

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. М.Л. Фильштинский

ДИФРАКЦИЯ АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛН НА ТУННЕЛЬНЫХ ПОЛОСТЯХ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Изучается стационарный волновой процесс в пьезокерамическом пространстве с туннельными полостями-отверстиями в условиях плоской деформации в плоскости, параллельной оси симметрии материала. Соответствующая двумерная граничная задача электроупругости сводится к системе трех сингулярных интегральных уравнений второго рода. Результаты численной реализации алгоритма иллюстрируют влияние конфигурации отверстия, типа и частоты возбуждения, эффекта связанности механических и электрических полей на концентрацию напряжений.

Плоские и антиплоские задачи об импульсном и гармоническом возбуждении пьезоэлектрических сред с туннельными трещинами или полостями изучались, например, в [1–3]. Система граничных интегральных уравнений плоских задач электроупругости об установившихся колебаниях тел с гладкой границей сформулирована в [4].

1. Рассмотрим отнесенную к декартовым прямолинейным осям x_1, x_2, x_3 пьезокерамическую среду, ослабленную туннельными вдоль оси x_2 полостями, поперечные сечения которых ограничены контурами Γ_m ($m = 1, 2, \dots, n$). Условимся считать, что ось x_3 совпадает с направлением силовых линий электрического поля предварительной поляризации керамики. Допустим, что поверхности полостей свободны от механической нагрузки, а из бесконечности на них излучаются плоские монохроматические волны соответствующих типов.

Будем полагать, что кривизны контуров Γ_m удовлетворяют условию Гельдера [5] на $\Gamma = \cup \Gamma_m$ и, кроме того, $\cap \Gamma_m = \emptyset$.

В указанной постановке в среде с полостями реализуется состояние плоской деформации в $x_1 O x_3$. Полная система уравнений имеет вид [6], уравнения движения среды

$$\partial_k \sigma_{ik} = \rho \partial^2 u_i / \partial t^2, \quad \partial_k = \partial / \partial x_k, \quad i, k = 1, 3 \quad (1.1)$$

уравнения электростатики

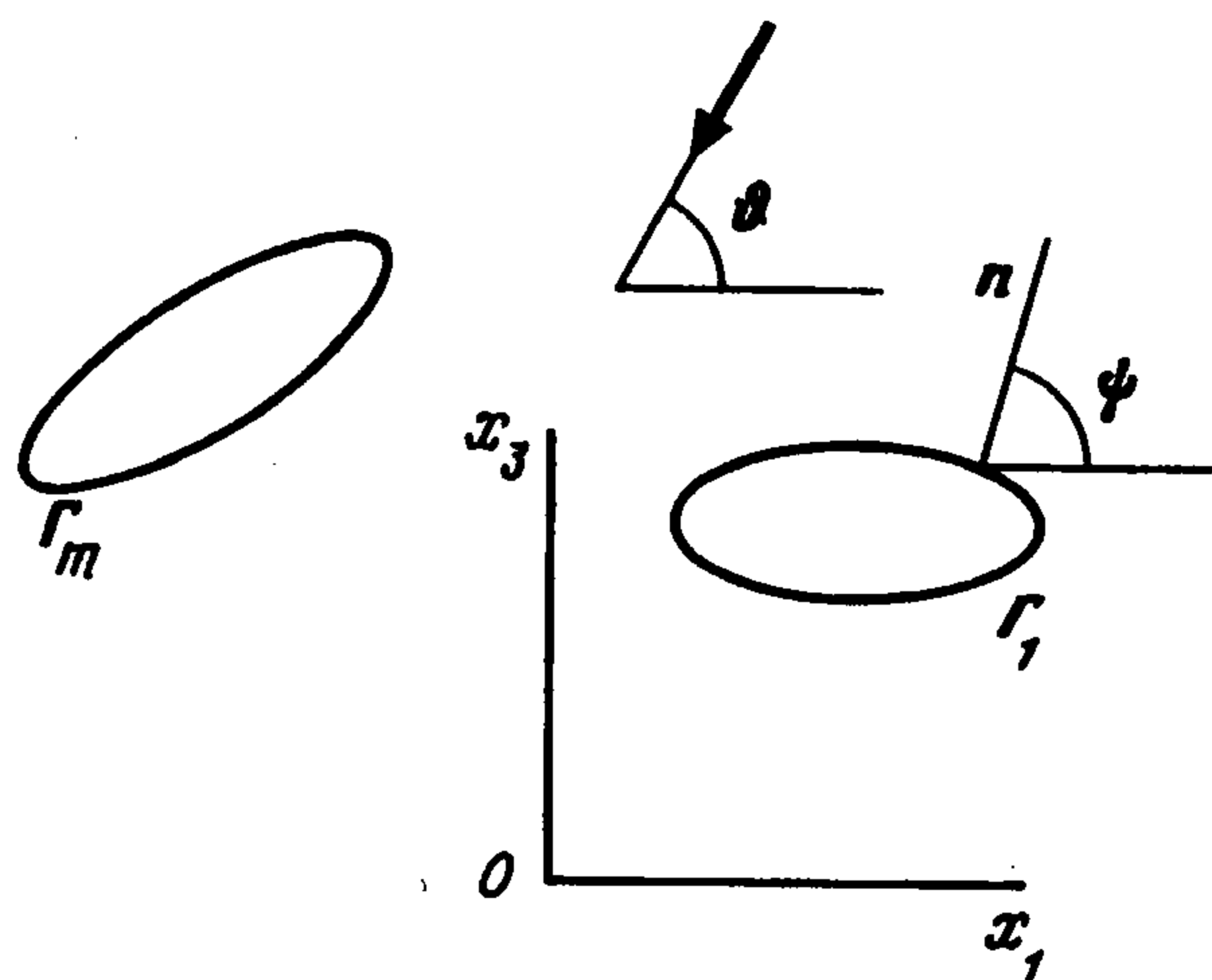
$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (1.2)$$

материальные уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} \partial_1 u_1 + c_{13} \partial_3 u_3 - e_{31} E_3, & \sigma_{13} &= c_{44} (\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) - e_{15} E_1 \\ \sigma_{33} &= c_{13} \partial_1 u_1 + c_{33} \partial_3 u_3 - e_{33} E_3 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$D_1 = \epsilon_{11} E_1 + e_{15} (\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1), \quad D_3 = \epsilon_{33} E_3 + e_{31} \partial_1 u_1 + e_{33} \partial_3 u_3$$

Здесь $\sigma_{ik}, u_i, E_i, D_i$ и φ – соответственно тензор напряжения, перемещения, напря-



Фиг. 1

женность, индукция и потенциал электрического поля; $c_{ij} = c_{ij}^E$ – модули упругости, измеренные при постоянном электрическом поле; $\epsilon_{jj} = \epsilon_{jj}^S$ – диэлектрические проницаемости, определяемые при постоянной деформации; e_{kj} – пьезоэлектрические модули, ρ – плотность материала.

Полагая

$$u_j = \text{Re}(U_j e^{-i\omega t}), \quad \sigma_{jk} = \text{Re}(T_{jk} e^{-i\omega t}),$$

$$\varphi = \text{Re}(\Phi e^{-i\omega t})$$

запишем систему уравнений (1.1)–(1.3) в матричной форме относительно амплитуд перемещений и электрического потенциала

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1^{(1)} & U_1^{(2)} & U_1^{(3)} \\ U_3^{(1)} & U_3^{(2)} & U_3^{(3)} \\ \Phi^{(1)} & \Phi^{(2)} & \Phi^{(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

где дифференциальные операторы L_{ij} определяются следующим образом:

$$L_{11} = c_{11}\partial_1^2 + c_{44}\partial_3^2 + \rho\omega^2, \quad L_{12} = L_{21} = (c_{13} + c_{44})\partial_1\partial_3$$

$$L_{13} = L_{31} = (e_{31} + e_{15})\partial_1\partial_3, \quad L_{22} = c_{44}\partial_1^2 + c_{33}\partial_3^2 + \rho\omega^2$$

$$L_{23} = L_{32} = e_{15}\partial_1^2 + e_{33}\partial_3^2, \quad L_{33} = -\epsilon_{11}\partial_1^2 - \epsilon_{33}\partial_3^2, \quad L_{ij} = L_{ji}$$

К системе (1.4) необходимо добавить механические и электрические граничные условия на поверхностях полостей. Считая, что поверхности полостей граничат с вакуумом (воздухом), полагаем [6]

$$D_n = D_1 \cos \psi + D_3 \sin \psi = 0 \quad \text{на } \Gamma_m \quad (1.5)$$

(ψ – угол между нормалью к контуру Γ и осью Ox_1 (фиг. 1)).

2. Для построения корректных интегральных представлений амплитуд перемещений и потенциала с целью сведения исходной граничной задачи к системе интегральных уравнений будем использовать матрицу фундаментальных решений системы (1.4), [4], которую с точностью до обозначений представим в виде

$$W_j^{(k)}(r, \beta, \omega) = \frac{\epsilon_k R_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \int_0^\pi \left\{ \sum_{v=1}^2 \lambda_{vj}^{(k)} \Psi(\theta_v) + \delta_j^3 \delta_k^3 \lambda_0 \Omega(\theta) \right\} \frac{d\alpha}{A(\alpha)} \quad (2.1)$$

$$W_1^{(k)} = U_1^{(k)}, \quad W_2^{(k)} = U_3^{(k)}, \quad W_3^{(k)} = \Phi^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3$$

Здесь

$$\Psi(x) = \frac{\pi i}{2} e^{ix} - \cos x \text{ci } x - \sin x \text{si } x, \quad \Omega(x) = -\ln x - C$$

$$\theta_v = \gamma r_v r |\cos(\alpha - \beta)|, \quad \theta = r |\cos(\alpha - \beta)|, \quad j, k = 1, 2, 3$$

$$\lambda_{vj}^{(k)} = \frac{\rho_v^2 b_j^{(k)} + c_j^{(k)} + \delta_j^3 \delta_k^3 c_{44}^2 / \rho_v^2}{(-1)^v (\rho_2^2 - \rho_1^2)}, \quad \lambda_0 = \frac{c_{44}^2}{\rho_1^2 \rho_2^2}$$

$$A(\alpha) = c_{44}^{-3} (a_{11} a_{22} a_{33} + 2a_{12} a_{13} a_{23} - a_{11} a_{23}^2 - a_{22} a_{13}^2 - a_{33} a_{12}^2)$$

$$A_1(\alpha) = (a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{23}^2 - a_{13}^2) / c_{44}^2, \quad A_2(\alpha) = a_{33} / c_{44}$$

$$a_{11} = -c_{11}n_1^2 - c_{44}n_3^2, \quad a_{13} = -(e_{31} + e_{15})n_1n_3$$

$$a_{12} = -(c_{13} + c_{44})n_1n_3, \quad a_{22} = -c_{44}n_1^2 - c_{33}n_3^2, \quad n_1 = \cos \alpha$$

$$a_{23} = -e_{15}n_1^2 - e_{33}n_3^2, \quad a_{33} = \epsilon_{11}n_1^2 + \epsilon_{33}n_3^2, \quad n_3 = \sin \alpha$$

$$b_1^{(1)} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2, \quad b_2^{(1)} = a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}, \quad b_3^{(1)} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$$

$$b_2^{(2)} = a_{11}a_{33} - a_{13}^2, \quad b_3^{(2)} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}, \quad b_3^{(3)} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$c_1^{(1)} = c_{44}a_{33}, \quad c_3^{(1)} = -c_{44}a_{13}, \quad c_2^{(1)} = 0, \quad c_2^{(2)} = c_{44}a_{33}$$

$$c_3^{(2)} = -c_{44}a_{23}, \quad c_3^{(3)} = c_{44}(a_{11} + a_{22}), \quad c_k^{(j)} = c_j^{(k)}, \quad b_k^{(j)} = b_j^{(k)}$$

$$\rho_v^2(\alpha) = -\frac{B_1}{2} + (-1)^v \sqrt{\frac{B_1^2}{4} - B_2}, \quad v = 1, 2$$

$$B_i(\alpha) = \frac{A_i(\alpha)}{A(\alpha)}, \quad \gamma = \frac{\omega}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$$

$$R_1 = P_1, \quad R_2 = P_3, \quad R_3 = Q, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = -1, \quad \epsilon_3 = 1$$

Отметим, что функции (2.1) представляют собой решение задачи о гармоническом возбуждении пьезокерамической среды под действием сосредоточенных на линии $x_1 = 0$, $-\infty < x_2 < \infty$, $x_3 = 0$ механических усилий $X_k(x_1, x_3, t) = \delta(x_1, x_3) \operatorname{Re}(P_k e^{-i\omega t})$ ($k = 1, 3$) или электрических зарядов $q(x_1, x_3, t) = \delta(x_1, x_3) \operatorname{Re}(Q e^{-i\omega t})$, где $\delta(x_1, x_3)$ – дельта-функция Дирака. Верхний индекс $k = 1, 2, 3$ в (2.1) указывает на соответствие величин $U_j^{(k)}$ и $\Phi^{(k)}$ сосредоточенным нагрузкам X_1, X_3 и q , δ_m^i – символ Кронекера, $C = 0,5772\dots$ – постоянная Эйлера, $\operatorname{si} x$, $\operatorname{ci} x$ – интегральные синус и косинус [7], (r, β) – полярные координаты точки в плоскости $x_1 O x_3$.

Из анализа системы дифференциальных уравнений (1.4) следует, что в пьезокерамической среде могут существовать плоские монохроматические волны двух типов: квазипродольная и квазипоперечная [6]. Скорости этих волн зависят от направления, в котором происходит их распространение. При этом амплитуды перемещений и электрического потенциала, отвечающие волне с волновым числом γ_v , определяются выражениями

$$W_{jv}^0 = \tau_j \exp[-i\gamma_v(\vartheta)(x_1 \cos \vartheta + x_3 \sin \vartheta)] \quad (v = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

$$\gamma_v(\vartheta) = \frac{\omega}{c_v(\vartheta)}, \quad c_v(\vartheta) = \frac{\sqrt{c_{44}}}{\rho_v(\vartheta)\sqrt{\rho}}$$

Здесь ϑ – угол между нормалью к фронту волны и осью x_1 , функции $\rho_v(\vartheta)$ определены в (2.1). Амплитуда потенциала W_{3v}^0 в каждой из акустоэлектрических волн связана с амплитудами перемещений W_{1v}^0 и W_{2v}^0 соотношением

$$\tau_3 = \frac{1/2 \tau_1 (e_{15} + e_{31}) \sin 2\vartheta + \tau_2 (e_{15} \cos^2 \vartheta + e_{33} \sin^2 \vartheta)}{\epsilon_{11} \cos^2 \vartheta + \epsilon_{33} \sin^2 \vartheta} \quad (2.3)$$

3. Суммарные акустоэлектрические поля в пьезосреде с дефектами складываются из полей, вызываемых излучаемыми волнами, и полей, рассеянных полостями. С учетом (2.1) амплитуды перемещений и электрического потенциала, соответствующих

рассеянному полю, представим в виде

$$W_j(z) = \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} p_k(\zeta) g_{kj}(\zeta, z) ds \quad (3.1)$$

$$g_{kj}(\zeta, z) = \frac{\epsilon_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \int_0^\pi \left\{ \sum_{v=1}^2 \lambda_{vj}^{(k)} \Psi(\theta_v^*) + \delta_j^3 \delta_k^3 \lambda_0 \Omega(\theta^*) \right\} \frac{d\alpha}{A(\alpha)}$$

$$\theta_v^* = \gamma \rho_v r^* |\cos(\alpha - \beta^*)|, \quad \theta^* = r^* |\cos(\alpha - \beta^*)|$$

$$r^* = |\zeta - z|, \quad \beta^* = \arg(\zeta - z), \quad z = x_1 + ix_3, \quad \zeta \in \Gamma$$

Здесь $p_k(\zeta)$ – неизвестные плотности, подлежащие определению; ds – элемент дуги контура Γ . Интегральные представления (3.1) обладают необходимой полнотой по отношению к рассматриваемой граничной задаче.

Дифференцируя равенство (3.1), находим

$$\partial_l W_j(z) = \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} p_k(\zeta) G_{kj}^{(l)}(\zeta, z) ds, \quad l = 1, 3 \quad (3.2)$$

$$G_{kj}^{(l)}(\zeta, z) = \frac{\epsilon_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \int_0^\pi \left\{ \sum_{v=1}^2 \lambda_{vj}^{(k)} \Psi^{(l)}(\theta_v^*) + \delta_j^3 \delta_k^3 \lambda_0 \Omega^{(l)}(\theta^*) \right\} \frac{d\alpha}{A(\alpha)}$$

$$\Psi^{(l)}(\theta_v^*) = -\gamma \rho_v n_l H(\theta_v^*) \text{sign} \cos(\alpha - \beta^*), \quad \Omega^{(l)}(\theta^*) = -\frac{n_l}{r^* \cos(\alpha - \beta^*)}$$

$$H(x) = \frac{\pi}{2} e^{ix} + \frac{1}{x} + \cos x \text{si } x - \sin x \text{ci } x$$

С учетом функций (3.2) и материальных уравнений (1.2) можно определить выражения для амплитуд напряжений и компонентов векторов индукции и напряженности электрического поля в любой точке области $z \notin \Gamma$. В случае, когда $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$, при вычислении величин $\partial_l W_j(z)$ необходимо учитывать внеинтегральные члены, возникающие вследствие сингулярного характера ядер $G_{kj}^{(l)}(\zeta, z)$ в точке $z = \zeta$.

Можно показать, что сингулярные слагаемые, фигурирующие в функциях $G_{kj}^{(l)}(\zeta, z)$, отвечают статическому нагружению пьезосреды. В силу (2.1) в результате преобразований находим

$$\partial_l (W_j^{(k)} - W_{j0}^{(k)}) = \frac{\epsilon_k R_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \sum_{v=1}^2 \int_0^\pi \lambda_{vj}^{(k)} \Psi_*^{(l)}(\theta_v) \frac{d\alpha}{A(\alpha)} \quad (3.3)$$

$$\Psi_*^{(l)}(\theta_v) = -\gamma \rho_v n_l h(\theta_v) \text{sign} \cos(\alpha - \beta), \quad h(x) = H(x) - 1/x$$

где $W_{j0}^{(k)}$ – статические значения перемещений и электрического потенциала. Следовательно, функция (3.3) при $z = \zeta$ обращается в нуль, т.е. является регулярной.

Громоздкая процедура аналитического вычисления интегралов, соответствующих статической части производных от фундаментального решения (2.1), приводит к следующему результату:

$$\partial_l W_{j0}^{(k)} = -\frac{\epsilon_k R_k}{2\pi^2 c_{44}^3 r} \int_0^\pi \frac{b_j^{(k)} n_l d\alpha}{A(\alpha) \cos(\alpha - \beta)} = R_k \text{Re} \sum_{v=1}^3 \frac{\omega_{kv} m_{lv} A_{vj}^{(k)}}{z_v - z_{v0}} \quad (3.4)$$

$$A_{v1}^{(1)} = -(c_{44} + c_{33} \mu_v^2)(\epsilon_{11} + \epsilon_{33} \mu_v^2) - (e_{15} + e_{33} \mu_v^2)^2$$

$$A_{v2}^{(1)} = \mu_v [(c_{44} + c_{13})(\epsilon_{11} + \epsilon_{33} \mu_v^2) + (e_{15} + e_{31})(e_{15} + e_{33} \mu_v^2)]$$

$$\begin{aligned}
A_{v3}^{(1)} &= \mu_v [(c_{44} + c_{13})(e_{15} + e_{33}\mu_v^2) - (e_{15} + e_{31})(c_{44} + c_{33}\mu_v^2)] \\
A_{v2}^{(2)} &= -(c_{11} + c_{44}\mu_v^2)(\epsilon_{11} + \epsilon_{33}\mu_v^2) - \mu_v^2(e_{15} + e_{31})^2 \\
A_{v3}^{(2)} &= \mu_v^2(e_{15} + e_{31})(c_{44} + c_{13}) - (e_{15} + e_{33}\mu_v^2)(c_{11} + c_{44}\mu_v^2) \\
A_{v3}^{(3)} &= (c_{11} + c_{44}\mu_v^2)(c_{44} + c_{33}\mu_v^2) - \mu_v^2(c_{31} + c_{44})^2, \quad A_{vi}^{(k)} = A_{vk}^{(i)} \\
m_{1v} &= 1, \quad m_{3v} = \mu_v, \quad z_v = x_1 + \mu_v x_3, \quad z_{v0} = x_{10} + \mu_v x_{30}
\end{aligned}$$

где μ_v ($\text{Im } \mu_v > 0$, $v = 1, 2, 3$) – корни алгебраического уравнения

$$a\mu^6 + b\mu^4 + c\mu^2 + d = 0$$

$$a = -c_{44}c_{33}\epsilon_{33}(1 + k_{33}^2), \quad k_{33}^2 = \frac{e_{33}^2}{c_{33}\epsilon_{33}}, \quad k_{15}^2 = \frac{e_{15}^2}{c_{44}\epsilon_{11}}$$

$$b = c_{44}(2c_{13}\epsilon_{33} - c_{33}\epsilon_{11} + 2e_{31}e_{33}) - c_{11}c_{33}\epsilon_{33}(1 + k_{33}^2) - c_{33}(e_{15} + e_{31})^2 + 2e_{33}c_{13}(e_{15} + e_{31}) + c_{13}^2\epsilon_{33}$$

$$c = c_{44}(2c_{13}\epsilon_{11} - e_{31}^2) + c_{13}^2\epsilon_{11} + 2c_{13}e_{15}(e_{15} + e_{31}) - c_{11}(c_{44}\epsilon_{33} + c_{33}\epsilon_{11} + 2e_{15}e_{33}),$$

$$d = -c_{11}c_{44}\epsilon_{11}(1 + k_{15}^2)$$

Постоянные ω_{kv} определяются из трех вещественных систем линейных алгебраических уравнений

$$\text{Im} \sum_{v=1}^3 d_{vj}^{(k)} \omega_{kv} = f_j^{(k)}, \quad j = 1, 2, \dots, 6; \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

$$d_{v1}^{(k)} = -\gamma_v^{(k)} \mu_v, \quad d_{v2}^{(k)} = \gamma_v^{(k)}, \quad d_{v3}^{(k)} = -r_v^{(k)}, \quad d_{v,i+3}^{(k)} = -A_{vi}^{(k)}$$

$$f_i^{(k)} = \delta_i^k / 2\pi, \quad f_{i+3}^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\gamma_v^{(k)} = c_{13}A_{v1}^{(k)} + (c_{33}A_{v2}^{(k)} + e_{33}A_{v3}^{(k)})\mu_v$$

$$r_v^{(k)} = (\epsilon_{33}A_{v3}^{(k)} - e_{33}A_{v2}^{(k)})\mu_v - e_{31}A_{v1}^{(k)}$$

Таким образом, интегральные представления (3.2) при учете (3.3), (3.4) можно записать в виде

$$\partial_l W_j(z) = \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} p_k(\zeta) F_{kj}^{(l)}(\zeta, z) ds, \quad l = 1, 3 \quad (3.6)$$

$$F_{kj}^{(l)}(\zeta, z) = \text{Re} \sum_{v=1}^3 \frac{\omega_{kv} m_{lv} A_{vj}^{(k)}}{z_v - \zeta_v} + \frac{\epsilon_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \sum_{v=1}^2 \int_0^\pi \lambda_{vj}^{(k)} \Psi_*^{(l)}(\theta_v^*) \frac{d\alpha}{A(\alpha)}$$

Подставляя предельные значения производных (3.6) при $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$ в механические и электрические граничные условия, приходим к системе трех сингулярных интегральных уравнений второго рода относительно функций $p_k(\zeta)$:

$$\frac{1}{2} p_l(\zeta_0) + \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} p_k(\zeta) M_{lk}(\zeta, \zeta_0) ds = N_l(\zeta_0), \quad l = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

$$M_{1k} = T_{11}^{(k)} n_1^* + T_{13}^{(k)} n_3^*, \quad M_{2k} = T_{13}^{(k)} n_1^* + T_{33}^{(k)} n_3^*$$

$$M_{3k} = [e_{15}(F_{0k2}^{(1)} + F_{0k1}^{(3)}) - \epsilon_{11} F_{0k3}^{(1)}] n_1^* + (e_{31} F_{0k1}^{(1)} + e_{33} F_{0k2}^{(3)} - \epsilon_{33} F_{0k3}^{(3)}) n_3^*,$$

$$F_{0kj}^{(l)} = F_{kj}^{(l)}(\zeta, \zeta_0)$$

$$T_{11}^{(k)} = c_{11}F_{0k1}^{(1)} + c_{13}F_{0k2}^{(3)} + e_{31}F_{0k3}^{(3)}$$

$$T_{13}^{(k)} = c_{44}(F_{0k2}^{(1)} + cF_{0k1}^{(3)}) + e_{15}F_{0k3}^{(1)}$$

$$T_{33}^{(k)} = c_{13}F_{0k1}^{(1)} + c_{33}F_{0k2}^{(3)} + e_{33}F_{0k3}^{(3)}$$

$$N_l(\zeta_0) = \sum_{j=1}^2 N_l^{(j)}(\zeta_0), \quad n_1^* = \cos \psi_0, \quad n_3^* = \sin \psi_0$$

$$N_1^{(1)}(\zeta_0) = c_{13} \left(1 + \frac{e_{31}e_{33}}{\epsilon_{33}c_{13}} \right) n_1^* \chi_1, \quad N_2^{(1)}(\zeta_0) = c_{33}(1 + k_{33}^2) n_3^* \chi_1$$

$$N_1^{(2)}(\zeta_0) = c_{44}(1 + k_{15}^2) n_3^* \chi_2, \quad N_2^{(2)}(\zeta_0) = c_{44}(1 + k_{15}^2) n_1^* \chi_2$$

$$\chi_1 = \tau_2 i \gamma_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) \exp \left(-i \gamma_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) \text{Im} \zeta_0 \right), \quad \chi_2 = \tau_2 i \gamma_2(0) \exp(-i \gamma_2(0) \text{Re} \zeta_0)$$

$$\psi_0 = \psi(\zeta_0); \quad \zeta, \zeta_0 \in \Gamma = \cup \Gamma_m, \quad m = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2$$

Правые части уравнений (3.7) $N_l^{(j)}(\zeta_0)$ находились с учетом выражений (2.2), (2.3); они соответствуют двум типам нагружения: плоской квазипродольной волне, распространяющейся в отрицательном направлении оси x_3 ($j = 1$), и плоской квазипоперечной волне, излучаемой в отрицательном направлении оси x_1 ($j = 2$). Третье интегральное уравнение ($l = 3$) в системе (3.7) отвечает электрическому краевому условию (1.5).

4. Для определения динамической концентрации напряжений в пьезокерамической среде с полостями вычислим нормальное напряжение σ_θ на контуре Γ . Принимая во внимание интегральные представления (3.6), находим

$$\sigma_\theta = \text{Re}(T_\theta e^{-i\omega t}), \quad T_\theta(\zeta_0) = T_0 + \sum_{k=1}^3 \left\{ p_k(\zeta_0) t_k(\zeta_0) + \int_{\Gamma} p_k(\zeta) T_\theta^{(k)}(\zeta, \zeta_0) ds \right\}$$

$$t_k(\zeta_0) = -\pi \text{Im} \sum_{v=1}^3 \frac{(\mu_v n_3^* + n_1^*)^2}{\mu_v n_1^* - n_3^*} \omega_{kv} \gamma_v^{(k)} \quad (4.1)$$

$$T_\theta^{(k)} = T_{11}^{(k)}(n_3^*)^2 + T_{33}^{(k)}(n_1^*)^2 - 2T_{13}^{(k)} n_1^* n_3^*$$

$$T_0 = - \left[\left(c_{13} + \frac{e_{31}e_{33}}{\epsilon_{33}} \right) (n_3^*)^2 + c_{33}(1 + k_{33}^2)(n_1^*)^2 \right] \chi_1 + 2c_{44}(1 + k_{15}^2) n_1^* n_3^* \chi_2$$

Фигурирующие здесь величины $T_{ij}^{(k)}$ определены в (3.7).

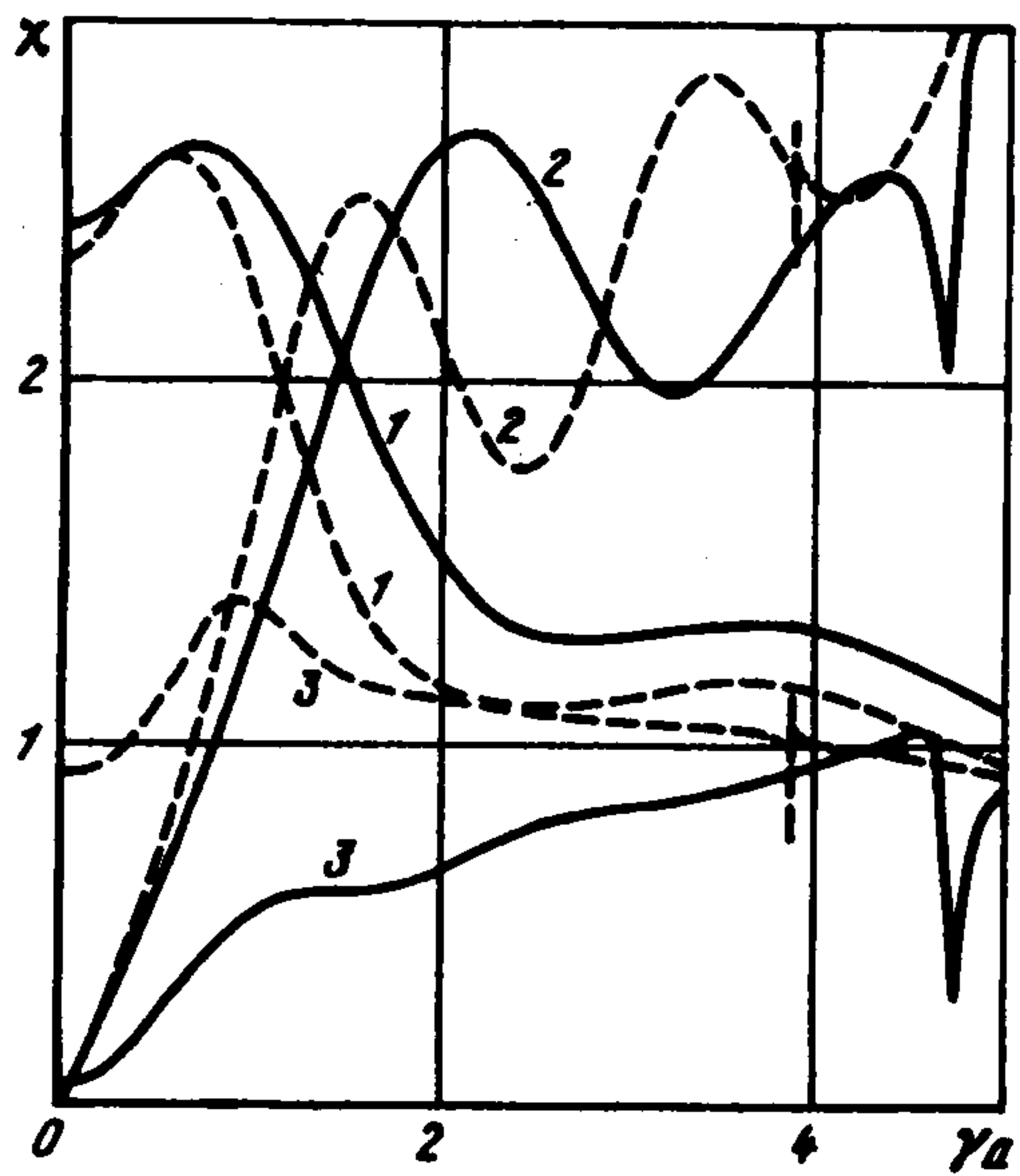
В качестве примера рассмотрим пьезосреду (керамика *PZT-4* [8]), ослабленную полостью кругового или квадратного поперечного сечения с параметрическими уравнениями

$$\text{Re} \zeta = a(\cos \eta + c \cos 3\eta), \quad \text{Im} \zeta = a(\sin \eta - c \sin 3\eta), \quad \eta \in [0, 2\pi] \quad (4.2)$$

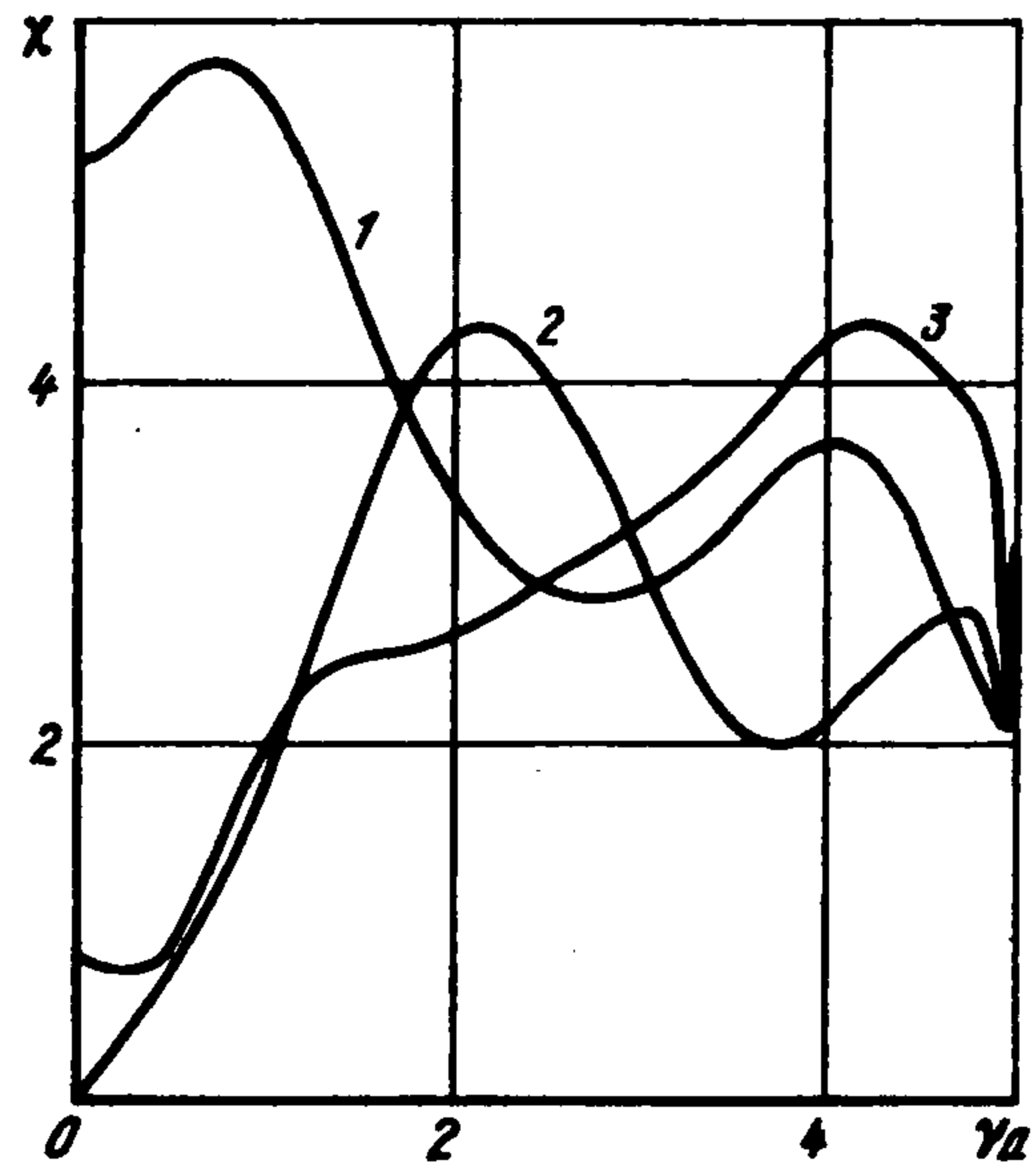
Здесь $c = 0$ для полости кругового сечения, $c = 0,14036$ для полости квадратного сечения.

Функции $p_k(\zeta)$ ($k = 1, 2, 3$) вычисляли из системы (3.7) при учете (4.2) по схеме метода квадратур [9], затем по формуле (4.1) определяли напряжение $T_\theta(\zeta_0)$. Для керамики *PZT-4* имеем μ_k : $\mu_1 = 1,203802i$, $\mu_{2,3} = \pm 0,200427 + 1,069137i$.

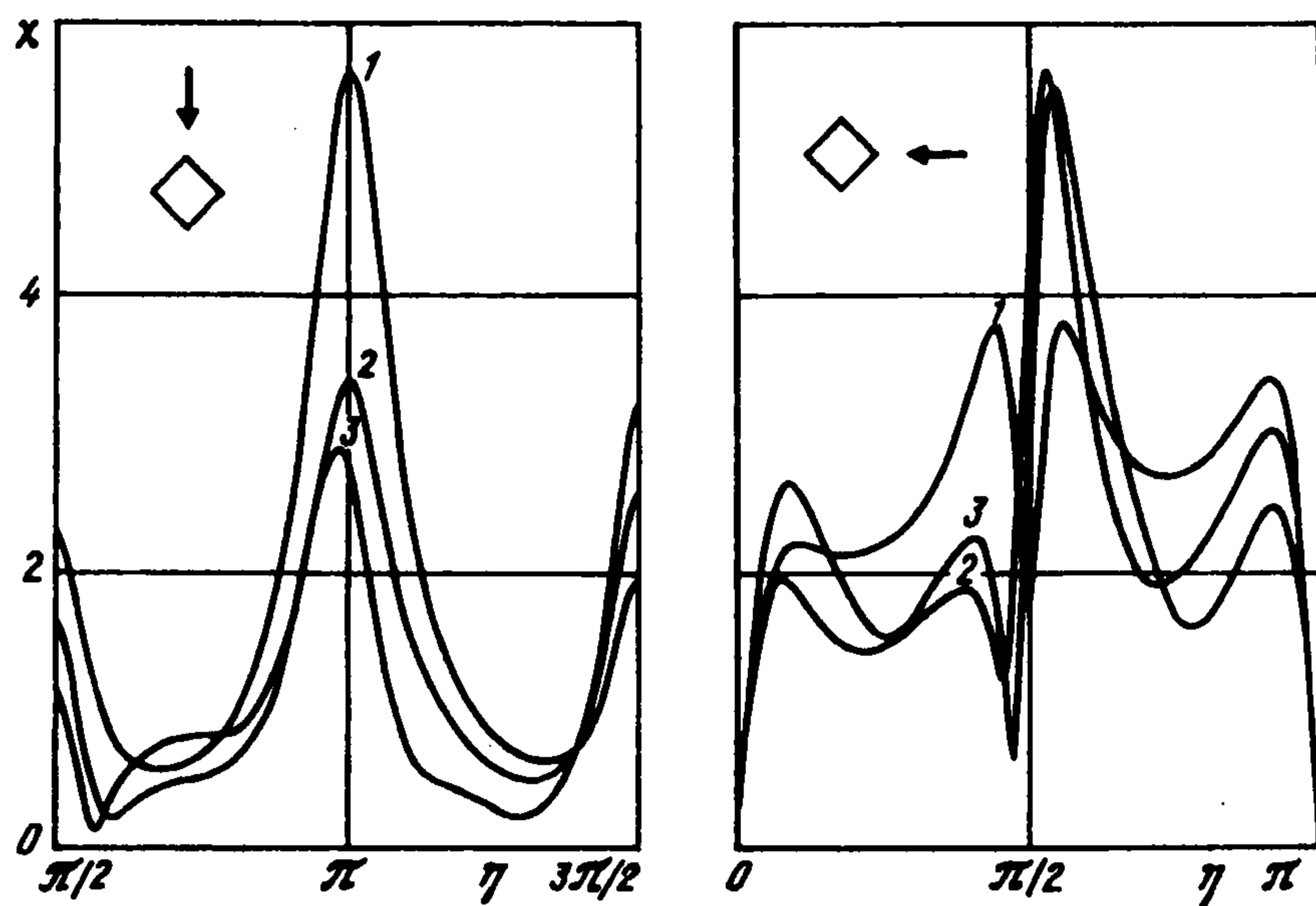
Фиг. 2 иллюстрирует изменение величины $\chi = |T_\theta/\Lambda|$ в точках $\eta = \pi$ (кривая 1) и $\eta = 3\pi/2$ (кривые 2, 3) контура круговой полости в функции нормализованного волнового числа γa при действии квазипродольной (кривые 1, 3) или квазипоперечной (кривая 2) волны. Штри-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ховые линии построены для значений пьезоэлектрических модулей $e_{33} = e_{13} = 0$, $e_{15} = 0,1$ Кл/м², что фактически соответствует пьезопассивному материалу (при всех $e_{ij} = 0$ система (3.5) вырождается). В первом случае нагружения величина $\Lambda = |T_{33}^0| = \tau_2 \gamma \sqrt{c_{44} c_{33} (1 + k_{33}^2)}$ – модуль амплитуды напряжения σ_{33} в квазипродольной волне, во втором случае $\Lambda = |T_{13}^0| = \tau_2 \gamma c_{44} \sqrt{1 + k_{15}^2}$ – модуль амплитуды напряжения σ_{13} в квазипоперечной волне.

Графики изменения величины χ в точках $\eta = 3\pi/2$ и $\eta = 157\pi/158$ контура полости квадратного поперечного сечения приведены на фиг. 3. Линии 1–3 построены в том же соответствии, что и на фиг. 2.

Распределение величины χ на контуре квадратного отверстия при излучении квазипродольной и квазипоперечной волн показано на фиг. 4. Кривая с номером m отвечает значению нормализованного волнового числа $\gamma a = m$.

Из результатов расчета следует, что в процессе динамического возбуждения происходит перераспределение напряжения σ_{θ} на поверхности полости. Влияние инерционного эффекта проявляется в увеличении σ_{θ} в некотором диапазоне изменения круговой частоты по сравнению со своим статическим аналогом. Эффект связанности акустоэлектрических полей, как видно из фиг. 2, можно внести существенный вклад в концентрацию напряжений, что не наблюдается в случае плоской деформации пьезокерамической среды в плоскости, перпендикулярной направлению поляризации материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В.З., Фильштинский М.Л.* Динамическая задача теории упругости для пьезоэлектрической среды с туннельными разрезами // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1989. Т. 42. № 5. С. 17–24.
2. *Фильштинский М.Л.* Нестационарная динамическая задача электроупругости для неограниченной среды с криволинейными туннельными трещинами // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 159–166.
3. *Фильштинский М.Л.* Гармонические колебания пьезоэлектрического полупространства с туннельными полостями (деформация продольного сдвига) // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 4. С. 777–781.
4. *Ватульян А.О., Кубликов В.Л.* О граничных интегральных уравнениях в электроупругости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 1037–1041.
5. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
7. *Люк Ю.Л.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
8. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. Т. 1. Ч. А. С. 204–326.
9. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984. 344 с.

Сумы

Поступила в редакцию
27.VIII.1997