

УДК 539.3

© 1998 г. Д.П. Каргин, Н.В. Курбатова, Ю.А. Устинов

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ И ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ВИНТОВОЙ ПРУЖИНЫ

Исследуется пространственная задача теории упругости для пружины со свободной от напряжений боковой поверхностью. Она была сведена [1] к спектральной задаче на сечении, позволяющей построить полную систему однородных элементарных решений, и выделена группа из 12 элементарных решений, на основе которых построение решения типа Сен-Венана было сведено к двум типам двумерных задач и алгебраической системе уравнений относительно коэффициентов разложения. Дается вариационная постановка этих задач, приводятся результаты асимптотического и численного исследования их решений и матрицы жесткостей.

1. Постановка задачи и однородные решения для пружины. Пружину будем рассматривать как трехмерное упругое тело, которое получается винтовым движением плоской фигуры S , расположенной в плоскости $\phi = \text{const}$ цилиндрической системы координат r, ϕ, z . Обозначим: r_0 – расстояние от оси z до центра тяжести фигуры S , h – шаг пружины, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Введем новую систему координат, связанную с цилиндрической следующими соотношениями:

$$\xi = r - r_0, \quad \xi_2 = z - \xi h_0, \quad \xi_3 = \xi = \phi + 2\pi(m - 1) \quad (1.1)$$

$$\xi_1, \xi_2 \in S, \quad \xi \in [0, \eta], \quad \eta = 2\pi n + \alpha \quad (0 \leq \alpha < 2\pi), \quad h_0 = h / (2\pi), \quad m = 1, \dots, n$$

Здесь n – число витков в сечении $\phi = \text{const}$ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$), переменная ξ определяет сечение пружины, а ξ_1, ξ_2 – точку выбранного сечения, значения $\xi = 0, \xi = \eta$ соответствуют концевым сечениям пружины.

В новой системе координат область, занятая пружиной $V = S \times [0, \eta]$, боковая поверхность $\Gamma = \partial S \times [0, \eta]$, где ∂S – граница S . Проекция внешней единичной нормали \mathbf{N} на орты цилиндрической системы координат связаны с проекциями единичной нормали к S следующими соотношениями:

$$N_r = N_1 = \frac{n_1}{w}, \quad N_z = N_2 = \frac{n_2}{w}, \quad N_\phi = N_3 = -f \frac{n_2}{w}; \quad w = (1 + f^2 n_2^2)^{1/2}, \quad f = h_0 r \quad (1.2)$$

Обратимся теперь к основным соотношениям теории упругости. Если учесть, что

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \partial_1 + \mathbf{e}_2 \partial_2 + \mathbf{e} D, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}, \quad D = \frac{1}{r} (\partial - h_0 \partial_2), \quad \partial = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \alpha = 1, 2$$

то для компонент тензора деформаций получаются выражения

$$e_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \partial_2 u_2, \quad e_{33} = D u_3 + u_1 / r \quad (1.3)$$

$$2e_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1, \quad 2e_{13} = D u_1 + \partial_1 u_3 - u_3 / r, \quad 2e_{23} = D u_2 + \partial_2 u_3$$

Здесь и ниже $e_1 = e_r$, $e_2 = e_z$, $e = e_3 = e_\phi$, где e_r , e_z , e_ϕ – орты цилиндрической системы координат, u_k – компоненты вектора смещений u .

Замечание 1. Основные соотношения, такие как компоненты тензора деформаций, уравнения равновесия в напряжениях и смещениях, можно получить на основе соответствующих выражений в цилиндрической системе координат [2] путем замены оператора $r^{-1}\partial$ на оператор D .

Предметом исследования является следующая задача теории упругости: необходимо найти решение уравнений теории упругости в области V , удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$N_i \sigma_{ij} |_\Gamma = 0 \quad (1.4)$$

$$u_i |_{\xi=0} = 0, \quad \sigma_{3i} |_{\xi=\eta} = p_i \quad (1.5)$$

Здесь и ниже σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, p_i – заданные внешние напряжения, латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, греческие – 1, 2, ведется суммирование по повторяющимся индексам.

Основываясь на граничных условиях (1.4), (1.5), поставленную задачу назовем задачей Сен-Венана для пружины.

Поставленная задача была сведена [1] к операторному уравнению

$$L(\partial)u = \{L(\partial)u, M(\partial)u\} = 0 \quad (1.6)$$

$$L(\partial)u = \partial^2 Cu + \partial Bu + Au, \quad M(\partial)u = (\partial Gu + Eu)|_\Gamma$$

и эквивалентной спектральной задаче

$$L(\gamma)a = 0 \quad (1.7)$$

при условии, что $u = a(\xi_1, \xi_2)e^{i\xi}$.

Соотношения (1.6) символизируют уравнения равновесия и граничные условия на боковой поверхности Γ , A, B, C, G, E – дифференциальные операторы по переменным ξ_1, ξ_2 , конкретный вид которых легко устанавливается на основании замечания 1.

Опираясь на соображение о том, что компоненты вектора твердого смещения пружины представляются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u_1^0 &= C_3 e^{i\xi} + C_4 e^{-i\xi} + C_5 (\xi + h_0^{-1} \xi_2) e^{i\xi} + C_6 (\xi + h_0^{-1} \xi_2) e^{-i\xi} \\ u_2^0 &= C_1 - C_5 h_0^{-1} r e^{i\xi} - C_6 h_0^{-1} r e^{-i\xi} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$u_3^0 = iC_3 e^{i\xi} - iC_4 e^{-i\xi} + iC_5 (\xi + h_0^{-1} \xi_2) e^{i\xi} - iC_6 (\xi + h_0^{-1} \xi_2) e^{-i\xi} + C_2 r / r_0$$

$$C_1 = a_z, \quad C_2 = \omega_z r_0, \quad C_3 = (a_x - ia_y) / 2, \quad C_4 = (a_x + ia_y) / 2$$

$$C_5 = h_0 (\omega_y + i\omega_x) / 2, \quad C_6 = h_0 (\omega_y - i\omega_x) / 2$$

можно сделать вывод, что $\gamma = 0, i, -i$ – собственные значения спектральной задачи (1.7), при этом $\gamma = 0$ соответствует пара собственных векторов

$$a_1 = (0, 1, 0), \quad a_2 = (0, 0, r/r_0)$$

$\gamma = i$ соответствуют собственный и присоединенный векторы

$$a_3 = (1, 0, i), \quad a_5 = r_0^{-1} (\xi_2, -r, i\xi_2)$$

$\gamma = -i$ соответствуют собственный и присоединенный векторы

$$a_4 = a_3^*, \quad a_6 = a_5^*$$

где \mathbf{a}^* – комплексно-сопряженная величина \mathbf{a} . В выражениях (1.8) a_x^0, a_y^0, a_z^0 – компоненты вектора \mathbf{a}^0 поступательного смещения в декартовой системе координат, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – компоненты вектора ω угла малого поворота.

Однако приведенная выше система собственных и присоединенных векторов не исчерпывает корневые подпространства указанных собственных значений. Собственные векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 имеют по одному присоединенному, соответственно $\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8$, которые являются решениями краевых задач

$$A_h \mathbf{a}_7 = 0, \quad E_h \mathbf{a}_7|_{\partial S} = (0, n_2 f, -n_2) \quad (1.9)$$

$$A_h \mathbf{a}_8 = (2, 0, 0), \quad E_h \mathbf{a}_8|_{\partial S} = (-2\theta n_1, -2\theta n_2, 2(1+\theta)fn_2), \quad \theta = \nu / (1-2\nu) \quad (1.10)$$

Собственный вектор \mathbf{a}_3 кроме присоединенного вектора \mathbf{a}_5 имеет еще два присоединенных вектора \mathbf{a}_9 и \mathbf{a}_{11} , которые являются решениями следующих краевых задач:

$$L_h(i)\mathbf{a}_\beta = F_\beta, \quad M_h(i)\mathbf{a}_\beta = \mathbf{f}_\beta \quad (\beta = 9, 11) \quad (1.11)$$

$$F_9 = -(iC_h + B_h)\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{f}_9 = -G_h \mathbf{a}_3, \quad F_{11} = -(iC_h + B_h)\mathbf{a}_9 - 2C_h \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{f}_{11} = -G_h \mathbf{a}_9$$

Собственный вектор \mathbf{a}_4 кроме присоединенного вектора \mathbf{a}_6 имеет еще два присоединенных: $\mathbf{a}_{10} = \mathbf{a}_9^*$ и $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_{11}^*$.

Конкретный вид векторов $F_\beta, \mathbf{f}_\beta$ приведен ранее [1], ниже будет дана вариационная постановка задач (1.9)–(1.11).

Описанная система собственных и присоединенных векторов определяет двенадцать линейно-независимых элементарных решений

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{u}_3 = e^{\xi} \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_3^*, \quad \mathbf{u}_5 = e^{\xi} (\xi \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_5), \quad \mathbf{u}_6 = \mathbf{u}_5^* \\ \mathbf{u}_7 &= \xi \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_7, \quad \mathbf{u}_8 = \xi \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_8, \quad \mathbf{u}_9 = e^{\xi} (\frac{1}{2} \xi^2 \mathbf{a}_3 + \xi \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_9), \quad \mathbf{u}_{10} = \mathbf{u}_9^* \\ \mathbf{u}_{11} &= e^{\xi} (\frac{1}{6} \xi^3 \mathbf{a}_3 + \frac{1}{2} \xi^2 \mathbf{a}_5 + \xi \mathbf{a}_9 + \mathbf{a}_{11}), \quad \mathbf{u}_{12} = \mathbf{u}_{11}^* \end{aligned} \quad (1.12)$$

Остальная часть множества собственных значений Λ_p обладает следующим свойством.

Свойство 1. Среди собственных значений $\gamma_k \in \Lambda_p$ нет чисто мнимых.

Это свойство доказывается с помощью тех же приемов, которые были использованы для доказательства аналогичного свойства для естественно закрученного стержня [3].

Обозначим через $\sigma(\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$ вектор напряжений в сечении $\xi = \text{const}$. Опираясь на теорему о полноте системы элементарных решений [4], решение задачи (1.6) можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_p, \quad \sigma = \sigma_s + \sigma_p \quad (1.13)$$

$$\mathbf{u}_s = \sum_{l=1}^6 [C_l \mathbf{u}_l(\xi) + C_{6+l} \mathbf{u}_{6+l}(\xi - \eta)], \quad \sigma_s = \sum_{l=1}^6 C_{l+6} \sigma_{l+6}(\xi - \eta) \quad (1.14)$$

$$\mathbf{u}_p = \sum_k C_k \mathbf{u}_k(\xi), \quad \sigma_p = \sum_{l=1}^6 C_j \sigma_j(\xi - \eta)$$

где C_l – произвольные постоянные, которые определяются из бесконечных систем, получаемых при удовлетворении граничным условиям (1.5) (метод построения таких систем приведен ранее [4, 5])

$$\sigma_m = 0, \quad m = 1, \dots, 6$$

$$\sigma_7 = \mu \mathbf{b}_1, \quad \sigma_8 = \mu \mathbf{b}_2, \quad \sigma_9 = \mu \mathbf{b}_3 e^{\xi}, \quad \sigma_{10} = \mu \sigma_9^*$$

$$\sigma_{11}(\xi) = \mu(\xi \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_5) e^{\xi}, \quad \sigma_{12}(\xi) = \sigma_{11}^*(\xi)$$

Компоненты векторов b_{km} (первый индекс соответствует проекции, второй – номеру вектора) определяются выражениями

$$\begin{aligned} b_{1m} &= D_m a_{16+m} + \partial_1 a_{36+m} - a_{36+m} / r + b_{1m}^0, \quad b_{2m} = D_m \partial_2 a_{26+m} + \partial_2 a_{36+m} + b_{2m}^0 \\ b_{3m} &= 2[(1+\theta)(D_m a_{36+m} + a_{16+m} / r) + \partial_1 a_{16+m} + \partial_2 a_{26+m}] + b_{3m}^0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$b_{11}^0 = 0, \quad b_{21}^0 = 1/r, \quad b_{31}^0 = 0, \quad b_{12}^0 = 0, \quad b_{22}^0 = 0, \quad b_{32}^0 = 2(1+\theta)/r_0$$

$$b_{13}^0 = b_{14}^0 = \xi_2 / (rr_0), \quad b_{23}^0 = b_{14}^0 = -1/r_0, \quad b_{33}^0 = b_{34}^{0*} = 2(1+\theta)i\xi_2 / (rr_0)$$

$$b_{15}^0 = b_{16}^{0*} = a_{19} / r, \quad b_{25}^0 = b_{26}^{0*} = a_{29} / r, \quad b_{35}^0 = b_{36}^{0*} = 2(1+\theta)a_{39} / r$$

$$D_m = h_0 \partial_2 \quad (m=1,2), \quad D_m = h_0 \partial_2 + i \quad (m=3,5), \quad D_m = h_0 \partial_2 - i \quad (m=4,6)$$

Из обобщенных соотношений ортогональности вытекает

$$(\sigma_k(\xi), \mathbf{a}_l) = 0, \quad l = 1, \dots, 6 \quad (1.16)$$

$$(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \int \mathbf{b}^* \mathbf{a}^* dS = \int b_{jk} a_{jk}^* dS, \quad j = 1, 2, 3$$

Здесь и всюду далее интегрирование ведется по сечению S .

В силу свойства 1 слагаемые \mathbf{u}_p, σ_p определяют пограничный слой в окрестности концов пружины $\xi = 0, \eta$, а в силу соотношений (1.16) соответствующее ему напряженное состояние является самоуравновешенным в любом сечении $\xi = \text{const}$. Поэтому \mathbf{u}_s естественно назвать решением Сен-Венана для пружины. В отличие от цилиндра в данном случае все компоненты тензора напряжений, определяемые по вектору \mathbf{u}_s , отличны от нуля, с чем и связаны основные трудности в применении полуобратного метода.

Вектор σ_s определяет несамоуравновешенную часть напряженного состояния пружины. Действительно, если σ_s последовательно умножать на \mathbf{a}_m^* и проинтегрировать по S , получим следующие соотношения для перерезывающих сил $Q_\beta(\xi)$, нормальной силы $Q_3(\xi)$, изгибающих моментов $M_\beta(\xi)$ и крутящего момента $M_3(\xi)$:

$$d_{11} C_7 + d_{21} C_8 = Q_2, \quad d_{12} C_7 + d_{22} C_8 = Q_3 - M_2 / r_0 \quad (1.17)$$

$$d_{35} C_9 + [d_{35}(\xi - \eta) + d_{55}] C_{11} = r_0^{-1} (iM_1 + M_3 - r_0 Q_2), \quad d_{53} C_{11} = Q_1 - iQ_3$$

$$Q_j = \int \sigma_{j3} dS, \quad M_1 = \int \sigma_{33} \xi_2 dS, \quad M_2 = -\int \sigma_{33} \xi_1 dS, \quad M_3 = \int (\xi_1 \sigma_{23} - \xi_2 \sigma_{31}) dS$$

Если в выражениях (1.17) положить $\xi = \eta$, а в выражениях для Q_j, M_j вместо σ_{j3} подставить их граничные значения p_j , получим уравнения для определения постоянных C_r ($r = 7, 8, 9, 11$) и, кроме того, $C_{10} = C_9^*, C_{12} = C_{11}^*$. При этом элементы матрицы жесткости $d_{1m} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_m)$ с учетом конкретного вида векторов \mathbf{a}_m и некоторых специфических свойств скалярных произведений векторов из жордановых цепочек [4] могут быть вычислены с помощью следующих выражений:

$$d_{11} = \int b_{21} dS, \quad d_{21} = d_{12} = \int d_{22} dS = r_0^{-1} \int b_{31} r dS, \quad d_{22} = \int b_{32} r dS$$

$$d_{35} = -d_{53} = -r_0^{-1} \int (b_{13} \xi_2 - i b_{33} \xi_2 - b_{23} r) dS = \int (b_{13} - i b_{33}) dS = 2 \int b_{13} dS \quad (1.18)$$

$$d_{55} = r_0^{-1} \int (b_{15} \xi_2 - i b_{35} \xi_2 - b_{25} r) dS = -2i r_0^{-1} \int b_{35} \xi_2 dS$$

Все остальные элементы равны нулю.

Замечание 2. Коэффициенты C_{1+6} решения Сен-Венана (1.16) соотношениями (1.17), (1.18) определяются точно. Коэффициенты C_1 могут быть определены точно только из бесконечных систем, приближенно – решением следующей алгебраической системы:

$$d_{11}C_1 + d_{21}C_2 = g_1, \quad d_{12}C_1 + d_{22}C_2 = g_2, \quad d_{35}C_3 + d_{55}^*C_5 = g_3, \quad d_{53}C_5 = g_5$$

$$C_4 = C_3^*, \quad C_6 = C_5^*; \quad g_m = -\sum_{l=1}^6 C_{6+l}(\mathbf{u}_{6+l}(-\eta), \mathbf{b}_m)$$

Центральной проблемой в изложенной выше схеме является построение решений четырех двумерных краевых задач (1.9)–(1.11), которые естественно разбить на две пары (в пределах пары задачи отличаются только видом правых частей). Первая пара – это задачи (1.9), (1.10), решение которых описывает практически наиболее важное напряженно-деформированное состояние пружины: растяжение – сжатие и закручивание относительно ее оси. Это легко усмотреть из соотношений (1.17), если учесть, что $Q_2(\eta) = Q_z$, $r_0Q_3(\eta) - M_2(\eta) = M_z$, где Q_z , M_z – внешние осевая сила и закручивающий момент, соответственно. Вторая пара – это задачи (1.11), решение которых описывает в общем случае сложное напряженно-деформированное состояние, характер которого раскрывается ниже на основе асимптотического анализа этих задач для пружины с относительно тонким прутком и малым шагом.

В случае, когда $Q_r = Q_1(\eta)$, $Q_\phi = Q_3(\eta)$ равны нулю, из соотношений (1.18) следует, что $C_{11} = C_{12} = 0$, а $\operatorname{Re}C_9 = d_*^{-1}M_r$, $\operatorname{Im}C_9 = d_*^{-1}M_r$, $\operatorname{Im}C_9 = d_*^{-1}M_\phi$, где M_r , M_ϕ – радиальная и тангенциальная составляющие момента внешних сил относительно точки оси пружины $z = h_0\eta$, $d_* = -id_{35}$ – действительная величина, что вытекает из общей теории [4]. Эти моменты отличны от нуля, если, например, линия действия силы Q_z не совпадает с осью пружины.

Все краевые задачи (1.9)–(1.11) являются самосопряженными и известными способами [6] могут быть сведены к нахождению минимумов квадратичных функционалов

$$\Psi_m = \int (W_m + l_m) r dS, \quad m = 1, 2, 3, 5 \quad (1.19)$$

$$W_m = \theta |\psi_m|^2 + (|\beta_{11m}|^2 + |\beta_{22m}|^2 + |\beta_{33m}|^2) + 2(|\beta_{12m}|^2 + |\beta_{13m}|^2 + |\beta_{23m}|^2)$$

$$\psi_m = \beta_{11m} + \beta_{22m} + \beta_{33m}$$

Выражения для β_{ijm} получаются из выражений (1.3) для ϵ_{ij} путем замены в них компонент u_i на a_{i6+m} и оператора D на операторы D_m из группы формул (1.15);

$$l_1 = 4\beta_{131}, \quad l_2 = 2(\theta\psi_2 + \beta_{332})r / r_0$$

$$l_3 = (2r[\operatorname{Im}(\theta\psi_3 + \beta_{333}) + 2\operatorname{Re}\beta_{133}]\xi_2 + 4\operatorname{Re}(\xi_2\beta_{133} - r\beta_{233})) / (rr_0^2) \quad (1.20)$$

$$l_5 = 2\operatorname{Re}(\theta\psi_5 a_{39}^* + \beta_{225} a_{39}^* + 2\beta_{135} a_{19}^* + 2\beta_{235} a_{29}^*)$$

Замечание 3. Поскольку однородная задача (1.9) имеет нетривиальные решения \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , а однородная задача (1.11) – \mathbf{a}_3 , то вариационные задачи (1.19) однозначно разрешимы при дополнительных условиях:

при $m = 1, 2$

$$\int (\mathbf{a}_{m+6} * \mathbf{a}_1) dS = \int a_{2m+6} dS = 0, \quad \int (\mathbf{a}_{m+6} * \mathbf{a}_2) dS = \int a_{3m+6} r dS = 0 \quad (1.21)$$

при $m = 3, 5$

$$\int (\mathbf{a}_{m+6} * \mathbf{a}_3^*) dS = \int (a_{1m+6} - ia_{3m+6}) dS = 0 \quad (1.22)$$

2. Асимптотическое решение. Не вдаваясь в детали проведенного анализа, поясним основные идеи подхода и приведем окончательные результаты.

Обозначим через a характерный линейный размер сечения S и введем для пружины следующие безразмерные параметры и координаты:

$$\varepsilon = a / r_0, \quad \beta = h_0 / a, \quad \alpha_1 = \xi_1 / a, \quad \alpha_2 = \xi_2 / a \quad (2.1)$$

Преобразуя уравнения и граничные условия (1.9)–(1.11) с учетом (2.1), получаем краевые задачи с параметром ε . Примем ε за малый параметр и будем считать, что $\beta = O(1)$ относительно ε . Отыскивая решения в виде рядов по малому параметру, получим рекуррентную систему плоских и антиплоских задач теории упругости с различными правыми частями, вид которых зависит от порядка приближения. Для произвольного сечения S аналитические решения удастся построить только в низких приближениях и получить в явном виде только первые члены асимптотических разложений для напряжений и коэффициентов матрицы жесткости. Аналогичные решения можно получить на основе классической теории криволинейных стержней, опирающейся на гипотезу плоских сечений. Основные трудности связаны с построением решений для плоских задач, которые даже для эллиптического и прямоугольного сечений не имеют точных аналитических решений. Применение же численных методов, в частности метода конечных элементов (МКЭ) для их решения вряд ли целесообразно, поскольку по затратам эквивалентно решению исходных задач. В случае, когда S – круг, явные аналитические выражения можно получить в высоких приближениях.

Ниже приводятся асимптотические разложения для коэффициентов матрицы жесткости и напряжений, позволяющие учесть влияние как кривизны (параметр ε), так и шага пружины (параметр β) на напряженно-деформированное состояние. Уточненные формулы, позволяющие учесть влияние кривизны на максимальные касательные напряжения в случае растяжения – сжатия пружины, по-видимому, впервые были получены Тимошенко [7] и затем уточнены [8–10].

Ограничимся практически важным случаем, когда $Q_r = Q_\phi = 0$. Имеем

$$d_{11} = \varepsilon^3 \mu \lambda_{22} B_1, \quad d_{12} = -\varepsilon^4 \mu \lambda_{12} B_1, \quad d_{22} = \varepsilon^3 \mu \lambda_{11} B_2, \quad d_* = -id_{35} = \varepsilon^4 B_3 \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij} = Q^{(1)} \sigma_{ij}^{(1)} + Q^{(2)} \sigma_{ij}^{(2)} + Q^{(3)} (\sigma_{ij}^{(3)} \cos \phi - \sigma_{ij}^{(3)} \sin \phi) + Q^{(4)} (\sigma_{ij}^{(4)} \cos \phi + \sigma_{ij}^{(4)} \sin \phi) \quad (2.3)$$

$$Q^{(1)} = \varepsilon^{-3} Q_z r_0^{-1} a B_1 \Omega, \quad Q^{(2)} = \varepsilon^{-3} M_z r_0^{-2} a B_2 \Omega$$

$$Q^{(3)} = \varepsilon^{-4} M_r r_0^{-2} a B_3, \quad Q^{(4)} = \varepsilon^{-4} M_\phi r_0^{-2} a B_3$$

$$\sigma_{31}^{(1)} = \lambda_{11} f_{31}^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_{12} f_{31}^{(2)}, \quad \sigma_{32}^{(1)} = \lambda_{11} f_{32}^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_{12} f_{32}^{(2)}$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = \varepsilon \lambda_{11} f_{33}^{(1)} + \varepsilon \lambda_{12} f_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = O(\varepsilon^2)$$

$$\sigma_{31}^{(2)} = \varepsilon (\lambda_{21} f_{31}^{(1)} + \lambda_{22} f_{31}^{(2)}), \quad \sigma_{32}^{(2)} = \varepsilon (\lambda_{21} f_{32}^{(1)} + \lambda_{22} f_{32}^{(2)})$$

$$\sigma_{33}^{(2)} = \lambda_{22} f_{33}^{(2)} + \varepsilon^2 \lambda_{21} f_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = O(\varepsilon^2)$$

$$f_{31}^{(1)} = \alpha_2 - \varepsilon 5 \alpha_1 \alpha_2 / 4 + \varepsilon^2 \alpha_1^2 \alpha_2 / 4, \quad f_{31}^{(2)} = \beta (\alpha_2 - \varepsilon \alpha_1 \alpha_2)$$

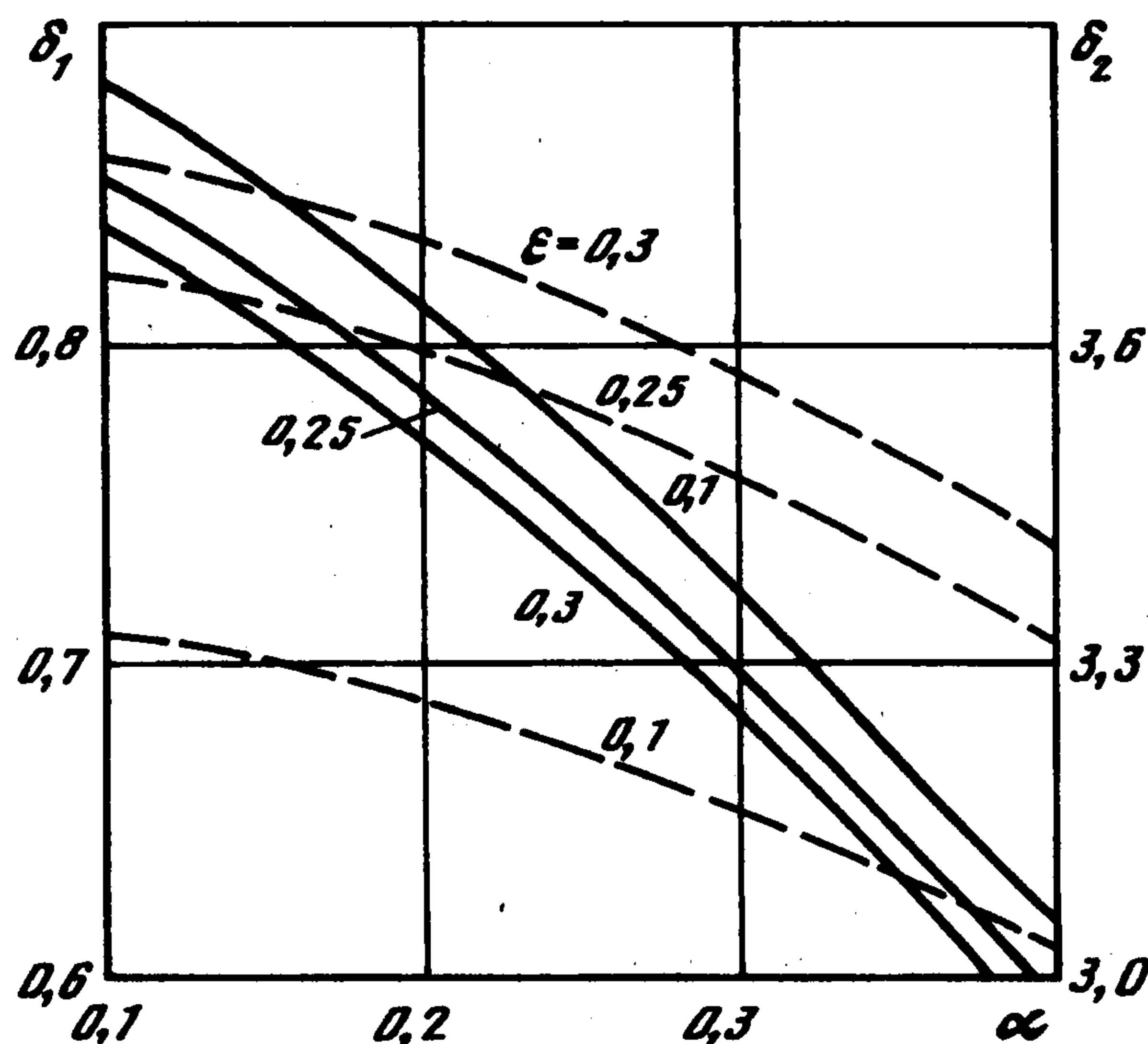
$$f_{32}^{(1)} = -\alpha_1 + \varepsilon (3 + 7 \alpha_1^2 - 3 \alpha_2^2) / 8 + \varepsilon^2 (-3 \alpha_1 + \alpha_1^3 + 3 \alpha_1 \alpha_2^2) / 8$$

$$f_{32}^{(2)} = \beta (1 + 2\nu) \alpha_2, \quad f_{33}^{(1)} = 2\beta \nu (-\alpha_1 + \varepsilon \alpha_1^2)$$

$$f_{33}^{(2)} = 2(1 + \nu) \alpha_1 + \varepsilon [-\alpha_1^2 (4 + 5\nu + 2\nu^2) + 2\nu (3 + 2\nu) \alpha_2^2 - \nu (3 + 2\nu)] / 4 +$$

$$+ \nu \varepsilon^2 [2(1 + 2\nu) \alpha_1^3 - 2(3 + 2\nu) \alpha_1 \alpha_2^2 + (3 + 2\nu) \alpha_1] / 4$$

$$\lambda_{11} = 1 + \varepsilon^2 (8 + 13\nu + 6\nu^2) / [24(1 + \nu)]$$



$$\lambda_{12} = \beta\nu / (1 + \nu), \quad \lambda_{21} = \beta\nu, \quad \lambda_{22} = 1 + (23/48)\epsilon^2, \quad \Omega = \lambda_{11}\lambda_{22} - \epsilon^2\lambda_{12}\lambda_{21}$$

$$\sigma_{31}^{(3)} = \beta^{-1}[2k\alpha_2 + \epsilon(\nu - \nu k + 3k/4)], \quad \sigma_{32}^{(3)} = \beta^{-1}\{-2k\alpha_1 +$$

$$+ \epsilon[(5k + 5k\nu - 6\nu)\alpha_1^2 / 2 + (3k + 2k\nu)\alpha_2^2 / 4 + (2\nu - 3k - 2k\nu) / 4]\}$$

$$\sigma_{33}^{(3)} = \epsilon k \beta^{-1}[4\theta\nu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + 2(1 + 2k + \nu)\alpha_1 - 2(1 + \nu)]$$

$$\sigma_{11}^{(3)} = \epsilon\beta^{-1}[k / (1 + 2\nu) - 4k\theta\alpha_2^2 - 4\nu\alpha_1]$$

$$\sigma_{22}^{(3)} = \epsilon\beta^{-1}[-k / (1 + 2\nu) + 4k\theta\alpha_1^2 - 4\nu\alpha_1 - 4k\beta]$$

$$\sigma_{12}^{(3)} = \epsilon 2(k + 2\nu\beta^{-1})\alpha_2$$

$$\sigma_{31}^{(4)} = O(\epsilon^2), \quad \sigma_{32}^{(4)} = \epsilon 4k\alpha_2, \quad \sigma_{33}^{(4)} = 4\beta^{-1}\alpha_2[k + \epsilon 4(1 + \nu)]$$

$$\sigma_{11}^{(4)} = -\epsilon 4\nu\beta^{-1}\alpha_2, \quad \sigma_{22}^{(4)} = \epsilon 4\beta^{-1}(-4k\theta\alpha_1\alpha_2 + 4\nu\alpha_2)$$

$$\sigma_{12}^{(4)} = \epsilon\beta^{-1}[k(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) / (1 - 2\nu) - 4\nu\alpha_1]$$

$$B_1 = a^{-4}C, \quad B_2 = a^{-4}B_{22}, \quad B_3 = 4a^{-4}\beta^{-1}CB_{11} / (C + B_{11}), \quad k = B_{11} / (C + B_{11}) \quad (2.4)$$

$$B_{\alpha\alpha} = 2(1 + \nu) \int \xi_{\alpha}^2 dS$$

В формулах (2.4) μC – жесткость на кручение призматического стержня с поперечным сечением S .

Выражения в форме (2.2), (2.3) в главных членах асимптотических разложений применимы для пружины с произвольным сечением прутка.

В случае, когда область S – круг радиуса a , выражения для B_j, k имеют простой вид

$$B_1 = \pi/2, \quad B_2 = \pi(1 + \nu)/2, \quad B_3 = \pi k, \quad k = (1 + \nu)/(2 + \nu)$$

Однако если кругом является поперечное сечение, ортогональное оси прутка пружины (что более соответствует действительности), то область S будет эллипсом с полуосями $a_1 = a, a_2 = a(1 + \epsilon^2\beta^2)^{1/2}$ (это вытекает из простых геометрических соображений: $a_2 = a/\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = h/(2\pi r_0) = \epsilon\beta$) и следует обратиться к формулам (2.4), положив в них

$$C = \pi a^4 (1 + \epsilon^2\beta^2)^{3/2} / (2 + \epsilon^2\beta^2) \quad (2.5)$$

$$B_{11} = \pi(1 + \nu)(1 + \epsilon^2\beta^2)^{1/2} / 2, \quad B_{22} = \pi(1 + \nu)(1 + \epsilon^2\beta^2)^{3/2} / 2$$

Таблица 1

ε	d_{11}		d_{22}		k_p
	МКЭ	АФ	МКЭ	АФ	
0,01	1,425	1,400	2,664	2,759	10^{-5}
0,03	1,282	1,260	2,396	2,473	10^{-4}
0,05	3,562	3,500	6,653	6,897	10^{-4}
0,07	6,984	6,860	13,030	13,842	10^{-4}
0,09	1,154	1,134	2,152	2,234	10^{-3}
0,1	1,425	1,400	2,655	2,759	10^{-3}
0,3	1,289	1,260	2,362	2,473	10^{-2}
0,5	3,617	3,500	6,453	6,897	10^{-2}
0,7	7,208	6,860	1,238	1,384	10^{-1}
0,9	1,221	1,400	1,990	2,234	10^{-1}

Таблица 2

ε	α	a_2/a_1	d_{11}	d_{21}	d_{22}
0,5	$\pi/15$	1,0	0,03514	-0,002879	0,0612
0,5	$\pi/10$	1,08	0,03368	-0,004074	0,0566
0,5	$\pi/4$	1,4	0,03812	-0,000461	0,3736
0,9	$\pi/15$	1,0	11,97	-0,009543	19,28
0,9	$\pi/10$	1,08	11,40	-0,013787	17,83
0,9	$\pi/4$	1,4	11,86	-0,003426	11,90

В этом случае погрешность вычислений основных напряжений, вызванных силой Q_z и моментом M_z , по приведенным выше формулам будут иметь асимптотическую погрешность $O(\varepsilon^3)$.

Приведем еще уточненные формулы для наиболее практически важных характеристик пружины [7, 11], а именно для ее осадки $\Delta = u_2(\eta)$ и максимальных касательных напряжений τ_{\max} , вызванных осевой силой. Имеем с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^3)$

$$\Delta = \frac{nQ_z}{\mu r_0 \varepsilon^2} \delta_1(\varepsilon, \alpha), \quad \tau_{\max} = \frac{Q_z}{\pi a^2 \varepsilon^2} \delta_2(\varepsilon, \alpha) \quad (2.6)$$

$$\delta_1(\varepsilon, \alpha) = X(\lambda_{11} - \varepsilon \lambda_{12}), \quad \delta_2(\varepsilon, \alpha) = X \lambda_{11} (1 + \frac{5}{4} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2)$$

$$X = \Omega^{-1} (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-3/2}$$

3. Результаты численного анализа. Для пружины с эллиптическим и прямоугольным сечением была проведена серия расчетов. В случае эллиптического сечения на основе формул (2.6) анализировалось поведение осадки пружины и максимальных касательных напряжений в зависимости от параметров ε и α . Результаты приведены на фигуре в виде зависимости $\delta_1(\varepsilon, \alpha)$ (штриховые линии) и $\delta_2(\varepsilon, \alpha)$ (сплошные линии).

В случае прямоугольного сечения расчеты проводились на основе МКЭ. В качестве конечного элемента выбирался прямоугольник с четырьмя узловыми точками и решения задач растяжения и кручения пружины (1.19), (1.21) строились как линейные комбинации неизвестных узловых перемещений и билинейных базисных функций.

Схема получения системы алгебраических уравнений из вариационного уравнения, являющегося следствием (1.19), для всей конечно элементной сетки, стандартная [12]. Однако специфика рассматриваемых задач ($\gamma = 0$ – собственное значение) такова, что полученная система вырождена, при этом ранг системы порядка n равен $n-2$. Произвол в решении такой

системы устраняется с помощью двух дополнительных условий (1.21), при этом необходимо учитывать, что матрица теряет ленточность и симметрию.

Рассматриваемые задачи иллюстрируются численными расчетами (МКЭ) и с помощью асимптотических формул (АФ), что позволяет обозначить границы применения асимптотики. В табл. 1 представлены жесткости d_{ij} , посчитанные с точностью до множителя μr_0 и порядков k_p при постоянном значении $\beta = 0,15916$ для квадратного сечения.

В соответствии с представленными результатами расхождение численных и асимптотических данных для d_{11} при $\epsilon < 0,09$ не превышает двух процентов, для d_{22} – пяти. Асимптотические формулы дают погрешность более 10% при $\epsilon \geq 0,5$.

Таблица 2 иллюстрирует зависимость жесткостей от плотности витков, причем ϵ фиксируется в интервале, недоступном для асимптотики. Плотность витков характеризуется $\operatorname{tg}\alpha$, ее изменение для $\alpha \neq 0$ приводит к рассмотрению прямоугольника в качестве сечения, а не квадрата.

Анализ сходимости данных в зависимости от разбиения обусловил выбор конкретных разбиений 8×14 и 8×8 для прямоугольника и квадрата соответственно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00-464).

ЛИТЕРАТУРА

1. Устинов Ю.А. Задача Сен-Венана для пружины // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 5. С. 621–623.
2. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
3. Друзь А.Н., Поляков Н.А., Устинов Ю.А. Однородные решения и задачи Сен-Венана для естественно закрученного стержня // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 660–668.
4. Гетман И.П., Устинов Ю.А. Математическая теория твердых нерегулярных волноводов. Ростов-нД.: Изд-во Рост. ун-та, 1993. 144 с.
5. Друзь А.Н., Устинов Ю.А. Тензор Грина для упругого цилиндра и приложения его к развитию теории Сен-Венана // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 102–110.
6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
7. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 1. М.: (Физматгиз), 1960. 379 с.
8. Ancker C.J., Goodier J.N. Pitch and curvature corrections for the helical springs // J. Appl. Mech. 1958. V. 25. № 4. P. 466–470.
9. Ancker C.J., Goodier J.N. Theory of pitch and curvature corrections for the helical springs-I (tension) // J. Appl. Mech. 1958. V. 25. № 4. P. 471–483.
10. Ancker C.J., Goodier J.N. Theory of pitch and curvature corrections for the helical springs-II (torsion) // J. Appl. Mech. 1958. V. 25. № 4. P. 484–495.
11. Орлов П.И. Основы конструирования. Кн. 2. М.: Машиностроение, 1988. 542 с.
12. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.