УДК 539.3

© 1998 г. И.И. Ворович, Л.П. Лебедев

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ СТАТИКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Изложенными ранее методами [1] доказывается непрерывность зависимости неособого решения от малых возмущений размеров и формы оболочки, которые приводят к изменению области, на которую отображается срединная поверхность оболочки (например, увеличению или уменьшению угла раствора пологого сферического купола), а также от малых изменений частей границы, вдоль которой осуществляется тот или иной вид краевых условий (например, имеется какая-то часть границы, жестко закрепленной по отношению перемещению точек в направлении нормальном к срединной поверхности).

Непрерывность зависимости неособых решений от малых изменений упругих характеристик оболочки и от малых возмущений формы оболочки, которые не вызывают изменения области задания координат срединной поверхности и частей границ с различными типами краевых условий, доказана ранее [1].

Рассматривается общая краевая задача нелинейной теории упругих оболочек среднего изгиба в рамках гипотез Кирхгофа–Лява. Предполагается, что оболочка имеет достаточно гладкую срединную поверхность S, отображаемую на связное ограниченное открытое множество Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ в плоскости R^2. Криволинейные координаты на срединной поверхности $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \Omega$ определяют векторы основного базиса $\mathbf{a}_\alpha = \partial\mathbf{r}/\partial\xi^\alpha$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2)$ – уравнение недеформированной срединной поверхности оболочки. Вместе с вектором нормали $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3$ к срединной поверхности вектора основного базиса образуют трехмерный базис, меняющийся вдоль S. Взаимный базис $\mathbf{a}^\alpha$ определяется соотношениями $\mathbf{a}^\alpha\cdot\mathbf{a}_\beta = \delta^\alpha_\beta$, где δ^α_β – символ Кронекера. Ниже используется правило суммирования по повторяющимся нижним и верхним индексам.

Деформации в теории пологих оболочек "среднего" изгиба описываются двумя тензорами, тензором деформаций срединной поверхности $\gamma = \gamma_{\alpha\beta}\mathbf{a}^\alpha\mathbf{a}^\beta$ и тензором изменения кривизн срединной поверхности $\rho = \rho_{\alpha\beta}\mathbf{a}^\alpha\mathbf{a}^\beta$, компоненты которых имеют вид

$$\gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\varphi_\alpha\varphi_\beta, \quad \rho_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}), \quad \theta_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}w, \quad \varphi_\alpha = w_{,\alpha}$$

Здесь $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\mathbf{a}_\alpha\cdot\mathbf{a}_{3,\beta}$ – коэффициенты второй квадратичной формы срединной поверхности, индекс β после запятой означает частную производную по ξ^β, а $\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}$ – символы Кристоффеля. Кроме того, введены следующие обозначения, выписанные для координат вектора перемещений $\mathbf{u} = u_i\mathbf{a}^i = u^i\mathbf{a}_i$ ($w \equiv u^3 \equiv u_3$)

$$u_{\alpha|\beta} = u_{\alpha,\beta} - \Gamma^\varkappa_{\alpha\beta}u_\varkappa, \quad u^\alpha_{|\beta} = u^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\varkappa}u^\varkappa, \quad u_{3|\alpha} = u_{3,\alpha}$$

В случае, когда какая-либо из величин выражается не через вектор перемещений $\mathbf{u}$, а какой-либо другой вектор $\mathbf{v} = v^i\mathbf{a}_i$, это отмечается обозначением в скобках. Например, $\varphi_\alpha(\mathbf{v}) = v_{3,\alpha}$. Соотношения теории пологих упругих оболочек имеются в [1, 2].

Вследствие линейного распределения перемещений по толщине оболочки, тензор напряжений распадается на две составляющие, одна из которых характеризует продольные усилия в оболочке $\mathbf{n} = n_{\alpha\beta}\mathbf{a}^\alpha\mathbf{a}^\beta$, а другая – моменты $\mathbf{m} = m_{\alpha\beta}\mathbf{a}^\alpha\mathbf{a}^\beta$. Уравнения равновесия оболочки, записанные на основе принципа виртуальных перемещений, имеют вид

$$\int_\Omega (n^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}\delta\rho_{\alpha\beta})d\Omega - \int_\Omega (F^1\delta u_1 + F^2\delta u_2 + F^3\delta w)d\Omega -$$
$$-\int_{\partial\Omega}(f^3\delta w + M^*\partial\delta w/\partial n)ds = 0,\quad d\Omega = Jd\xi^1 d\xi^2,\quad J^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geqslant c_0 > 0 \tag{1}$$

где $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \mathbf{a}_\alpha\cdot\mathbf{a}_\beta$ – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, ρ – плотность материала, h – толщина оболочки, F^i – внешние поверхностные силы. Координаты вектора возможных перемещений δu_i связаны с вариацией тензоров деформации соотношениями

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\delta u_{\alpha|\beta} + \delta u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\delta w + \tfrac{1}{2}(\varphi_\beta\delta\varphi_\alpha + \varphi_\alpha\delta\varphi_\beta)$$

$$\delta\rho_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\delta\varphi_{\alpha|\beta} + \delta\varphi_{\beta|\alpha}),\quad \delta\varphi_\alpha = \delta w_{,\alpha} + b_{\alpha\lambda}\delta u^\lambda = \delta w_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda\delta u_\lambda$$

в то время как тензоры деформаций связаны с тензорами напряжений и моментов соотношениями

$$n^{ij} = hc^{ijkl}\gamma_{kl},\quad m^{ij} = h^3c^{ijkl}\rho_{kl}/12$$

где c^{ijkl} – тензор упругих постоянных материала, обладающий свойствами симметрии и положительной определенности.

Из уравнения (1), пользуясь стандартными средствами вариационного исчисления, можно получить дифференциальные уравнения равновесия

$$n^{\beta\alpha}_{|\beta} + F^\alpha = 0,\quad m^{\alpha\beta}_{|\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}n^{\alpha\beta} - (u_{3|\alpha}n^{\alpha\beta})_{|\beta} - F^3 = 0,\quad \alpha = 1,2$$

и естественные краевые условия, которые, в других обозначениях, можно найти [1, 2].

Для простоты рассматривается следующий вариант краевых условий:

$$u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma = 0,\quad w|_{\Gamma_1} = 0,\quad \partial w/\partial n|_{\Gamma_1} = 0 \tag{2}$$

где Γ_1 – некоторая часть граничного контура Γ. На остальной части границы принимаются естественные краевые условия.

На множестве C вектор-функций $\mathbf{u}(\xi)$, $\delta\mathbf{u}(\xi) \in C^{(2)}(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям (2), вводится скалярное произведение

$$(\mathbf{u},\delta\mathbf{u})_H = \int_\Omega\left(hc^{ijkl}\theta_{kl}\delta\theta_{ij} + \frac{h^3}{12}c^{ijkl}\rho_{kl}\delta\rho_{ij}\right)d\Omega$$

Замыкание множества C вектор-функций в соответствующей норме $\|\mathbf{u}\|_H = (\mathbf{u},\mathbf{u})_H^{1/2}$ есть энергетическое пространство H.

Лемма 1. Компоненты вектора $\mathbf{u} \in H$ являются соответственно элементами пространств: $u_1, u^1, u_2, u^2 \in W_2^{(1)}(\Omega)$, $u_3 = u^3 = w \in W_2^{(2)}(\Omega)$; более того, соответствующие нормы пространств H и $W_2^{(1)}(\Omega)\times W_2^{(1)}(\Omega)\times W_2^{(2)}(\Omega)$ эквивалентны.

Определение 1. Вектор-функция $\mathbf{u} \in H$, удовлетворяющая уравнению (1) при любом $\delta\mathbf{u} \in H$ называется обобщенным решением задачи равновесия пологой упругой оболочки.

Чтобы это определение было корректным, необходимо наложить дополнительные условия на компоненты векторов внешних сил. А именно, предположим, что векторы внешних сил таковы, что линейный по $\delta\mathbf{u}$ функционал работы внешних сил

$$\int_{\Omega}(F^1\delta u_1 + F^2\delta u_2 + F^3\delta w)\,d\Omega + \int_{\partial\Omega}(f^3\delta w + M^*\partial\delta w/\partial n)\,ds$$

будет непрерывным линейным функционалом в H по $\delta\mathbf{u}$. Достаточными для этого условиями, по теоремам вложения Соболева [4], являются следующие условия: F^1, $F^2 \in L^p(\Omega)$, $M^* \in L^p(\partial\Omega)$ при каком-либо конечном $p > 1$; $F^3 = F_0^3 + F_1^3, f^3 = f_0^3 + f_1^3$, $F_0^3 \in L(\Omega), f_0^3 \in L(\partial\Omega)$, а F_1^3 и f_1^3 – некоторые конечные линейные комбинации δ-функций.

При этом условии, пользуясь теоремой Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве, можно представить функционал работы внешних сил в виде скалярного произведения

$$\int_{\Omega}(F^1\delta u_1 + F^2\delta u_2 + F^3\delta w)\,d\Omega + \int_{\partial\Omega}(f^3\delta w + M^*\partial\delta w/\partial n)\,ds = (\mathbf{g}, \delta\mathbf{u})_H \qquad (3)$$

Следуя известной процедуре [1, 3], перейдем от интегродифференциального уравнения (1) к операторному уравнению в энергетическом пространстве H. Для этого выделим в левой части уравнения (1) член $(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})_H$. Было показано [1, 3], что оставшиеся члены левой части при фиксированном $\mathbf{u} \in H$ дают непрерывный линейный функционал по переменной $\delta\mathbf{u} \in H$, а потому, по теореме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала, их алгебраическая сумма представима в виде скалярного произведения $(\mathbf{G}, \delta\mathbf{u})_H$. Элемент $\mathbf{G}$ определяется элементом $\mathbf{u}$ и внешними нагрузками однозначно. Поскольку внешние нагрузки фиксированы, элемент $\mathbf{G}$ можно рассматривать как значение некоторого нелинейного оператора в точке $\mathbf{u}$, что будет обозначаться как $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{u})$. В этих обозначениях уравнение (1) можно представить в виде $(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})_H = (\mathbf{G}(\mathbf{u}), \delta\mathbf{u})_H$ или, что то же самое,

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{u}) \qquad (4)$$

Было показано [1], что уравнение (4) при указанных выше условиях, налагаемых на геометрию оболочки и внешние нагрузки, имеет решение, а следовательно, и рассматриваемая задача имеет обобщенное решение в указанном выше смысле.

Далее понадобится понятие неособого решения задачи. Решение $\mathbf{u}$ уравнения (1) называется особым, если в данной точке $\mathbf{u}$ производная по Фреше оператора $\mathbf{u} - \mathbf{G}(\mathbf{u})$ обращается в нуль. Уравнение, которое определяет равенство производной по Фреше в точке $\mathbf{u}$ нулю, в случае, если $\mathbf{u}$ – особое решение, должно иметь нетривиальное решение. Подробное исследование данного уравнения можно найти в [1].

Если нетривиальное решение данного уравнения не существует, то соответствующее решение $\mathbf{u}$ уравнения (1) называется неособым. В таких неособых точках производная по Фреше оператора $\mathbf{u} - \mathbf{G}(\mathbf{u})$, будучи непрерывным линейным оператором со специфическими свойствами, имеет непрерывный обратный оператор.

Предположим, что имеются две пологие оболочки (вообще говоря, описываемые разными уравнениями), занимающие в плане "близкие" области Ω' и Ω''. Все величины, относящиеся к первой оболочке, обозначаются одним штрихом, а для второй – двумя. Таким образом, например, часть краевых условий (2) принимает вид

$$w|_{\Gamma_1'} = 0, \quad \partial w/\partial n|_{\Gamma_1'} = 0, \quad w|_{\Gamma_1''} = 0, \quad \partial w/\partial n|_{\Gamma_1''} = 0$$

Предположим далее, что имеется взаимно-однозначное гладкое отображение области Ω'' на Ω', такое, что Γ_1'' отображается взаимно однозначно на Γ_1'. После соответствующей замены координат на срединной поверхности второй оболочки получаем, что обе оболочки заданы на одной и той же координатной области $\Omega = \Omega'$.

Предположим, что указанное выше отображение срединной поверхности Ω'' на срединную поверхность $\Omega' = \Omega$ близко к идентичному, так что после соответствующей замены переменных во всех выражениях и функционалах для второй оболочки получаем, что изменения геометрических, упругих и силовых параметров – относительно малые величины. Разности соответствующих величин будут обозначаться дополнительным символом Δ.

Итак, вводятся следующие величины:

$$\Delta\mathbf{r}(\xi^1,\xi^2) = \mathbf{r}''(\xi^1,\xi^2) - \mathbf{r}'(\xi^1,\xi^2),\quad \Delta h = h'' - h',\quad \Delta c^{ijkl} = c''^{ijkl} - c'^{ijkl}$$

$$\Delta a^{ij} = a''^{ij} - a'^{ij},\quad \Delta b^{ij} = b''^{ij} - b'^{ij},\quad \Delta\Gamma^i_{jk} = \Gamma''^i_{jk} - \Gamma'^i_{jk}$$

$$\Delta J = J'' - J',\quad \Delta\mathbf{g} = \mathbf{g}'' - A_\tau \mathbf{g}'$$

Элемент $\mathbf{g}$ определяется соотношением (3), а оператор A_τ введен равенством [1] $(A_\tau \mathbf{u}, \chi)_{H'} = (\mathbf{u}, \chi)_{H''}$. Здесь использованы обозначения H' и H'' соответственно для энергетических пространств для каждой из оболочек.

Очевидно, что оболочка S' не имеет никаких особых преимуществ по отношению к оболочке S''. Поэтому можно было бы все уравнения и соотношения отнести к оболочке S''. Для этого необходимо ввести оператор B_τ: $(B_\tau \mathbf{u}, \chi)_{H''} = (\mathbf{u}, \chi)_{H'}$.

Было доказано [1] следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\|\Delta\mathbf{r}\|_{C^{(2)}(\Omega)} \leqslant \varepsilon,\quad \|\Delta h\|_{C(\Omega)} \leqslant \varepsilon,\quad \left\|\Delta c^{ijkl}\right\|_{C(\Omega)} \leqslant \varepsilon \tag{5}$$

Тогда существует некоторая постоянная $m > 0$, такая, что

$$\left\|\Delta a_{ij}\right\|_{C^{(1)}(\Omega)} \leqslant m\varepsilon,\quad \left\|\Delta a^{ij}\right\|_{C^{(1)}(\Omega)} \leqslant m\varepsilon,\quad \left\|\Delta b_{ij}\right\|_{C(\Omega)} \leqslant m\varepsilon,\quad \left\|\Delta b^{ij}\right\|_{C(\Omega)} \leqslant m\varepsilon$$

$$\left\|\Delta\Gamma^i_{jk}\right\|_{C(\Omega)} \leqslant m\varepsilon,\quad \|\Delta J\|_{C(\Omega)} \leqslant m\varepsilon,\quad 1 - m\varepsilon \leqslant \|A_\tau\| \leqslant 1 + m\varepsilon$$

$$1 - m\varepsilon \leqslant \|B_\tau\| \leqslant 1 + m\varepsilon$$

Аналогично изложенному ранее [1], далее исследуется, как зависят значения оператора задачи от вариации параметров задачи. Поскольку формально после перехода к новой системе координат для второй оболочки получаем задачу на той же области и с тем же типом краевых условий, а следовательно, формально имеем ту же самую, что и в [1], проблему корректности, то можем сразу сформулировать окончательный результат.

Теорема 1. Пусть для оболочки S' существует неособое обобщенное решение задачи равновесия под нагрузкой $\mathbf{g}'$, описываемой функционалом работы внешних сил. Пусть, далее, имеется оболочка S'' под нагрузкой $\mathbf{g}''$, выполнено условие (5) и, кроме того, $\|\Delta\mathbf{g}\|_{H'} \leqslant \varepsilon$. В этом случае при достаточно малом ε существует обобщенное неособое решение задачи равновесия оболочки S'' в виде $\mathbf{u}' + \Delta\mathbf{u}$, причем $\|\Delta\mathbf{u}\|_{H'} \leqslant \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) \to 0$, если $\varepsilon \to 0$. Далее, в шаре радиуса $\delta(\varepsilon)$ с центром $\mathbf{u}'$ находится ровно одно обобщенное решение задачи равновесия для каждой из оболочек.

Доказательство теоремы полностью копирует доказательство теоремы 31.3 из [1]; в его основе лежит отмеченная в [1] структура оператора $\mathbf{G}(\mathbf{u})$.

Отметим, что, как правило, особые решения задач являются изолированными. Из теоремы 1 не следует, что из существования особого решения для одной из оболочек вытекает существование особого решения для другой, но вытекает, что в случае существования особого решения для второй оболочки оно необходимо лежит в некоторой малой окрестности первого особого решения.

Выше рассмотрен случай, когда возмущенной оказалась только лишь одна часть границы Γ_1. Если таких участков границы несколько, то, большей частью, невозможно отобразить область Ω'' на Ω' так, чтобы все соответствующие участки границы отобразились одна на другую. В таком случае необходимо рассмотреть последовательность краевых задач, каждая из которых отличается от предыдущей лишь изменением какой-либо одной части границы, где задан какой-либо определенный тип краевых условий. Тогда, рассуждая для каждой из соответствующих пар задач данной цепочки, получаем, что теорема типа теоремы 1 справедлива и в этом случае.

Был подробно рассмотрен [1] вопрос корректности задачи, когда на границе области задается существенно упругое опирание. Если для двух оболочек форма упруго опертого контура слабо смещена или слабо отличается друг от друга, то все сказанное выше легко переносится и на этот случай.

Наконец, отметим, что жесткие краевые условия относительно тангенциальных компонент вектора перемещений определяются лишь теоремой разрешимости, доказанной в [1], а не техникой доказательства теоремы 1. Предполагая существование обобщенного неособого изолированного решения задачи равновесия оболочки при краевых условиях любого типа, получаем теорему типа теоремы 1 указанными выше рассуждениями и в этом случае.

Сделаем еще одно замечание. Непрерывность зависимости неособых решений от изменения формы оболочки и формы границ и граничных условий позволяет рассматривать проблему сходимости метода конечного элемента, когда граница области не является многоугольником.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 373 с.
2. *Koiter W.T.* On the nonlinear theory of thin elastic shells. I // Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1966. Ser. B. V. 69. № 1. P. 1–17.
3. *Ворович И.И., Лебедев Л.П.* О разрешимости нелинейной задачи равновесия пологой оболочки // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 814–820.
4. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 334 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
21.I.1998