из "зубьев" (отмечен двойной штриховкой на фиг. 2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01440) и Международной ассоциации по содействию сотрудничества с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 96-2138).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
2. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 5. С. 658–669.
3. Теория систем с переменной структурой. / Под ред. *С.В. Емельянова*. М.: Наука, 1970. 592 с.
4. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
5. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
6. *Иванов А.П.* Об ударах в системах с несколькими неударяющими связями. // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 559–566.
7. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний. I. // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1958. No. 1. С. 41–66.
8. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 448 с.
9. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
10. *Кобринский А.Е., Кобринский А.А.* Виброударные системы. М.: Наука, 1973. 591 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.X.1997