УДК 539.3

© 1998 г. Г.Ю. Ермоленко, С.А. Юшков

СПОСОБ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Получена квадратура решения первой динамической задачи линейной теории упругости, когда деформируемое тело занимает конечный объем и ограничено кусочно-гладкой поверхностью. Материал тела предполагается однородным и изотропным. Доказывается, что полученная квадратура удовлетворяет системе уравнений, а также начальным и краевым условиям исходной задачи.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу динамической теории упругости

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x},t)+F_i(\mathbf{x},t)=\rho\ddot{U}_i(\mathbf{x},t)$$
$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)=\Gamma_{ijpq}\varepsilon_{pq}(\mathbf{x},t),\quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t)=\{U_{i,j}(\mathbf{x},t)+U_{j,i}(\mathbf{x},t)\}/2 \tag{1}$$
$$U_i(\mathbf{x},0)=U_{i0}(\mathbf{x}),\quad \dot{U}_i(\mathbf{x},0)=U_{i1}(\mathbf{x});\quad U_i(\mathbf{x}_S,t)=U_i^0(\mathbf{x}_S,t)$$

Здесь $\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t)$, Γ_{ijpq} – компоненты тензоров напряжений, деформаций и тензора упругих постоянных; $F_i(\mathbf{x},t)$, $U_i(\mathbf{x},t)$ – составляющие вектора массовой силы и вектора перемещений; $U_{i0}(\mathbf{x})$ $U_{i1}(\mathbf{x})$ – начальное распределение перемещений и скоростей перемещений в рассматриваемом теле, ограниченном поверхностью S; $U_i^0(\mathbf{x}_S,t)$ – граничное значение вектора перемещений; $\mathbf{x}$ и t – координаты точек пространства и текущее значение времени. В рассматриваемом случае

$$\Gamma_{ijpq}=\lambda\delta_{ij}\delta_{pq}+\mu(\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp})$$

где λ и μ – постоянные Ламе.

Для решения задачи применим преобразование Лапласа по времени и многократное преобразование Фурье по координатам. Преобразуя систему равенств (1) по Лапласу, получаем

$$\sigma^*_{ij,j}(\mathbf{x},p)+\Phi^*_i(\mathbf{x},p)=\rho p^2U^*_i(\mathbf{x},p)$$
$$\Phi^*_i(\mathbf{x},p)=F^*_i(\mathbf{x},p)+\rho p^2U_{i0}(\mathbf{x})+\rho U_{i1}(\mathbf{x})$$
$$\sigma^*_{ij}(\mathbf{x},p)=\Gamma_{ijpq}\varepsilon^*_{pq}(\mathbf{x},p),\quad \varepsilon^*_{ij}(\mathbf{x},p)=\{U^*_{i,j}(\mathbf{x},p)+U^*_{j,i}(\mathbf{x},p)\}/2 \tag{2}$$
$$U^*_i(\mathbf{x}_S,p)=U_i^{0*}(\mathbf{x}_S,p)$$

Звездочка означает образ Лапласа, p-параметр преобразования.

Решать краевую задачу (2) будем методом преобразования Фурье с использованием теории потенциала и фундаментального решения. Поместим рассматриваемое тело, занимающее объем V и ограниченное поверхностью S, в объем V_1 большего размера, так чтобы ограничивающая его поверхность S_1 не имела общих точек с поверхностью S. Совокупность точек, принадлежащих объему V_1 и не принадлежащих V, образует объем V_2, ограниченный поверхностями S и S_1. Поскольку для уравнения

$$\sigma^*_{ij,j}(\mathbf{x},p)=\rho p^2 U^*_i(\mathbf{x},p)$$

известно фундаментальное решение (матрица Купрадзе [1])

$$R_{kj}(\mathbf{x},p)=\sum_{l=1}^{2}\left(\delta_{kj}\alpha_l+\beta_l\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\right)\frac{e^{ik_l|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}$$

$$\alpha_l=\delta_{2l}(2\pi\mu)^{-1};\quad k_l^2=k_1^2=\rho p^2(\lambda+2\mu)^{-1}\quad \text{при } l=1$$

$$\beta_l=(-1)^l(2\pi\rho p^2)^{-1};\quad k_l^2=k_2^2=\rho p^2\mu^{-1}\quad \text{при } l=2$$

то частное решение первого уравнения (2) можно записать в форме

$$U^*_k(\mathbf{x},p)=\int_{V_1} R_{kj}(\mathbf{x}-\mathbf{y},p)\Phi^{1*}_j(\mathbf{y},p)d\mathbf{y} \tag{3}$$

Пусть функция $\Phi^{1*}_j(\mathbf{y},p)$ в объеме V совпадает с $\Phi^*_i(\mathbf{x},p)$. Получаем

$$U^*_k(\mathbf{x},p)=\int_{V} R_{kj}(\mathbf{x}-\mathbf{y},p)\Phi^{*}_j(\mathbf{y},p)d\mathbf{y}+\int_{V_2} R_{kj}(\mathbf{x}-\mathbf{y},p)\Phi^{2*}_j(\mathbf{y},p)d\mathbf{y} \tag{4}$$

Здесь $\Phi^{2*}_j(\mathbf{y},p)$ – образ Лапласа неизвестных массовых сил, распределенных в объеме V_2. Определим их таким образом, чтобы на поверхности S образ $U^*_k(\mathbf{x},p)$ удовлетворял краевым условиям задачи (2). Тогда выражение (3) будет в объеме V представлять собой искомое решение задачи (2). Для этого положим в (3) $\mathbf{x}$ принадлежащим поверхности S, умножим равенство (3) на выражение

$$(n_1(\mathbf{x}_S)+n_2(\mathbf{x}_S)+n_3(\mathbf{x}_S))e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_S}$$

и проинтегрируем по поверхности S. Получим

$$\int_S n(\mathbf{x}_S)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_S}U^{0*}_k(\mathbf{x}_S,p)ds=\int_S\int_V n(\mathbf{x}_S)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_S}R_{kj}(\mathbf{x}_S-\mathbf{y},p)\Phi^*_j(\mathbf{y},p)d\mathbf{y}ds+$$

$$+\int_S\int_{V_2} n(\mathbf{x}_S)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_S}R_{kj}(\mathbf{x}_S-\mathbf{y},p)\Phi^{2*}_j(\mathbf{y},p)d\mathbf{y}ds \tag{5}$$

$$n(\mathbf{x}_S)=n_1(\mathbf{x}_S)+n_2(\mathbf{x}_S)+n_3(\mathbf{x}_S)$$

Здесь $n_j(\mathbf{x}_S)$ – соответствующая координата нормали к поверхности S. Соотношение (5) представляет собой уравнение для поиска неизвестных массовых сил $\Phi^{2*}_j(\mathbf{y},p)$.

Используя теорему о свертке и теорему Остроградского – Гаусса, из (5) получаем

$$U^{0**}_k(\mathbf{k},p)=R^{1*}_{kj}(\mathbf{k},p)\Phi^{**}_j(\mathbf{k},p)+R^{2*}_{kj}(\mathbf{k},p)\Phi^{2**}_j(\mathbf{k},p) \tag{6}$$

Здесь

$$U^{0**}_k(\mathbf{k},p)=\int_S n(\mathbf{x}_S)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_S}U^{0*}_k(\mathbf{x}_S,p)ds$$

$$\Phi^{**}_j(\mathbf{k},p)=\int_V e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y}}\Phi^*_j(\mathbf{y},p)d\mathbf{y},\quad \Phi^{2**}_j(\mathbf{k},p)=\int_{V_2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_S}\Phi^{2*}_j(\mathbf{y},p)d\mathbf{y}$$

$$R^{r*}_{kj}(\mathbf{k},p)=\int_{V_z^r}\left[\sum_{n=1}^{3} -ik_n+\frac{\partial}{\partial x_n}R_{kj}(\mathbf{z},p)\right]e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}}d\mathbf{z},\quad r=1,2$$

В последнем равенстве области интегрирования V_{z^1} и V_{z^2} определяются объемами V, V_1, V_2 и равенством $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Соотношения (6) представляют собой систему трех уравнений для поиска трех неизвестных интегральных образов массовых сил $\Phi_j^{2**}(\mathbf{k}, p)$. Поскольку, как известно [1], задача (1) обладает единственным решением, то определитель системы (6) отличен от тождественного нуля и система (6) также имеет единственное решение.

Пусть $\mathrm{Res}_{jm}(\mathbf{k}, p)$ – матрица, обратная к $R_{kj}^{2*}(\mathbf{k}, p)$, т.е.

$$R_{kj}^{2*}(\mathbf{k}, p)\,\mathrm{Res}_{jm}(\mathbf{k}, p) = \delta_{km}$$

Тогда из (6) имеем равенство

$$\Phi_j^{2**}(\mathbf{k}, p) = \mathrm{Res}_{jm}(\mathbf{k}, p)U_m^{0**}(\mathbf{k}, p) - \mathrm{Res}_{jm}(\mathbf{k}, p)R_{me}^{1*}(\mathbf{k}, p)\Phi_e^{**}(\mathbf{k}, p)$$

позволяющее для $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ – решения исходной задачи (1), используя (3), получить формулу

$$U_l(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}\left\{\int\limits_V R_{ej}(\mathbf{x}-\mathbf{y})[F_j^*(\mathbf{y},p) + \rho p U_{j0}(\mathbf{y}) + \rho U_{j1}(\mathbf{y})]d\mathbf{y} + \right.$$

$$+\int\limits_{V_2} \mathrm{R}_{lj}(\mathbf{x}-\mathbf{y},p)\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(\mathrm{Res}_{jm}(\mathbf{k},p)U_m^{0**}(\mathbf{k},p) - \right.$$

$$\left.\left. - \mathrm{Res}_{jm}(\mathbf{k},p)R_{me}^{1*}(\mathbf{k},p)\Phi_e^{**}(\mathbf{k},p))d\mathbf{k}\right]\right\}d\mathbf{y}dp \qquad (7)$$

Докажем, что квадратура (7) – решение исходной задачи (1), т.е. что (7) удовлетворяет исходной системе уравнений, а также начальным и краевым условиям задачи (1).

Теорема 1. Квадратура (7) удовлетворяет уравнению движения начально-краевой задачи (1).

Доказательство. Запишем выражение (7) в виде

$$U_l(\mathbf{x},p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}U_l^*(\mathbf{x},p)dp \qquad (8)$$

Тогда согласно свойствам преобразования Лапласа получаем

$$\ddot{U}_l(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}[p^2U_l^*(\mathbf{x},p) - pU_{l0}(\mathbf{x}) - U_{l1}(\mathbf{x})]dp \qquad (9)$$

Учитывая выражение (3), для $U_l(\mathbf{x}, t)$ из (8) будем иметь

$$U_l(\mathbf{x},t) = \int\limits_0^t\int\limits_{V_1} R_{lj}^1(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-\tau)\Phi_j^1(\mathbf{y},\tau)d\mathbf{y}d\tau \qquad (10)$$

Здесь

$$R_{lj}^1(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}R_{lj}(\mathbf{x}-\mathbf{y},p)dp, \quad \Phi_j^1(\mathbf{y},\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}\Phi_j^{1*}(\mathbf{y},p)dp$$

Подставим выражения (9) и (10) в уравнение движения задачи (1). Переходя к интегральным образам и учитывая выражение (3), получаем

$$\int\limits_{V_1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}K_{lj}(\mathbf{x}-\mathbf{y},p)\Phi_j^{1*}(\mathbf{y},p)d\mathbf{y}dp + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}\Phi_l^*(\mathbf{x},p)dp = 0 \qquad (11)$$

$$K_{lj}(\mathbf{x}-\mathbf{y},p)=L_x R_{lj}(\mathbf{x}-\mathbf{y},p)+\rho p^2 R_{lj}(\mathbf{x}-\mathbf{y},p)$$

где L_x – оператор Ламе, действующий по переменным **x**.

Здесь учтено, что

$$F_l(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}[\Phi_l^*(\mathbf{x},p)-\rho p U_{l0}(\mathbf{x})-\rho U_{l1}(\mathbf{x})]dp \tag{12}$$

В соотношении (11) согласно свойству фундаментального решения $K_{lj}(\mathbf{x}-\mathbf{y},p)$ – ядро единичного интегрального преобразования, поэтому

$$\int_{V_1} K_{lj}(\mathbf{x}-\mathbf{y},p)\Phi_j^{1*}(\mathbf{y},p)dy=\Phi_l^{1*}(\mathbf{x},p)$$

Учитывая это равенство, из (11) получаем тождество. Теорема доказана.

Теорема 2. Квадратура (7) удовлетворяет начальным условиям задачи (1).

Доказательство. Воспользуемся свойствами преобразования Лапласа. Тогда учитывая равенство (8), будем иметь

$$\ddot{U}_l(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}p^2\left[U_l^*(\mathbf{x},p)-\frac{U_{l0}(\mathbf{x})}{p}-\frac{U_{l1}(\mathbf{x})}{p^2}\right]dp \tag{13}$$

Здесь $U_l^*(\mathbf{x},p)$ – решение краевой задачи (2) – известная функция, т.е. формула (13) однозначно определяет $\ddot{U}_l(\mathbf{x},t)$ как функцию известную. Обозначим ее $f(\mathbf{x}, t)$. Тогда разрешая уравнение (13) относительно $U_l^*(\mathbf{x},p)$, получаем другую форму квадратуры (7) в которой в явном виде выделены начальные значения $U_{l0}(\mathbf{x})$ и $U_{l1}(\mathbf{x})$:

$$U_l(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt}U_l^*(\mathbf{x},p)dp=\int_0^t f(\mathbf{x},t)(t-\tau)d\tau+U_{l0}(\mathbf{x})+U_{l1}(\mathbf{x})t \tag{14}$$

Положив в (14) $t = 0$, получаем одно из начальных условий, а продифференцировав (14) по t и положив $t = 0$, получаем другое начальное условие задачи (1).

Теорема 3. Квадратура (7) удовлетворяет краевым условиям задачи (1).

Доказательство. Используем соотношения (8) и (3). Тогда

$$U_l^*(\mathbf{x},p)=\int_{V_1} R_{lj}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Phi_j^{1*}(\mathbf{y},p)d\mathbf{y} \tag{15}$$

Положим в (15) **x** принадлежащим поверхности S. Умножим равенство (15) на

$$(n_1(\mathbf{x}_S)+n_2(\mathbf{x}_S)+n_3(\mathbf{x}_S))e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_S}$$

и проинтегрируем по поверхности S. Учитывая равенство (5), получаем

$$\int_S n(\mathbf{x}_S)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_S}[U_l^*(\mathbf{x}_S,p)-U_{l0}^*(\mathbf{x}_S,p)]dS=0 \tag{16}$$

В силу произвольности поверхности S выражение в квадратных скобках, обращается в нуль, откуда получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.

Самара

Поступила в редакцию
23.VI.1997