

УДК 539.375:534.1

© 1998 г. В.И. Кондауров

**ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ВОЛН РАЗРУШЕНИЯ  
В ВЫСОКООДНОРОДНЫХ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛАХ**

Для описания деформирования и эволюции поврежденности хрупких материалов типа стекол предлагается кинетическая модель, учитывающая трансформацию упругой энергии в поверхностную. Кинетика разрушения характеризуется степенной зависимостью от динамической перегрузки, равной разности скоростей изменения упругой и поверхностной энергий относительно приращений поврежденности среды. На основе этой модели рассматривается задача о плоской волне разрушения в полупространстве, вызванной действием приложенной к границе нормальной нагрузки. Построено приближенное асимптотическое решение в виде сращивания двух степенных разложений в областях медленного и быстрого изменения решения. Показано, что в соответствии с имеющимися экспериментальными данными при умеренных нагрузках скорость и продольное напряжение имеют одинаковые значения в областях упругости и разрушенного состояния материала. С ростом нагрузки распределение этих величин становится двухволновым с амплитудой предвестника, превышающей предел упругости при одноосном сжатии. Структура волны разрушения в этом случае сильно зависит от степенного показателя кинетической функции в окрестности статистического состояния. Найдено, что при показателе, меньшем единицы, влияние кинетики сказывается только в конечной окрестности фронта разрушения.

Экспериментальное исследование [1–3] процессов динамического разрушения некоторых стекол выявило ряд характерных особенностей плоских волн сжатия. Наиболее существенны из них следующие: одноволновая структура профиля продольных напряжений; двухволновая конфигурация волны поперечных напряжений; инициирование волн разрушения в точках, принадлежащих границе тела или контактными поверхностями; отсутствие поврежденности во внутренних точках тела при высоких уровнях напряжений вплоть до подхода волны разрушения.

С помощью традиционного описания волн разрушения [4–6]<sup>1</sup> не удастся смоделировать эти особенности. Упомянутые подходы с неизбежностью приводят к двухфронтальной структуре ударных волн с амплитудой предвестника, равной пределу упругости материала.

При исследовании особенностей деформирования и разрушения высокооднородных хрупких материалов в данной работе приняты во внимание следующие качественные соображения. Отсутствие поврежденности во внутренних точках тела даже при высоком уровне напряжений до момента подхода волны разрушения связано, по-видимому, с отсутствием начальных достаточно больших микродефектов и большим временем их образования, превышающем время пробега по телу акустических волн. В отличие от внутренних точек тела его граница, даже хорошо обработанная, содержит значительное число макротрещин и служит геометрическим местом точек, из которых начинается движение волн разрушения. В связи с этим задача о динамическом разрушении высокооднородных хрупких тел сводится к исследованию распространения волны дробления по предварительно напряженной упругой

<sup>1</sup> См. также Николаевский В.Н. Предельная скорость фронта разрушения и динамические перегрузки хрупких материалов: Препринт № 123. М.: ИПМех АН СССР., 1979. 57 с.

среде с уровнем напряжений, определяемым как действующей на границе нагрузкой, так и внутренними свойствами раздробленного материала.

Второе существенное обстоятельство заключается в необходимости использования моделей с конечной кинетикой разрушения при интерпретации результатов рассматриваемых экспериментов. Дело в том, что при мгновенной кинетике, когда поврежденность меняется одновременно с напряжениями, решение типичной задачи о распространении волн в неупругом полупространстве при действии на границу динамической нагрузки является заведомо неединственным. В традиционных задачах с зависимостью напряжений от деформаций в виде единой кривой, включающей при нагружении как упругий, так и неупругий участки, эта неединственность устраняется требованием непрерывности корректного решения относительно малого варьирования указанной кривой, в частности – сглаживания угловой точки, соответствующей переходу их упругого в неупругое состояние. В рассматриваемом случае ситуация иная: материал из упругого состояния с некоторым уровнем напряжений, никак не связанным с пределом упругости, переходит после подвоха волны дробления в состояние с иной, отличной от начальной, зависимостью напряжений от деформаций. Варьирование этих отдельных, не связанных между собой кривых не устраняет неединственности, что и обуславливает необходимость привлечения кинетики в качестве регуляризатора решения.

**1. Основные уравнения.** Материал как в исходном, так и разрушенном состоянии считается макроскопически однородным, начально-изотропным, тепловые эффекты – малыми. Деформации, отсчитываемые от естественного (ненагруженного и неповрежденного) состояния, характеризуются симметричным тензором малых деформаций  $\mathbf{e}$ , а степень поврежденности (разрушения) материала – скалярным параметром  $\omega$ . Величины ( $\mathbf{e}$ ,  $\omega$ ) характеризуют состояние, реакция материала задается функциями

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}, \omega), \quad U = U(\mathbf{e}, \omega)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – симметричный тензор напряжений,  $U$  – упругий потенциал повреждающейся среды, определяемый выражением [7, 8]:

$$\rho U(\mathbf{e}, \omega) = \frac{1}{2} K I_1 + \mu J - \alpha_p I_1 \omega - \alpha_s J \omega + \gamma \omega + \frac{1}{2} \beta \omega^2 \quad (1.1)$$

$$I_1 = \mathbf{e} : \mathbf{I}, \quad J = (\mathbf{e}' : \mathbf{e}')^{1/2}, \quad \mathbf{e}' = \mathbf{e} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I}$$

где  $\rho$  – плотности материала,  $K, \mu$  – модули объемного сжатия и сдвига,  $\alpha_p, \alpha_s > 0$  – параметры, характеризующие уменьшение накопленной упругой энергии вследствие разрушения,  $\gamma, \beta > 0$  – характеристики эффективной поверхностной энергии единицы массы разрушенного материала,  $\mathbf{e}'$  – девиатор тензора деформаций.

Выражение для тензора напряжений, связанного с упругим потенциалом соотношением  $\boldsymbol{\sigma} = \rho \partial U / \partial \mathbf{e}$ , имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = (K I_1 - \alpha_p \omega) \mathbf{I} + (2\mu - \alpha_s \omega / J) \mathbf{e}' \quad (1.2)$$

Эволюция поврежденности материала определяется кинетическим уравнением

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\tau} \Phi \left\{ -\frac{1}{\beta} \frac{\partial U}{\partial \omega} \right\}, \quad \Phi(z) = \begin{cases} A z^k, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}, \quad k > 0 \quad (1.3)$$

где  $\tau > 0$  – характерное время.

С учетом выражения (1.1) кинетическое уравнение (1.3) запишем в форме

$$\dot{\omega} = \tau^{-1} \Phi \{ \beta^{-1} (\alpha_p I_1 + \alpha_s J - \gamma - \beta \omega) \} \quad (1.4)$$

Можно указать следующие основания для выбора (1.4) в качестве закона изменения повреждаемости:

в медленном процессе ( $\dot{\omega} \rightarrow 0$ ) соотношение (1.4) приводит к модели повреждающегося тела с мгновенной кинетикой [7, 8], основанной на локальном балансе накопленной упругой и эффективной поверхностной энергий;

величина  $-\partial U/\partial \omega$ , равная разности скоростей изменения упругой и поверхностной энергий относительно приращения поврежденности, является естественной скалярной мерой "динамической перегрузки", применимой при различных типах напряженно-деформированного состояния;

закон (1.4) позволяет единым образом описать основные качественные особенности рассеянного разрушения, в частности – наличие пороговых значений деформаций, при которых начинается накопление поврежденности, разрушение как при растяжении, так и при сдвиге, эффекты дилатансии, внутреннего трения и т.п.

Из уравнения (1.4) видно, что учет кинетики разрушения приводит к модели материала с длительной затухающей памятью о предшествующих состояниях, поскольку решение уравнения (1.4) при заданной истории деформации представляет собой функционал, определенный на  $e(\xi)$ ,  $\xi \leq t$ , и параметрически зависящий от  $t$ .

**2. Разрушение при одноосном сжатии.** Рассмотрим на основе сформулированной модели задачу об одноосной деформации начально невозмущенного полупространства  $x_1 \geq 0$ , подверженного действию на границе  $x_1 = 0$  нормального напряжения  $\sigma_{11} = -p_0 H(t)$ , где  $p_0 = \text{const} > 0$ ,  $H(t)$  – функция Хевисайда.

Система уравнений относительно неизвестных  $(v_1, \sigma_{11}, \omega)$ , где  $v_1$  – скорость частицы вдоль оси  $x_1$ , при учете (1.2), (1.4) записывается в форме

$$\frac{\rho \partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} - \Lambda_0 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\alpha \tau^{-1} \Phi(z), \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \tau^{-1} \Phi(z) \quad (2.1)$$

$$\Lambda_0 = K + \frac{4\mu}{3}, \quad \alpha = \alpha_p - \alpha_s \sqrt{\frac{2}{3}} < 0, \quad \Lambda_f = \Lambda_0 - \frac{\alpha^2}{\beta}, \quad z = \frac{\alpha \sigma_{11}}{\beta \Lambda_0} - \frac{\Lambda_f \omega}{\Lambda_0} - \frac{\gamma}{\beta}$$

с нулевыми начальными данными

$$v_1(x_1, 0) = \sigma_{11}(x_1, 0) = \omega(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \geq 0 \quad (2.2)$$

и граничным условием

$$\sigma_{11}(0, t) = -p_0, \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

Для дальнейшего удобно ввести безразмерные величины

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{x} = \frac{x_1}{c_0 t_0}, \quad \bar{v} = \frac{v_1}{c_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{11}}{\Lambda_0}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\Lambda_0},$$

$$\bar{b}^2 = \frac{\Lambda_f}{\Lambda_0}, \quad \bar{a} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \bar{g} = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{t_0},$$

где  $t_0$  – характерное время,  $c_0 = (\Lambda_0 / \rho)^{1/2}$  – скорость продольных упругих волн, а величины  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  связаны тождеством  $\bar{\alpha} \bar{a} + \bar{b}^2 = 1$ .

Система (2.1) в этих безразмерных переменных записывается в виде

$$\bar{v} - \partial \bar{\sigma} / \partial \bar{x} = 0, \quad \bar{\tau} (\bar{\sigma} - \partial \bar{v} / \partial \bar{x}) = -\bar{\alpha} \Phi(z), \quad \bar{\tau} \dot{\omega} = \Phi(z) \quad (2.4)$$

$$z = \bar{a} \bar{\sigma} - \bar{b}^2 \omega - \bar{g}$$

Здесь и далее черта над безразмерными переменными опущена.

Система (2.4) определена в области  $0 \leq x \leq x_*(t)$ , где  $x_*(t)$  – неизвестная функция, которая находится из решения и задает положение фронта волны разрушения, движущейся от границы  $x = 0$ . При  $x_*(t) < x < t$  материал находится в упругом непо-

врежденном ( $\omega = 0$ ) состоянии, его поведение описывается первыми двумя уравнениями системы (2.4) с нулевой правой частью:

$$\partial v^0 / \partial t - \partial \sigma^0 / \partial x = 0, \quad \partial \sigma^0 / \partial t - \partial v^0 / \partial x = 0. \quad (2.5)$$

Граничное и начальное условие (2.2), (2.3) записываются в виде

$$\sigma(0, t) = -p_0, \quad t \geq 0; \quad \sigma^0(x, 0) = v^0(x, 0) = 0, \quad x \geq 0 \quad (2.6)$$

К ним добавляются условия сопряжения решения на фронте волны разрушения

$$\sigma(x, t) = \sigma^0(x, t), \quad v(x, t) = v^0(x, t), \quad x = x_*(t) \quad (2.7)$$

Рассмотрим при  $t \gg \tau$  приближенное решение краевой задачи (2.4)–(2.7) в виде степенных разложений. Поскольку (2.4) – система гиперболического типа с малым параметром при старших производных и при  $\tau = 0$  представляет собой также гиперболическую систему второго порядка с тем же числом граничных условий, но в отличие от (2.4) допускающую решения с разрывами, отличными от упругих ударных волн, будем, аналогично описанному ранее подходу [9], строить решение в виде сращивания двух разложений. Первое в форме степенного ряда по малому параметру  $\delta(\tau)$  будет использоваться в областях с малыми градиентами решения, второе разложение по малому параметру  $\Delta(\tau)$  – в зоне больших градиентов, соответствующей окрестности ударной волны.

Представляя вектор решения  $w = (v, \sigma, \omega)$  в виде степенного ряда

$$w = w_0 + w_1 \delta + w_2 \delta^2 + \dots, \quad \delta = \tau^{1/k}$$

где  $k$  – показатель кинетической функции (1.3), находим

$$z = z_0 + z_1 \delta + z_2 \delta^2 + \dots, \quad z_0 = a\sigma_0 - b^2\omega_0 - g, \quad z_i = a\sigma_i - b^2\omega_i, \quad i \geq 1$$

Из (2.4) следует, что  $\Phi(z_0) = 0$ , то есть  $z_0 = 0$ . Это означает, что в нулевом приближении решение определяется уравнениями среды с мгновенной кинетикой разрушения

$$\dot{v}_0 - \partial \sigma_0 / \partial x = 0, \quad \dot{\sigma}_0 - b^2 \partial v_0 / \partial x = 0 \quad (2.8)$$

В этом приближении скорость фронта волны разрушения равна  $b = (\Lambda_f / \Lambda_0)^{1/2}$ , а его положение определяется уравнением  $x = bt$ .

Системы (2.5), (2.8) с краевым и граничным условиями (2.6)–(2.7) имеют однопараметрическое семейство решений с сильным разрывом на линии  $x = bt$ :

$$\sigma^0(x, t) = -v^0(x, t) = \sigma_*, \quad bt \leq x \leq t \quad (2.9)$$

$$\sigma(x, t) = -p_0, \quad v(x, t) = ((1-b)\sigma_* + p_0) / b, \quad 0 \leq x \leq bt$$

где  $\sigma_*$  – произвольная амплитуда упругого предвестника.

Для построения быстроменяющегося решения в окрестности фронта  $x = bt$  введем новые независимые переменные, осуществляющие "растяжение" в перпендикулярном к фронту направлении

$$\xi = t, \quad \eta = (x - bt) / \Delta$$

где  $\Delta$  – малый параметр, связь которого с  $\tau$  имеет вид  $\tau = \Delta^{k+1}$ . Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{b}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

и используя в качестве вектора решения  $(u, z)$ , где  $u$  – перемещение частицы, такое

что

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \sigma = b^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha z + \alpha g, \quad \omega = a \frac{\partial u}{\partial x} - z - g$$

систему (2.4) можно записать в виде двух уравнений

$$u_{\xi\xi} - 2 \frac{b}{\Delta} u_{\xi\eta} - \frac{\alpha}{\Delta} z_{\eta} = 0; \quad \frac{\tau a}{\Delta} u_{\xi\eta} - \frac{\tau a b}{\Delta^2} u_{\eta\eta} - \tau z_{\xi} + \frac{\tau b}{\Delta} z_{\eta} = \Phi(z)$$

Используя разложения

$$u = u^{(0)}\Delta + u^{(1)}\Delta^2 + \dots, \quad z = z^{(0)}\Delta + z^{(1)}\Delta^2 + \dots$$

и приравнивая члены одного порядка малости, получим указанную выше связь  $\Delta(\tau)$  и систему уравнений для нулевого приближения, которая может быть сведена к нелинейному параболическому уравнению относительно  $e = u_{\eta}^{(0)}$ :

$$\frac{\partial e}{\partial \xi} = D \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial e}{\partial \eta} \right)^{1/k}, \quad D = \frac{|\alpha|}{2b} \left( \frac{|\alpha|b}{A} \right)^{1/k} > 0. \quad (2.10)$$

При  $\Delta \rightarrow 0$  областью определения решения (2.10) является  $\{\xi \geq 0, -\infty < \eta \leq 0\}$ . Начальным условием для (2.10) служит

$$e(0, \eta) = e_0, \quad -\infty < \eta \leq 0, \quad e_0 = -(p_0 + \alpha g) / b^2 \quad (2.11)$$

следующее из соотношений (2.9) и формулы  $\sigma^{(0)} = b^2 u_{\eta}^{(0)} + \alpha g$ .

На правой границе  $\eta = 0$  краевое условие записывается в виде

$$e(\xi, 0) = e_*, \quad \xi \geq 0, \quad e_* = \alpha g / \{b(1-b)\} \quad (2.12)$$

вытекающем из соотношений (2.9), непрерывности  $\sigma$  и  $v$  на линии  $x = bt$  и условия  $\sigma^0 + v^0 = 0$  в области упругого состояния материала.

Следует отметить, что условие непрерывности напряжения и скорости на фронте  $x = bt$  однозначно определяет амплитуду упругого предвестника  $\sigma_* = be_* = \alpha g / (1-b)$  и скачки деформации и поврежденности на фронте волны разрушения  $[e] = \alpha g / b$ ,  $[\omega] = g / b$ .

На левой границе при  $\eta \rightarrow -\infty$  краевое условие представляет собой условие сращивания с медленно меняющимся решением (2.9) и имеет вид

$$e(\xi, \eta) = e_0, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \rightarrow -\infty \quad (2.13)$$

Задача (2.10)–(2.13) автомодельна, так как  $D = \text{const}$ , а краевые условия (2.11)–(2.13) постоянны.

Производя замену  $\zeta = \eta / (n^2 / D \xi)^n$ ,  $n = k / (k+1)$ , приходим к краевой задаче

$$e''(\zeta) + (k+1)\zeta(e'(\zeta))^{(2k-1)/k} = 0, \quad -\infty < \zeta \leq 0 \quad (2.14)$$

$$e(-\infty) = be_0, \quad e(0) = e_*$$

При  $k = 1$  уравнение (2.14) совпадает с линейным уравнением теплопроводности, решением которого является

$$e(\zeta) = e_0 + \frac{\chi(\zeta)}{b^2}, \quad \chi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (p_0 + \sigma_*) \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-x^2} dx \quad (2.15)$$

Скорость и напряжение в нулевом приближении определяются выражением

$$v^{(0)}(\zeta) = -be_0 - \frac{\chi(\zeta)}{b}, \quad \sigma^{(0)}(\zeta) = -p_0 + \chi(\zeta) \quad (2.16)$$

Для случая  $k \neq 1$  общее решение (2.14) имеет вид

$$e(\zeta) = C_2 + \int_0^{\zeta} (C_1 + qx^2)^m dx, \quad q = \frac{k^2 - 1}{2k}, \quad m = \frac{k}{1 - k}$$

При  $k < 1$  величина  $q < 0$  и из необходимого условия существования решения  $e' = (C_1 + q\zeta^2)^m > 0$  следует, что изменение решения между  $e(0)$  и  $e(-\infty)$  должно происходить на конечном интервале  $[\zeta_0, 0]$ ,  $\zeta_0 < 0$ . При условии гладкого срачивания ( $de/d\zeta|_{\zeta_0} = 0$ ) решение, удовлетворяющее краевым условиям (2.12), (2.13), записывается в виде

$$e(\zeta) = \frac{\sigma_*}{b} - (p_0 + \sigma_*) \frac{I(\zeta/\zeta_0)}{b^2 I(1)} \quad (2.17)$$

$$I(z) = \int_0^z (1 - z^2)^m dz, \quad \zeta_0 = - \left\{ \frac{p_0 + \sigma_*}{|q|^m b^2 I(1)} \right\}^{1/(2m+1)}, \quad m = \frac{k}{1 - k} > 0$$

Скорость и напряжение в этом случае задаются соотношениями

$$v^{(0)}(\zeta) = -\sigma_* + (p_0 + \sigma_*) \frac{I(\zeta/\zeta_0)}{bI(1)}, \quad \sigma^{(0)}(\zeta) = -\sigma_* - (p_0 + \sigma_*) \frac{I(\zeta/\zeta_0)}{I(1)} \quad (2.18)$$

В случае  $k > 1$  величины  $q > 0$ ,  $m = k/(1 - k) < -1$  и из условия существования решения  $e'(\zeta) > 0$  следует  $C_1 > 0$ , так как в противном случае при  $\zeta^2 \rightarrow -C_1/q$  интеграл в общем решении уравнения (2.14) расходится. В силу ограниченности общего решения при  $C_1 > 0$  изменение решения происходит на интервале  $-\infty < \zeta \leq 0$ . С учетом краевых условий (2.12), (2.13) получаем

$$e(\zeta) = \frac{\sigma_*}{b} - (p_0 + \sigma_*) \frac{J(-\zeta/\zeta_*)}{b^2 J(\infty)} \quad (2.19)$$

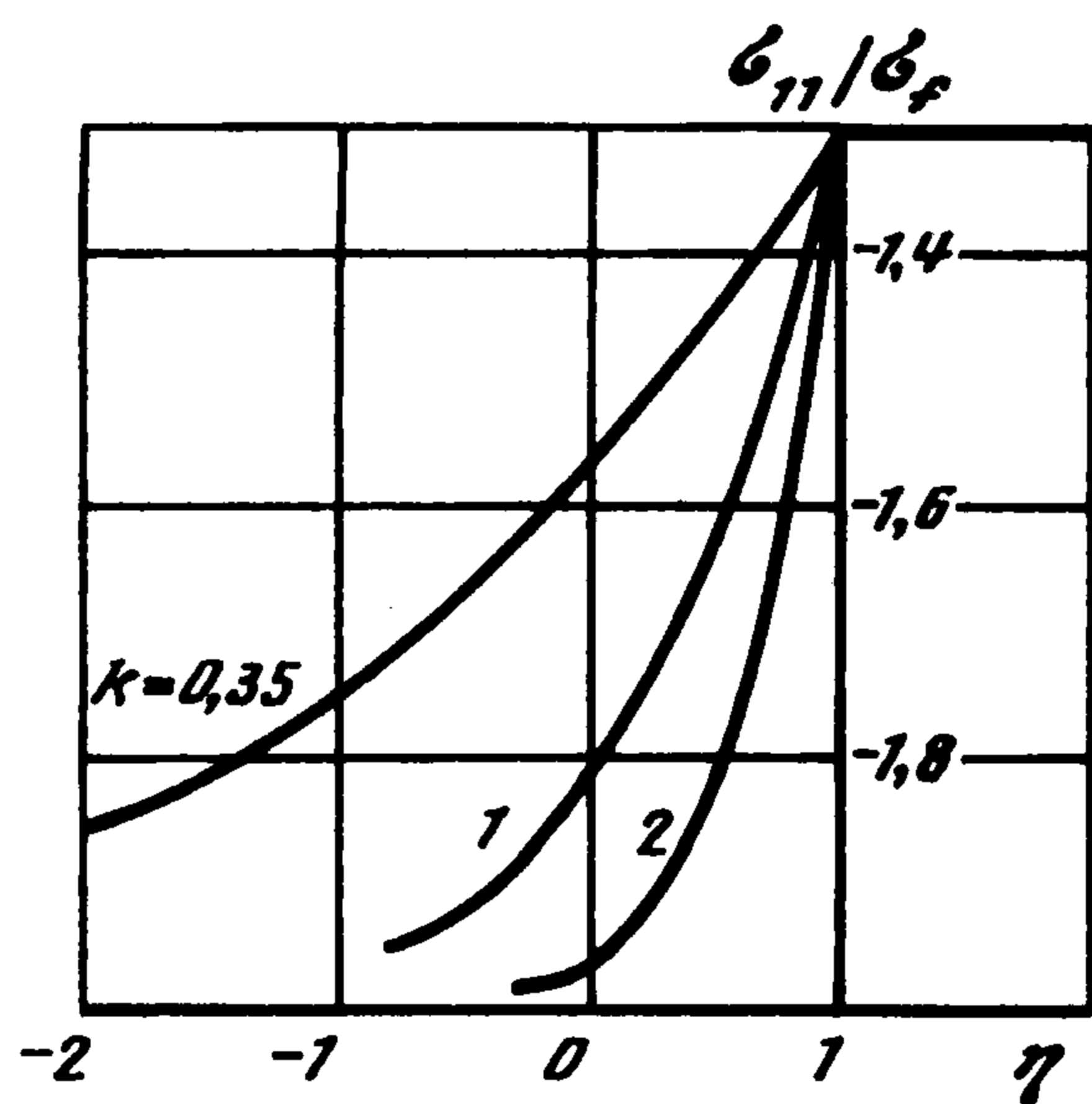
$$J(z) = \int_0^z (1 + z^2)^m dz, \quad \zeta_* = \left\{ \frac{1}{q^m b^2 J(\infty)} (p_0 + \sigma_*) \right\}^{1/(2m+1)}$$

Зависимости  $v^{(0)}(\zeta)$  и  $\sigma^{(0)}(\zeta)$  определяются в этом случае формулами (2.18), в которых следует заменить  $I(z)$  на  $J(z)$ .

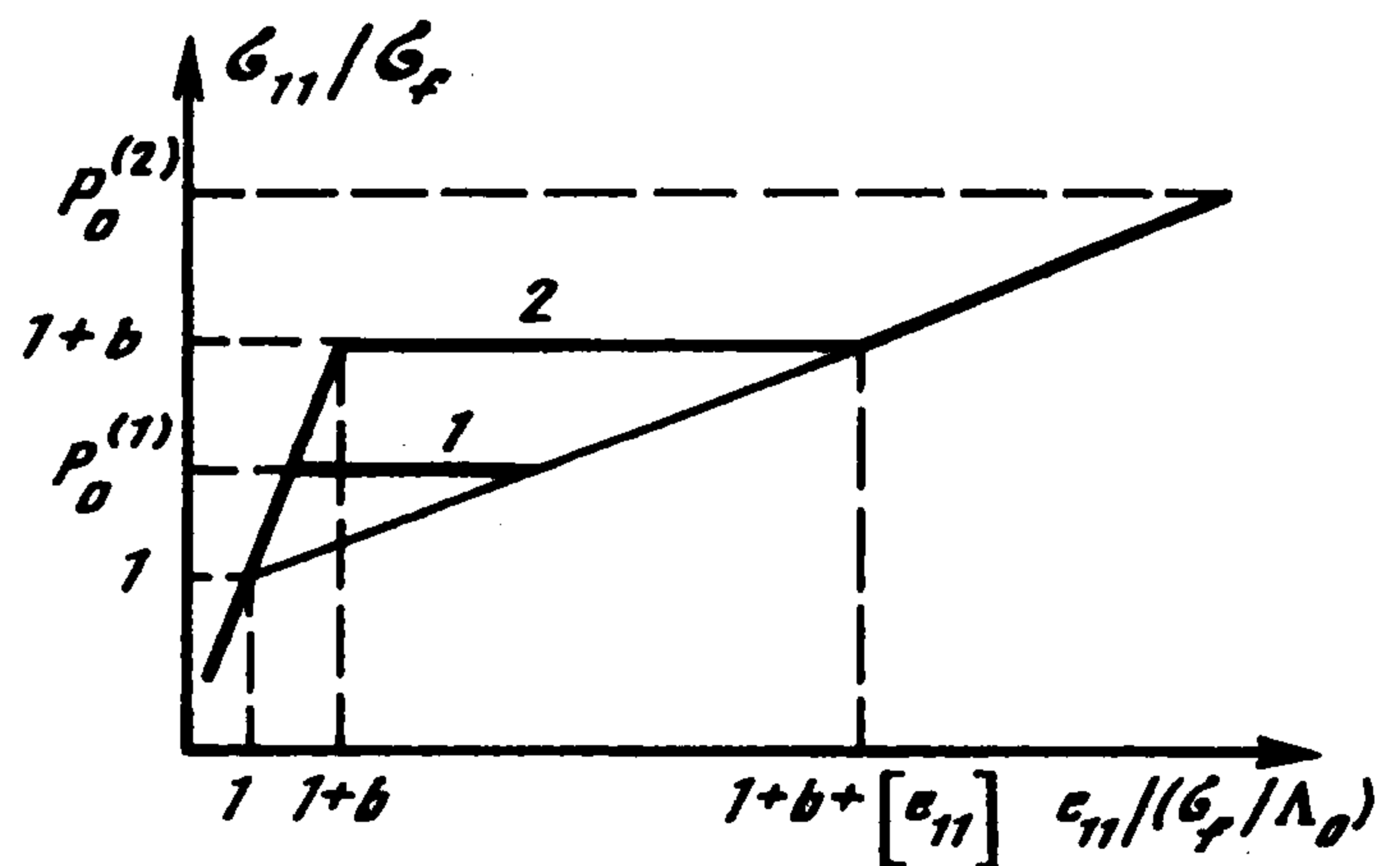
**3. Обсуждение результатов.** Решение, построенное на основе предложенной модели разрушения, описывает следующие характерные особенности поведения хрупких высокооднородных материалов при одноосной динамической деформации сжатия. При нагрузке  $p_0 < |\sigma_f|$ , где  $\sigma_f = \Lambda_0 \gamma / \alpha < 0$  – пороговое значение сжимающего напряжения, материал во все моменты времени остается в упругом неповрежденном состоянии. В случае, если приложенное к границе давление  $p_0$  лежит в диапазоне  $\sigma_* < -p_0 < \sigma_f$ ,  $\sigma_* = (1 + b)\sigma_f$ , приближенное асимптотическое решение для продольного напряжения и скорости имеют вид прямоугольной ступеньки

$$\sigma_{11}(x_1, t) = -p_0, \quad v_1(x_1, t) = p_0 / \rho c_0, \quad t > 0, \quad 0 < x_1 < c_0 t$$

с одинаковой амплитудой как в области упругости  $bc_0 t \leq x_1 \leq c_0 t$ , так и в области  $0 < x_1 < bc_0 t$  разрушенного состояния материала. В отличие от  $\sigma_{11}(x_1, t)$  и  $v_1(x_1, t)$  профили волн поперечного напряжения  $\sigma_{22}$ , продольной деформации  $e_{11}(x_1, t)$  и



Фиг. 1



Фиг. 2

поврежденности  $\omega(x_1, t)$  имеют двухволновые конфигурации, такие, что

$$e_{11} = -p_0 / \Lambda_0, \quad \sigma_{22} = \lambda e_{11}, \quad \omega = 0, \quad bc_0 t < x_1 \leq c_0 t$$

$$e_{11} = -(p_0 + \alpha\gamma / \beta) / \Lambda_f, \quad \sigma_{22} = (\lambda - \alpha\hat{\alpha} / \beta)e_{11} + \hat{\alpha}\gamma / \beta$$

$$\omega = \alpha(e_{11} - \gamma / \alpha) / \beta, \quad 0 \leq x_1 \leq bc_0 t$$

где  $\hat{\alpha} = \alpha_p + \alpha_s / \sqrt{6}$ , а остальные обозначения введены ранее.

Одноволновой профиль  $\sigma_{11}(x_1, t)$  обусловлен тем, что любое решение вида

$$\sigma_{11}(x_1, t) = \begin{cases} \sigma_* = \text{const}, & bc_0 t \leq x_1 \leq c_0 t \\ -p_0, & 0 \leq x_1 \leq bc_0 t \end{cases}$$

с амплитудой упругого предвестника  $\sigma_* \neq -p_0$ , допустимое в приближении мгновенной кинетики, асимптотически неустойчиво при конечной кинетике разрушения. Действительно, если в медленно меняющемся решении существует разрыв, то его наличие приводит к необходимости использования в окрестности этого разрыва решения с "растянутой" пространственной переменной  $\eta = (\chi - bc_0 t) / \Delta$ . Необходимыми условиями существования такого решения являются определенная амплитуда упругого предвестника  $\sigma_* = (1 + b)\sigma_f$  и неравенство  $e' \geq 0$ . Вследствие этих взаимоисключающих условий единственно возможным решением при  $|\sigma_f| < p_0 < (1 + b)|\sigma_f|$  является решение с предвестником  $\sigma_* = -p_0$ , т.е. одноволновая конфигурация профиля  $\sigma_{11}$ .

При достаточно больших значениях приложенной к границе нагрузки, превышающих  $(1 + b)\sigma_f$ , асимптотический профиль  $\sigma_{11}(x_1, t)$  и  $v_1(x_1, t)$  имеет двухволновую конфигурацию. Амплитуда предвестника в этом случае неизменна и равна  $\sigma_*$  при любых значениях действующего на границе давления  $p_0$ . Структура "сглаженного" фронта независимо от вида граничных условий при  $x_1 = 0$  определяется степенным показателем  $k$  разложения в окрестности нуля кинетической функции  $\Phi(z)$ , где  $z = \sigma_{11} / (\beta\Lambda_0) - b^2\omega - \gamma/\beta$  — динамическая перегрузка материала. При  $k \geq 1$  влияние кинетики разрушения сказывается во всей области, занятой поврежденным материалом, в то время как при  $k < 1$  кинетика существенна только в конечной окрестности фронта разрушения. Эти особенности проиллюстрированы на фиг. 1, где представлена зависимость напряжения  $\sigma_{11}$  от координаты  $\eta$  при  $b = 0,3$  для разных  $k$ .

Как и в случае небольших нагрузок, величины  $e_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\omega$  терпят разрыв на фронте волны разрушения, плавно изменяясь после него до значений, соответствующих равновесному состоянию. Траектории нагружения на плоскости  $\sigma_{11} - e_{11}$ ,

изображенные на фиг. 2 кривыми 1 ( $p_0 < (1+b)|\sigma_f|$ ) и 2 ( $p_0 > (1+b)|\sigma_f|$ ), иллюстрируют указанные особенности.

Скорость частиц на фронте волны разрушения не зависит от приложенных на границе напряжений и равна  $(1+b)|\sigma_f|/(\rho c_0)$ , т.е. определяется только квазистатическими свойствами материала. Из формул (2.15), (2.18) видно, что линии постоянных значений скорости и напряжений в окрестности фронта разрушения определяется уравнением  $x - bc_0t = Mt^{k/(1+k)}$ ,  $M = \text{const}$  т.е. не являются прямыми, параллельными фронту, а отходят от него вследствие роста со временем протяженности зоны больших градиентов. Определяя эффективную ширину волны разрушения как

$$\Delta x = \frac{1}{2}(p_0 + (1+b)\sigma_f) \max_{x_1} |\partial \sigma_{11} / \partial x_1|,$$

можно видеть, что при  $k = 1$  ширина волны растет как  $t^{1/2}$  и не зависит от интенсивности приложенной нагрузки. При  $k \neq 1$  увеличение ширины происходит по закону  $t^{k/(k+1)}$  с коэффициентом, содержащим помимо материальных характеристик также зависимость от действующего граничного давления.

Автор благодарит Г.И. Канеля за обсуждения рассматриваемой проблемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-05-65607).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Brar N.S., Bless S.J., Rosenberg Z. Impact-induced failure waves in glass bars and plates // Appl. Phys. Lett. 1991. V. 59. № 26. P. 3396–3398.
2. Kanel G.I., Rasorenov S.V., Fortov V.E. The failure waves and spallations in homogeneous brittle materials // Shock Compression of Condensed Matter 1991, S.C. Schmidt, et all. Amsterdam: Elsevier, 1992. P. 451–454.
3. Канель Г. И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е. Ударноволновые явления в конденсированных средах. М.: "Янус-К", 1996. 408 с.
4. Григорян С.С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 643–669.
5. Слепян Л.И. О моделях в теории волн хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 1. С. 181–186.
6. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
7. Кондауров В.И. Континуальное разрушение нелинейно-упругих тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 302–310.
8. Кондауров В.Н., Никитин Л.В. Теоретические основы реологии геоматериалов. М.: Наука, 1990. 207 с.
9. Кукуджанов В.Н. Распространение упруго-пластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.

Долгопрудный

Поступила в редакцию  
16.IV.1997