УДК 531.36

© 1998 г. В.В. Козлов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОУСКОРЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ

Рассматриваются дифференциальные уравнения с квадратичными правыми частями и дополнительными постоянными слагаемыми. Важными примерами служат гироскоп с самовозбуждением и задача о движении твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, на которые действуют сила и момент, постоянные в сопутствующей системе отсчета. При некоторых простых условиях эти уравнения допускают решения линейно растущие со временем. В задачах динамики им отвечают равноускоренные движения механических систем. Исследуется устойчивость таких движений по первому приближению и с помощью связок интегралов. Результаты общего характера применяются к задаче об устойчивости равноускоренных винтовых движений твердого тела в жидкости.

1. Стационарные и равноускоренные движения. В динамике важную роль играют уравнения вида

$$x^{\bullet} = v(x), \quad x \in R^n \tag{1.1}$$

где компоненты поля v – квадратичные формы относительно переменных $x_1, ..., x_n$. Следовательно, $v(\lambda x) = \lambda^2 v(x)$ для всех вещественных λ.

Примером служат динамические уравнения Эйлера, описывающие вращение твердого тела по инерции. Более интересный пример представляют уравнения Кирхгофа

$$p^{\bullet} = p \times \frac{\partial H}{\partial m}, \quad m^{\bullet} = m \times \frac{\partial H}{\partial m} + p \times \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1.2}$$

задающие движение твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости. Здесь p – импульсивная сила, а m – импульсивный момент тела в жидкости. Гамильтониан H (кинетическая энергия системы тело плюс жидкость) есть положительно определенная квадратичная форма относительно компонент p, m:

$$2H = (Am, m) + 2(Bm, p) + (Cp, p)$$

Матрицы A и C симметричны и положительно определены.

Эти два примера являются важными частными случаями следующей более общей конструкции. Предположим, что конфигурационным пространством механической системы служит группа Ли G, а ее кинетическая энергия инвариантна относительно левых (или правых) сдвигов на G. Тогда, как установил Пуанкаре [1], уравнения Лагранжа имеют вид (1.1), где $x_1, ..., x_n$ представляют обобщенные скорости системы. Динамические уравнения Эйлера отвечают группе $SO(3)$, а уравнения Кирхгофа – группе движений трехмерного евклидова пространства $E(3)$. Четаев [2] представил уравнения Пуанкаре в виде уравнений Гамильтона. Для натуральных обратимых систем уравнения Пуанкаре – Четаева квадратичны по фазовым переменным.

Системы с квадратичными правыми частями встречаются в неголономной механике. Примером служит задача Суслова о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки с неголономной связью: проекция угловой скорости на некоторое фиксированное в теле направление равна нулю [3].

Точкам покоя $x = a =$ const уравнений (1.1) отвечают стационарные движения механической системы. Они находятся из алгебраических уравнений $v(a) = 0$. Ввиду однородности правых частей (1.1), система допускает целое семейство стационарных движений αa, $\alpha \in R$. Для волчка Эйлера – это перманентные вращения твердого тела вокруг главных осей инерции, а для задачи Кирхгофа – винтовые движения тела в жидкости (когда скорость некоторой выделенной точки и угловая скорость тела постоянны). Вращения вокруг большей и меньшей осей инерции устойчивы, а вокруг средней оси – неустойчивы. Задача об устойчивости винтовых движений твердого тела в жидкости решена Ляпуновым [4].

Усложним систему, добавив силу f, постоянную в сопутствующей системе отсчета; при этом уравнение (1.1) заменяется на следующее:

$$x^{\bullet} = v(x) + f \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) имеет частное решение

$$x(t) = at \tag{1.4}$$

если $f = a =$ const. Ему отвечает *равноускоренное* движение системы, поскольку скорости растут пропорционально времени. Так как исходная система (1.1) допускает целое семейство стационарных движений λa, λ – вещественный параметр, то равноускоренные движения заведомо существуют, если сила f коллинеарна стационарному импульсу a.

В задаче Эйлера равноускоренные вращения возможны лишь в случае, когда постоянный внешний момент направлен вдоль одной из главных осей инерции. В этом случае уравнения Эйлера остаются интегрируемыми. Детальный анализ квадратур выполнен Граммелем (см., например, [5]). Можно рассматривать более общий случай, когда момент внешних сил не зависит от ориентации тела. Такой волчок Граммель назвал гироскопом с самовозбуждением. В простом, но важном частном случае, компоненты момента – известные функции времени. Если такой момент направлен вдоль главной оси инерции, то среди его движений есть вращение вокруг этой оси, угловая скорость которого в общем случае уже не постоянна.

Последнее наблюдение допускает обобщение. Пусть $e = a/|a|$ и $f = \lambda(t)e$. Тогда уравнения (1.3) имеют частное решение

$$x(t) = \mu(t)e \tag{1.5}$$

где μ – первообразная функция λ.

2. Устойчивость по первому приближению. Пусть $x = a \neq 0$ – одно из стационарных решений системы (1.1). Для исследования его устойчивости положим $x = a + \xi$ и ограничимся рассмотрением линеаризованных уравнений по отклонению ξ (уравнения в вариациях):

$$\xi^{\bullet} = \Lambda\xi, \quad \Lambda = \frac{\partial v}{\partial x}(a) \tag{2.1}$$

Покажем, что $\Lambda a = 0$. Поскольку по предположению $a \neq 0$, то одно из собственных чисел матрицы Λ всегда равно нулю. Действительно, ввиду однородности, $v(\alpha a) \equiv 0$ для всех $\alpha \in R$. Дифференцируя это тождество по α и полагая затем $\alpha = 1$, получаем искомое равенство.

Итак, одно из собственных чисел Λ равно нулю. В устойчивом случае остальные собственные числа либо лежат в левой полуплоскости, либо чисто мнимые и без нетривиальных жордановых клеток: кратные корни должны иметь столько линейно независимых собственных векторов, какова их кратность. В линейном приближении компоненты вектора ξ – линейные комбинации с постоянными коэффициентами функций следующего вида:

$$t^k \exp \mu t, \quad \sin \lambda t, \quad \cos \lambda t \tag{2.2}$$

где $\mu < 0$, а k – целые неотрицательные числа.

Примеры уравнений Пуанкаре – Четаева, для которых ненулевые собственные числа матрицы Λ лежат в левой полуплоскости, можно найти в [6] (гл. I). В этих примерах группа G разрешимая, но не нильпотентная. Аналогичным свойством обладает неголономная система Суслова [7].

Запишем теперь уравнения в вариациях для равноускоренного движения (1.4), полагая $x = at + \eta$ и считая возмущение η малым:

$$\eta^{\cdot} = t\Lambda\eta \tag{2.3}$$

Здесь Λ – оператор из (2.1). Таким образом, уравнения (2.1) и (2.3) отличаются лишь множителем t. Линейная система (2.3) называется системой Фукса. Она легко решается: если $\xi(t)$ – решение (2.1), то $\eta(t) = \xi(t^2/2)$ – решение (2.2). Поэтому согласно (2.2) компоненты вектора η линейно выражаются через функции вида

$$t^{2k} \exp\left(\mu t^2/2\right), \quad \sin\left(\lambda t^2/2\right), \quad \cos\left(\lambda t^2/2\right)$$

Следовательно, тривиальные решения систем (2.1) и (2.3) устойчивы одновременно. Если собственные числа матрицы Λ чисто мнимые, кроме одного нулевого (тогда n нечетно), то решения (2.3) представляют суперпозицию колебаний, частота которых линейно растет со временем.

Покажем, что если матрица Λ имеет собственное значение в правой полуплоскости, то решение (1.4) неустойчиво. Действительно, в переменных $\eta = x - at$ уравнения (1.3) имеют вид

$$\eta^{\cdot} = t\Lambda\eta + v(\eta) \tag{2.4}$$

Переходя к новому времени $\tau = t^2/2$ и обозначая штрихом дифференцирование по τ, получим

$$\eta' = \Lambda\eta + v(\eta)/\sqrt{2\tau} \tag{2.5}$$

Эта система удовлетворяет условиям известной теоремы Ляпунова о неустойчивости [8].

В качестве иллюстративного примера рассмотрим гироскоп с самовозбуждением, когда момент сил направлен по средней оси эллипсоида инерции:

$$Ap^{\cdot} + (C - B)qr = 0, \quad Bq^{\cdot} + (A - C)pr = Ba, \quad Cr^{\cdot} + (B - A)pq = 0 \tag{2.6}$$

Здесь $A > B > C$ – главные моменты инерции, p, q, r – компоненты угловой скорости. Уравнения (2.6) допускают равноускоренное вращение $p = r = 0$, $q^{\cdot} = a = \text{const}$. Соответствующая (3×3)-матрица Λ имеет собственные числа

$$0, \ \pm\left[(A - B)(B - C)/AC\right]^{1/2} a$$

Среди них всегда есть положительное. Следовательно, такое движение неустойчиво.

Аналогично доказывается похожий результат о неустойчивости плоскопараллельного движения тела в жидкости узкой стороной вперед [9]. Общие результаты Ляпунова [4] о достаточных условиях неустойчивости винтовых движений твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости переносятся на случай равноускоренных движений.

3. Использование квадратичных интегралов. В ряде случаев уравнения (1.1) допускают квадратичные интегралы

$$\Phi(x) = (\Delta x, x)/2 \tag{3.1}$$

которые можно использовать для исследования устойчивости стационарных решений $x = a$. Существенную роль играет дополнительное предположение

$$\Delta a = 0 \tag{3.2}$$

Положим $x = a + \xi$, где ξ – смещение в направлении, трансверсальном лучу стационарных движений $x = \alpha a$, $\alpha \in R$ (например, ξ ортогонально a: $(a, \xi) = 0$). Тогда квадратичная форма $\Phi(x) = \Phi(\xi) = (\Delta\xi, \xi)/2$ также будет интегралом возмущенного движения. Если форма $\Phi(\xi)$ положительно (или отрицательно) определена, то стационарное движение $x = a$ заведомо устойчиво по отношению к смещению ξ.

Уравнения волчка Эйлера (2.4) (в которых надо положить $a = 0$) допускают квадратичный интеграл

$$(A - B)Bq^2 + (A - C)Cr^2 \tag{3.3}$$

который удовлетворяет условию (3.2) для перманентных вращений вокруг большей оси инерции: $a = (\alpha, 0, 0)$, $\alpha \neq 0$. Поскольку $A > B > C$, то (3.3) – положительно определенная квадратичная форма двух переменных q, r. Следовательно, такие движения устойчивы по отношению к переменным q, r. На самом деле стационарные вращения твердого тела вокруг большей и меньшей осей инерции устойчивы по отношению ко всем переменным (см., например, [10]).

Оказывается, если выполнено условие (3.2), то функция (3.1) будет интегралом уравнений (1.3) (в которых, конечно, $f = a$). Действительно,

$$\Phi^{\bullet} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ v + a\right) = (\Delta x, a) = (x, \Delta a) = 0$$

ввиду (3.2). Следовательно, квадратичная форма $\Phi(\eta) = (\Delta\eta, \eta)/2$ – интеграл уравнений возмущенного движения (2.4). Таким образом, многие известные результаты об устойчивости стационарных движений можно перенести на случай равноускоренных движений.

Например, равноускоренные движения волчка вокруг большей и меньшей осей инерции устойчивы (по отношению к смещениям в трансверсальных направлениях). Аналогично доказывается устойчивость ускоренного плоскопараллельного движения твердого тела в жидкости широкой стороной вперед (см. [9]).

Применим эти наблюдения к уравнениям Кирхгофа (1.2). Винтовые движения находятся как решения следующей алгебраической системы:

$$p \times \left(Am + B^T p\right) = 0, \quad m \times \left(Am + B^T p\right) + p \times (Bm + Cp) = 0$$

Отсюда вытекает существование постоянных α, β, таких, что

$$Am + B^T p = \alpha p, \quad Bm + Cp = \alpha m + \beta p \tag{3.4}$$

Как заметил еще Ляпунов [4], эти соотношения имеют вариационную природу. Действительно, уравнения Кирхгофа (1.2) кроме интеграла энергии H допускают еще два квадратичных интеграла $\Phi_1 = (m, p)$, $\Phi_2 = (p, p)/2$. Условия стационарности функции H при фиксированных значениях Φ_1 и Φ_2 имеют как раз вид (3.4). Это обстоятельство позволяет доказать существование нетривиальных решений системы (3.4). Оказывается, для каждого α найдутся три значения $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_3$, зависящие от α, для которых существуют три различных винтовых движения твердого тела со взаимно ортогональными винтовыми осями.

Рассмотрим связку квадратичных интегралов

$$\Phi = H - \alpha\Phi_1 - \beta\Phi_2 \tag{3.5}$$

которая определяется матрицей

$$\Delta = \begin{Vmatrix} A & B^T \\ B & C \end{Vmatrix} - \alpha\begin{Vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{Vmatrix} - \beta\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix}$$

Ввиду равенств (3.4) выполнено соотношение (3.2). Таким образом, квадратичная форма (3.5) – первый интеграл "возмущенных" уравнений Кирхгофа

$$p^{\bullet} = p \times \frac{\partial H}{\partial m} + P, \quad m^{\bullet} = m \times \frac{\partial H}{\partial m} + p \times \frac{\partial H}{\partial p} + M \tag{3.6}$$

где P, M – постоянные векторы (сила и момент), удовлетворяющие системе (3.4). Уравнения (3.6) допускают частные решения

$$p = Pt, \quad m = Mt \tag{3.7}$$

которые можно назвать равноускоренными винтовыми движениями.

Было показано [4], что если $\beta = \beta_1 < \beta_2$, то квадратичная форма (3.5) неотрицательна и обращается в нуль лишь на прямой $p = \lambda P$, $m = \lambda M$, $\lambda \in R$. Таким образом, она положительно определена на каждой пятимерной плоскости, трансверсально пересекающей эту прямую, и поэтому (3.7) – устойчивые решения системы (3.6).

4. Некоторые обобщения. Результаты разд. 2 и 3 можно распространить на решения возмущенных уравнений вида (1.5). Полагая $x = \mu(t)e + \eta$, для переменной η получаем уравнение

$$\eta^{\bullet} = \mu\Lambda\eta + v(\eta), \quad \Lambda = \frac{\partial v}{\partial x}(e) \tag{4.1}$$

Пусть матрица Λ имеет собственное число с положительной вещественной частью. Тогда тривиальное решение $\eta = 0$ системы (4.1) заведомо неустойчиво, если $\int \mu(t)dt \to \infty$ и функция $1/\mu(t)$ ограничена на некотором интервале $[t_0, +\infty)$.

Действительно, в этом интервале функция $\mu(t)$ сохраняет знак и поэтому можно ввести новое время τ по формуле

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \mu(u)du \tag{4.2}$$

причем $\tau \to \infty$, когда $t \to +\infty$. Обозначая штрихом дифференцирование по τ, систему (4.1) можно представить в виде

$$\eta' = \Lambda\eta + v(\eta)/\mu_* \tag{4.3}$$

где μ_* – это функция μ, в которой время t заменено на τ с помощью подстановки (4.2). Поскольку функция μ_*^{-1} ограничена по предположению, то равновесие $\eta = 0$ системы (4.3) (а следовательно, и (4.1)) неустойчиво по теореме Ляпунова [8].

Результаты разд. 3 применимы к решениям (1.5) без дополнительных ограничений на вид функции $\mu(t)$: если $\Delta e = 0$, то квадратичная форма (3.1) будет первым интегралом уравнений (1.3), где $f = \lambda(t)e$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00747) и программы "Университеты России".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique // C.r. Acad.sci. Paris. 1901. V. 132. P. 369–371.
2. *Četajev N.G.* Sur les équations de Poincaré // C.r. Acad.sci. Paris. 1927. V. 185. P. 1577–1578.
3. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
4. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собр. соч. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР. 1954. С. 276–319.
5. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 352 с.
6. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. гос. ун-та, 1995. 429 с.
7. *Козлов В.В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. № 3. С. 85–107.
8. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
9. *Рамоданов С.М.* К задаче о движении твердого тела в жидкости под действием следящей силы // Вестн. МГУ. 1. Математика, Механика. 1992. № 1. С. 64–72.
10. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.

Поступила в редакцию
13.XI.1997

Москва