УДК 539.3

© 1998 г. С.А. Амбарцумян

ТЕОРИЯ ВЕСЬМА ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК, ОСНОВАННАЯ НА НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предлагается метод сведения трехмерной задачи несимметричной теории упругости к двумерной задаче теории оболочек.

Предлагаемая приближенная теория основана на исходных положениях уточненной теории оболочек [1–3] и общей несимметричной теории упругости [4–6]. Она применима не только для расчета весьма пологих оболочек [3], но и для исследования оболочек с большим показателем изменяемости, построения простого краевого эффекта, рассмотрения задач локальной устойчивости и т.д.

Эта теория может представить интерес при рассмотрении оболочек, изготовленных из поликристаллических материалов, высоких полимеров, зернистых композиционных материалов и т.д. Результаты могут быть использованы при исследовании микрооболочек и пластин встречающихся в системах микромолекулярной механики.

1. Рассмотрим оболочку постоянной толщины h в ортогональной криволинейной системе координат α_i. Срединная поверхность оболочки совпадает с координатной поверхностью $\alpha_1\alpha_2$. Координатная линия α_3 – прямолинейная. Координатные линии α_1 и α_2 совпадают с линиями кривизны срединной поверхности. Для главных кривизн срединной поверхности и для коэффициента первой квадратной формы срединной поверхности имеем соответственно $k_i = k_i(\alpha_1, \alpha_2)$ и $A_i = A_i(\alpha_1, \alpha_2)$, однако считаем, что они при дифференцировании ведут себя как постоянные [1–3]. Система координат выбрана так, что выполняется сильное неравенство $AB/R_1R_2 \ll 1$ (R_i – главные радиусы кривизны срединной поверхности) [3]. Предполагается, что оболочка загружена лишь поверхностными нормально приложенными силами с интенсивностями Z^+ (при $\alpha_3 = h/2$) и Z^- (при $\alpha_3 = -h/2$).

В основе предлагаемой теории лежат следующие гипотезы [1–3].

1°. Нормальное к срединной поверхности оболочки перемещение u_3 и повороты относительно нормальных линий α_3 – ω_3 не зависят от координаты α_3 [1–3], т.е.

$$u_3 = w(\alpha_1,\alpha_2), \quad \omega_3 = \psi_3(\alpha_1,\alpha_2) \tag{1.1}$$

где w – искомое нормальное перемещение срединной поверхности, ψ_3 – искомый поворот относительно координат α_3.

2°. Касательные напряжения σ_{31} и σ_{32} по толщине оболочки меняются по заданному закону [1, 2], т.е.

$$\sigma_{3n} = f(\alpha_3)\varphi_n(\alpha_1,\alpha_2) \qquad n = 1,2 \tag{1.2}$$

где φ_n – искомые функции, $f = (h^2/4 - \alpha_3^2)/2$ – заданная функция, обеспечивающая удовлетворение условиям на поверхностях $\alpha_3 = \pm h/2$ для напряжений σ_{3n}.

3°. Повороты ω_1 и ω_2 имеют структуру поворотов, определяемых по уточненной теории весьма пологих оболочек [1, 2], т.е.

$$\omega_1 = w_{,2} - f(\alpha_3)\psi_2, \quad \omega_2 = -w_{,1} + f(\alpha_3)\psi_2 \tag{1.3}$$

где $\psi_n(\alpha_1, \alpha_2)$ – искомые функции.

4°. Нормальными напряжениями σ_{33} можно пренебрегать по сравнению с напряжениями σ_{11} и σ_{22}. Напряжение σ_{33} можно определить из уравнения равновесия.

Не ограничивая общность рассуждений, считаем, что $A_i = 1$ и для коэффициентов Ламе имеем $H_1 = 1 + k_1\alpha_3$, $H_2 = 1 + k_2\alpha_3$, $H_3 = 1$.

Для краткости записи формул используем обозначения:

$$\dot{f}_k = \frac{\partial f_k}{\partial t}, \quad f_{k,l} = \frac{\partial f_k}{\partial \alpha_i}, \quad f_{k,ij} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \quad \text{и т. д.}$$

2. В выбранной системе координат для силовых σ_{ji} и моментных μ_{ji} напряжений имеем [5–7]

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij} \quad (ML^{-1}T^{-2}) \tag{2.1}$$

$$\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ij} + \beta\chi_{kk}\delta_{ij} \quad (MT^{-2})$$

Для тензора деформаций и тензора изгиба–кручения известны представления (суммирование по k)

$$\gamma_{ji} = \frac{1}{H_j}u_{i,j} - \frac{u_j}{H_j H_i}H_{j,i} + \delta_{ji}\frac{u_k}{H_j H_k}H_{j,k} - \epsilon_{jik}\,\omega_k$$

$$\chi_{ji} = \frac{1}{H_j}\omega_{i,j} - \frac{\omega_j}{H_j H_i}H_{j,i} + \delta_{ji}\frac{\omega_k}{H_j H_i}H_{j,k} \tag{2.2}$$

$\mu = E/[2(1 + \nu)]$, $\lambda = \nu E/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$ – постоянные Ламе; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; α, γ, ε, β – новые упругие постоянные (μ, λ, E, α – $ML^{-1}T^{-2}$; γ, ε, β – MLT^{-2}); u_i – компоненты перемещения произвольной точки оболочки; δ_{ji} – символ Кронекера; ϵ_{jik} – тензор Леви-Чевиты.

Уравнения движения запишутся следующим образом:

$$(H_2\sigma_{11})_{,1} + (H_1\sigma_{21})_{,2} + (H_1H_2\sigma_{31})_{,3} + H_{1,2}\sigma_{12} + H_2H_{1,3}\sigma_{13} - H_{2,1}\sigma_{22} + H_1H_2X_1 = \rho H_1H_2\ddot{u}_1$$

$$(H_1\sigma_{22})_{,2} + (H_1H_2\sigma_{32})_{,3} + (H_2\sigma_{12})_{,1} + H_{2,1}\sigma_{21} +$$

$$+ H_1H_{2,3}\sigma_{23} - H_{1,2}\sigma_{11} + H_1H_2X_2 = \rho H_1H_2\ddot{u}_2 \tag{2.3}$$

$$(H_1H_2\sigma_{33})_{,3} + (H_2\sigma_{13})_{,1} + (H_1\sigma_{23})_{,2} - H_1H_{2,3}\sigma_{22} - H_2H_{1,3}\sigma_{11} + H_1H_2X_3 = rH_1H_2\ddot{u}_3$$

Имеем также

$$(H_2\mu_{11})_{,1} + (H_1\mu_{21})_{,2} + (H_1H_2\mu_{31})_{,3} + H_{1,2}\mu_{12} + H_2H_{1,3}\mu_{13} - H_{2,1}\mu_{22} +$$

$$+ H_1H_2Y_1 + H_1H_2(\sigma_{23} - \sigma_{32}) = JH_1H_2\ddot{\omega}_1$$

$$(H_1\mu_{22})_{,2} + (H_1H_2\mu_{32})_{,3} + (H_2\mu_{12})_{,1} + H_{2,1}\mu_{21} + H_1H_{2,3}\mu_{23} - H_{1,2}\mu_{11} +$$

$$+ H_1H_2Y_2 + H_1H_2(\sigma_{31} - \sigma_{32}) = JH_1H_2\ddot{\omega}_2 \tag{2.4}$$

$$(H_1H_2\mu_{33})_{,3} + (H_2\mu_{13})_{,1} + (H_1\mu_{23})_{,2} - H_1H_{2,3}\mu_{22} - H_2H_{1,3}\mu_{11} +$$

$$+ H_1H_2Y_3 + H_1H_2(\sigma_{12} - \sigma_{21}) = JH_1H_2\ddot{\omega}_3$$

Здесь X_i, Y_i – составляющие массовых сил и моментов соответственно; ρ – плотность (ML^{-3}); J – динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении (ML^{-1}).

Уравнения записаны без учета принятых выше гипотез и предположений. Они достаточно общие и, по-видимому, в других публикациях по теории оболочек не приводились. Конечно, они существенно упрощаются в случае весьма пологих оболочек.

3. С точностью теории весьма пологих оболочек [1–3], принятых гипотез и предположений, из (2.2) согласно (1.1), (1.3) получим

$$\gamma_{33} = u_{3,3} \approx 0, \quad u_3 = w(\alpha_1, \alpha_2) \tag{3.1}$$

$$\gamma_{3n} = u_{n,3} + w_{,n} - f(\alpha_3)\psi_n, \quad \gamma_{n3} = -k_n u_n + f(\alpha_3)\psi_n, \quad n = 1,2 \tag{3.2}$$

Подставляя в (2.1) значения напряжений σ_{3n} из (1.2), а также соответствующие деформации из (3.2), получим уравнения, разрешая которые относительно u_i, полагая при этом, что $u_1 = u(\alpha_1, \alpha_2)$, $u_2 = \mathrm{v}(\alpha_1, \alpha_2)$ при $\alpha_3 = 0$, получим

$$u_n = u(v) - \alpha_3 w_{,n} + \frac{I_0}{\mu+\alpha}(\varphi_n + 2\alpha\psi_n), \quad n = 1,2 \tag{3.3}$$

$$I_0 = \int_0^{\alpha_3} f(\alpha_3)d\alpha_3 = \frac{\alpha_3}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\alpha_3^2}{3}\right) \tag{3.4}$$

Таким образом, благодаря принятым гипотезам, перемещения произвольной точки оболочки (3.1), (3.3) представляются с помощью семи искомых "двумерных" функций u, v, w, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 (аргументами служат α_1, α_2). Окончательно к этим функциям присоединяется еще одна искомая "двумерная" функция $\psi_3(\alpha_1, \alpha_2)$ представляющая повороты ω_3.

Теперь по существу при помощи представлений (1.1), (3.1), (3.3) трехмерная задача несимметричной теории упругости может быть приведена к двумерной задаче теории оболочек.

Подставляя в (2.1) значения γ_{ji} и χ_{ji} с учетом (1.1), (1.3), (3.1) и (3.3) для напряжений (наряду с (1.2)) получим (невыписанные соотношения получаются указанной в скобках круговой заменой символов)

$$\sigma_{11} = B\Big\{u_{,1} + k_1 w + \mathrm{v}(v_{,2} + k_2 w) - \alpha_3(w_{,11} + \mathrm{v}w_{,22}) + \\ + \frac{I_0 B}{\mu+\alpha}[\varphi_{1,1} + \mathrm{v}\varphi_{2,2} + 2\alpha(\psi_{1,1} + \mathrm{v}\psi_{2,2})]\Big\} \tag{3.5}$$

$$(1 \leftrightarrow 2, u \leftrightarrow \mathrm{v}), \quad B = E/(1-\mathrm{v}^2), \quad B_{12} = \mathrm{v}E/(1-\mathrm{v}^2)$$

$$\sigma_{12} = (\mu+\alpha)\mathrm{v}_{,1} + (\mu-\alpha)u_{,2} - \alpha_3 2\mu w_{,12} - 2\alpha\psi_3 + I_0 \times \\ \times\left[\varphi_{2,1} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_{1,2} + 2\alpha\left(\psi_{2,1} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\psi_{1,2}\right)\right] \quad (1 \leftrightarrow 2, \ u \leftrightarrow \mathrm{v}, \ \psi_3 \leftrightarrow -\psi_3) \tag{3.6}$$

$$\sigma_{,3} = -k_n(\mu+\alpha)u + k_n(\mu+\alpha)\alpha_3 w_{,n} + 2f(\alpha_{,3})\alpha\psi_n + \\ +\left[f(\alpha_3)\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha} - k_n I_0\right](\varphi_n + 2\alpha\psi_n) \quad (n = 1,2; \ u \leftrightarrow \mathrm{v}) \tag{3.7}$$

Имеем также

$$\mu_{11} = 2\gamma w_{,12} - f(\alpha_3)[(2\gamma+\beta)\psi_{2,1} - \beta\psi_{1,2}] + [2\gamma k_1 + \beta(k_1 + k_2)]\psi_3 \tag{3.8}$$

$$(1 \leftrightarrow 2, \ w \leftrightarrow -w, \ f \leftrightarrow -f)$$

$$\mu_{12} = -(\gamma+\varepsilon)w_{,11} + (\gamma-\varepsilon)w_{,22} + f(\alpha_3)[(\gamma+\varepsilon)\psi_{1,1} - (\gamma-\varepsilon)\psi_{2,2}] \tag{3.9}$$

$$(1 \leftrightarrow 2,\ w \leftrightarrow -w,\ f \leftrightarrow -f)$$

$$\mu_{13} = (\gamma + \varepsilon)(\psi_{3,1} - k_1 w_{,2}) + [k_1 f(\alpha_3)(\gamma + \varepsilon) + \alpha_3(\gamma - \varepsilon)]\psi_2 \tag{3.10}$$

$$\mu_{23} = (\gamma + \varepsilon)(\omega_{3,2} + k_2 w_{,1}) - [k_2 f(\alpha_3)(\gamma + \varepsilon) + \alpha_3(\gamma - \varepsilon)]\psi_1$$

Моментные напряжения μ_{33}, μ_{3i}, которые в тонких оболочках достаточно малы по сравнению с напряжениями μ_{ii}, μ_{ik}, при необходимости могут быть определены из уравнений движения (2.4) с учетом поверхностных условий $\mu_{33} = \mu_{31} = \mu_{32} = 0$ при $\alpha_3 = \pm h/2$.

Напряжения (3.5)–(3.10) в поперечных сечениях оболочки вызывают внутренние усилия и моменты, которые на единице длины срединной поверхности оболочки, с точностью принятой в теории весьма пологих оболочек [1–3], запишутся следующим образом:

тангенциальные и перерезывающие усилия от силовых напряжений

$$T_{11} = Bh[u_{,1} + k_1 w + \nu(v_{,2} + k_2 w)] \quad (1 \leftrightarrow 2,\ u \leftrightarrow v)$$

$$S_{12} = h[(\mu + \alpha)v_{,1} + (\mu - \alpha)u_{,1} - 2\alpha\psi_3] \quad (1 \leftrightarrow 2,\ u \leftrightarrow v,\ \psi_3 \leftrightarrow -\psi_3) \tag{3.11}$$

$$N_{n3} = -k_n(\mu + \alpha)hu + \frac{h^3}{12}\left(\frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha}\varphi_n + \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha}\psi_n\right) \quad (n = 1, 2;\ u \leftrightarrow v)$$

изгибающие и крутящие моменты от силовых напряжений

$$M_{11} = -\frac{Bh^3}{12}(w_{,11} + \nu w_{,22}) + \frac{Bh^5}{120(\mu + \alpha)}[\varphi_{1,1} + \nu\varphi_{2,2} + 2\alpha(\psi_{1,1} + \nu\psi_{2,2})] \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$H_{12} = -2\mu\frac{h^3}{12}w_{,12} + \frac{h^5}{120}\left[\varphi_{2,1} + \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha}\varphi_{1,2} + 2\alpha\left(\psi_{2,1} + \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha}\psi_{1,2}\right)\right] \quad (1 \leftrightarrow 2) \tag{3.12}$$

суммарные крутящие и изгибающие моменты от моментных напряжений

$$P_{11} = 2\gamma h w_{,12} - \frac{h^3}{12}[(2\gamma + \beta)\psi_{2,1} - \beta\psi_{1,2}] \quad (1 \leftrightarrow 2,\ w \leftrightarrow -w,\ h \leftrightarrow -h)$$

$$R_{12} = h[(\gamma - \varepsilon)w_{,22} - (\gamma + \varepsilon)w_{,11}] + \frac{h^3}{12}[(\gamma + \varepsilon)\psi_{1,1} - (\gamma - \varepsilon)\psi_{2,2}] \quad (1 \leftrightarrow 2,\ h \leftrightarrow -h) \tag{3.13}$$

$$Q_{13} = k_1(\gamma + \varepsilon)\left[\frac{h^3}{12}\psi_2 - hw_{,2}\right] + (\gamma + \varepsilon)h\psi_{3,1} \quad (1 \leftrightarrow 2,\ h \leftrightarrow -h,\ \psi_3 \leftrightarrow -\psi_3)$$

4. Осредняя уравнения движения (2.3), (2.4) по толщине оболочки с учетом (1.1)–(1.3), (3.4)–(3.13) и условий на поверхностях $\alpha_3 = \pm h/2$, с точностью, принятой в теории весьма пологих оболочек [1–3], получим следующие уравнения движения в усилиях и моментах:

$$T_{11,1} + S_{21,2} + k_1 N_{13} = \rho h\ddot{u} \quad (1 \leftrightarrow 2,\ u \leftrightarrow v)$$

$$N_{13,1} + N_{23,2} - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} = -(Z^+ + Z^-) + \rho h\ddot{w} \tag{4.1}$$

$$M_{11,1} + H_{21,2} - \frac{h^3}{12}\varphi_1 - k_1^2\frac{h^5}{120}2\alpha\psi_1 = -\rho\frac{h^3}{12}\ddot{w}_{,1} + \frac{\rho h^5}{120(\mu + \alpha)}(\ddot{\varphi}_1 + 2\alpha\ddot{\psi}_1) \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

а также

$$P_{11,1} + R_{21,2} + k_1 Q_{13} + N_{23} - \frac{h^3}{12}\varphi_2 = Jh\ddot{w}_{,2} - J\frac{h^3}{12}\ddot{\psi}_2 \quad (1 \leftrightarrow 2,\ h \leftrightarrow -h,\ N_{23} \leftrightarrow -N_{13})$$

$$Q_{13,1}+Q_{23,2}-k_1P_{11}-k_2P_{22}+S_{12}-S_{21}=Jh\ddot{\psi}_3 \tag{4.2}$$

Подставляя в (4.1), (4.2) значения внутренних усилий и моментов, получим полную систему восьми дифференциальных уравнений относительно восьми искомых функций u, v, w, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2, ψ_3:

$$Bu_{,11}+(\mu+\alpha)u_{,22}+(B_{12}+\mu-\alpha)v_{,12}+B(k_1+\nu k_2)w_{,1}+$$

$$+k_1\frac{h^2}{12}\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1\right)+2\alpha\psi_{3,2}=\rho\ddot{u}\ \ (1\leftrightarrow 2,\ \ u\leftrightarrow v,\ \ \psi_3\leftrightarrow -\psi_3) \tag{4.3}$$

$$[k_1(B+\mu+\alpha)+k_2B_{12}]u_{,1}+[k_1(B+\mu+\alpha)+k_1B_{12}]v_{,2}+$$

$$+(k_1^2B+2k_1k_2B_{12}+k_2^2B)w-\frac{h^2}{12}\left[\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}(\varphi_{1,1}+\varphi_{2,2})+\right.$$

$$\left.+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}(\psi_{1,1}+\psi_{2,2})\right]=\frac{Z}{h}-\rho\ddot{w},\quad Z=Z^{+}+Z^{-} \tag{4.4}$$

$$Bw_{,111}+Bw_{,122}-\frac{h^2}{10}\left[\frac{B}{\mu+\alpha}\varphi_{1,11}+\varphi_{1,22}+\frac{B_{12}+\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_{2,12}+\right.$$

$$\left.+2\alpha\left(\frac{B}{\mu+\alpha}\psi_{1,11}+\psi_{1,22}+\frac{B_{12}+\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\psi_{2,12}\right)\right]+\varphi_1+k_1^2\frac{h^2}{10}2\alpha\psi_1=$$

$$=\rho\ddot{w}_{,1}-\frac{\rho h^2}{10(\mu+\alpha)}(\ddot{\varphi}_1+2\alpha\ddot{\psi}_1)\ \ (1\leftrightarrow 2) \tag{4.5}$$

$$(\gamma+\varepsilon)(w_{,111}+w_{,122})-\frac{h^2}{12}[(\gamma+\varepsilon)\psi_{1,11}+(2\gamma+\beta)\omega_{1,22}-(\gamma-\varepsilon+\beta)\psi_{2,12}]-$$

$$-[k_2(3\gamma+\varepsilon)+(k_1+k_2)\beta]\psi_{3,2}-\frac{h^2}{12}\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}(\varphi_1-2\alpha\psi_1)-k_1(\mu+\alpha)u+$$

$$+k_2^2\frac{h^2}{12}(\gamma+\varepsilon)\psi_1=J\ddot{w}_{,1}-J\frac{h^3}{12}\ddot{\psi}_1\quad (1\leftrightarrow 2, u\leftrightarrow \nu, \psi_3\leftrightarrow -\psi_3) \tag{4.6}$$

$$2\alpha(v_{,1}-u_{,2})-(k_1-k_2)(3\gamma+\varepsilon)w_{,12}+(\gamma+\varepsilon)(\psi_{3,11}+\psi_{3,22})+$$

$$+\frac{h^2}{12}[k_1(3\gamma+\beta+\varepsilon)+k_2\beta]\psi_{2,1}-\frac{h^2}{12}[k_2(3\gamma+\beta+\varepsilon)+k_1\beta]\psi_{1,2}-$$

$$-[(2\gamma+\beta)(k_1^2+k_2^2)+2\beta k_1k_2+4\alpha]\psi_3=J\ddot{\psi}_3 \tag{4.7}$$

К этим уравнениям должны быть присоединены граничные условия на торцах оболочки. Осредненные граничные условия запишутся аналогично граничным условиям уточненной теории [1, 2].

5. В случае пластинки ($k_1=0$, $k_2=0$) система разрешающих уравнений распадается на две самостоятельные системы. Первая система – из трех уравнений (4.3), (4.7) относительно трех искомых u, ν, ψ_3 (плоская задача). Вторая система – из пяти уравнений (4.4), (4.5), (4.6) относительно пяти искомых w, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 (поперечный изгиб). В частном случае, когда $\alpha=0$, первые пять уравнений совпадают с уравнениями уточненной теории [1, 2], а остальные три будут связаны с первыми лишь с помощью искомых перемещений u, v, w.

b^2	$\frac{\alpha}{\mu}$	$\frac{B}{hq}w_0$	$\frac{B}{hq}u_0$	$\frac{h^2}{q}\varphi_0$	$\frac{Bh^2}{q}\psi_0$
	0,0	430	41,1	1,65	
4	0,05	398	38,0	1,51	87,0
	0,1	396	37,9	1,50	49,2
	0,5	395	37,7	1,50	15,6
	0,05	398	38,0	1,51	145
2	0,1	396	37,9	1,50	84,4
	0,5	395	37,7	1,50	26,4
	0,05	349	33,3	1,29	218
1	0,1	335	32,1	1,23	134
	0,5	322	30,7	1,17	43,0

6. Рассмотрим модельную задачу о шарнирно опертой по торцам ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = a$) осесимметрично нагруженной ($Z = q\sin\lambda\alpha_1$, $\lambda = \pi/\alpha$) круговой цилиндрической оболочке с радиусом кривизны $R_2 = R$. Очевидно в этом случае все искомые величины будут функциями лишь α_1. При этом имеем также, что $v = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$.

Система разрешающих уравнений в искомых функциях $u(\alpha_1)$, $w(\alpha_1)$, $\varphi_1 = \varphi(\alpha_1)$, $\psi_1 = \psi(\alpha_1)$ примет вид (штрих означает производную по α_1)

$$\begin{gathered}
Bu'' + B_{12}\frac{1}{R}w' = 0 \\
B_{12}\frac{1}{R}u' + B\frac{w}{R^2} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi' + \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi'\right) = \frac{q}{n}\sin\lambda\alpha_1 \\
Bw'' - \frac{h^2}{10}\frac{B}{\mu+\alpha}(\varphi'' + 2\alpha\psi'') + \varphi = 0 \\
(\gamma+\varepsilon)w''' - \frac{h^2}{12}\left[(\gamma+\varepsilon)\psi'' - \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi + \frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\varphi - \frac{\gamma+\varepsilon}{R^2}\psi\right] = 0
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Для внутренних усилий и моментов имеем

$$\begin{gathered}
T_{11} = Bh\left(u' + v\frac{w}{R}\right), \quad T_{22} = Bh\left(\frac{w}{R} + vu'\right) \\
N_{13} = \frac{h^3}{12}\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi + \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi\right), \quad M_{22} = vM_{11} \\
M_1 = -\frac{Bh^3}{12}w'' + \frac{Bh^5}{120(\mu+\alpha)}(\varphi' + 2\alpha\psi), \quad R_{21} = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}R_{12} \\
R_{12} = (\gamma+\varepsilon)\left(\frac{h^3}{12}\psi_{,1} - hw''\right), \quad Q_{23} = (\gamma+\varepsilon)\left(\frac{h}{2}w' - \frac{h^3}{12R}\psi\right)
\end{gathered} \tag{6.2}$$

Полагая

$$u = u_0\cos\lambda\alpha_1, \quad w = w_0\sin\lambda\alpha_1, \quad \varphi = \varphi_0\cos\lambda\alpha_1, \quad \psi = \psi_0\cos\lambda\alpha_1$$

удовлетворим условиям свободного опирания по торцам оболочки, а из уравнений (6.1) получим систему алгебраических уравнений для определения искомых коэффициентов u_0, w_0, φ_0, ψ_0.

Аналитические представления этих величин достаточно громоздкие и необозримые, поэтому окончательные результаты приводим лишь для некоторых конкретных случаев в числах. Пусть $a = R$, $h/a = h/R = 1/20$, $v = 0{,}3$, $\mu = 0{,}3b$. Далее полагаем [8–10], что $\gamma + \varepsilon = 4\mu l^2$, где l – новая постоянная материала имеющая размерность длины, в этом случае, очевидно, что $\gamma =$

$= 2\mu l^2(1 + \eta)$, $\varepsilon = 2\mu l^2(1 - \eta)$. Безразмерная постоянная η, как известно [10], изменяется в пределах от -1 до 1 и, как полагают [8, 10], не сильно отличается от значения $-\nu$. Далее считаем, что новая упругая постоянна α в рассматриваемых примерах принимает значения: нуль, $0{,}05\mu$; $0{,}1\mu$; и $0{,}5\mu$, а безразмерная величина $b = h/l$, представляющая собой отношение толщины оболочки к характеристике материала, принимает следующие три значения: 1; 1.14142; 2. В итоге вычислений приходим к результатам, представленным в таблице.

При $b^2 = 4$, $\alpha/\mu = 0{,}0$ значения искомых величин найдем по уточненной теории [1, 2], однако в целом ограничились случаем достаточно тонкой оболочки $h/\alpha = 1/20$, чтобы существенно уменьшить влияние учета поперечных сдвигов на расчетные величины задачи, что делает более наглядными эффекты от несимметричной упругости.

Приведенные в таблице результаты показывают, что уже достаточно малые значения новых упругих постоянных материала могут заметно влиять на значения искомых величин, найденные по классической теории. Далее замечаем, что при фиксированном значении l изменение α в 10 раз незначительно влияет на значения искомых величин u_0, w_0, φ_0, что важно при постановке экспериментов для определения новой (основной) упругой постоянной l. Уменьшая толщину оболочки, увеличиваем влияние новой упругой постоянной l на искомые. В частности, при фиксированном l, уменьшая абсолютную толщину оболочки, замечаем существенное расхождение между результатами классической (уточненной) теории и предлагаемой здесь теорией. Полагая, например $b = 1$, при толщине оболочки $h = 0{,}05$ см, что равносильно принятию $l = 0{,}05$ см, заключаем, что искомые величины u_0, w_0, φ_0 будут отличаться от классических на 20–25%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
2. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
3. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des corps deformables. Paris: Hermann, 1909. 226 p.
5. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
8. *Миндлин Р.Д., Тирстен Г.Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. № 4. С. 80–114.
9. *Савин Г.Н.* Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев: Из-во Киев. Ун-та, 1965. 162 с.
10. *Койтер В.Т.* Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. № 3. С. 89–112.

Ереван

Поступила в редакцию
20.III.1997