УДК 539.3

© 1998 г. А.Л. Гольденвейзер

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ВОПРОСА

Для двумерной линейной статической теории оболочек обсуждается формулировка граничных условий, основанная на асимптотических подходах. В простейших случаях оценивается погрешность традиционных граничных условий. Для усложненных случаев они формулируются впервые. Формулируется модифицированный принцип Сен-Венана, приспособленный к применению в двумерных теориях оболочек и устраняющий их кажущуюся противоречивость. Указываются примеры закрепления краев, для которых преобразования Кельвина–Тэта теряют смысл.

1. Постановка вопроса. Будем считать, что трехмерная упругая среда, образующая оболочку, отнесена к триортогональной системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, в которой радиус-вектор точек среды задается равенством

$$\mathbf{P}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3\mathbf{n}$$

где $\mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2)$ определяет срединную поверхность, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали, а лицевые поверхности задаются равенствами $\alpha_3 = \pm h$. Предполагается, что полутолщина оболочки h мала по сравнению с характерным размером ее срединной поверхности R (для оболочки под R удобно подразумевать характерный радиус кривизны, а для пластины – какой-либо размер ее срединной плоскости).

Примем, что оболочка имеет торец (необязательно единственный), совмещенный для конкретности с координатной поверхностью $\alpha_1 = 0$, и будем считать, что в терминах объемной теории упругости сформулирована краевая задача, в которой должны выполняться следующие условия: на лицевых поверхностях $\alpha_3 = \pm h$ – условия, означающие отсутствие закреплений и задающие приложенные к этим поверхностям внешние силы; на торце $\alpha_1 = 0$ – три условия, определяющие характер его закрепления (существование или отсутствие других торцов оболочки для предстоящих рассуждений не играет роли).

Далее обсуждаются математические приемы формулировки условий, которые в описанном случае должны ставиться на линии $\alpha_1 = 0$ срединной поверхности при расчете оболочки по двумерной теории типа Кирхгофа–Лява. При этом считается, что не должны быть использованы какие-либо (даже очевидные) физические соображения.

С указанной точки зрения заново разбираются свободный и жестко закрепленный торцы. Кроме того, обсуждаются более сложные торцевые условия, для которых вопрос о двумерном аналоге элементарными приемами не решается.

Используется концепция расчленения напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкой оболочки на внутреннее (ВНДС) и краевое (КНДС). Под последним в статике понимается НДС, локализованное вблизи торца оболочки (или других концентраторов напряжений) и определенным образом экспоненциально затухающее при удалении от линии $\alpha_1 = 0$. ВНДС и КНДС тонкой оболочки коренным образом различаются между собой по своим свойствам и рассматриваются здесь раздельно, как это принято в асимптотической теории интегрирования сингулярно вырождающихся дифференциальных уравнений.

Полагаем, что для ВНДС оболочки имеет достаточно определенный смысл понятие об его изменяемости по координатным переменным α_1, α_2 (или, что это ВНДС удобно представляется как сумма слагаемых, обладающих таким свойством). Поэтому, используя метод масштабных преобразований независимых переменных, положим

$$\alpha_1 = R\lambda^{-p}\xi_1, \quad \alpha_2 = R\lambda^{-p}\xi_2, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta \tag{1.1}$$

и будем считать, что λ – большой параметр, определяемый формулой $\lambda^l = R/h$ (l – произвольно выбираемое не слишком большое число), и что любое дифференцирование по новым независимым переменным ξ_1, ξ_2, ζ не изменяет асимптотику искомых величин. Число p в формулах (1.1) определяется соотношением $p/l = t$, в котором t – показатель изменяемости искомого ВНДС (если изменяемость ВНДС по α_1, α_2 различна, то под t надо подразумевать так называемый общий, т.е. наибольший, показатель).

При определении КНДС предполагается, что оно строится вблизи координатной поверхности $\alpha_1 = 0$ и должно обладать большой изменяемостью, как по переменной α_1, (чтобы осуществлялось затухание при удалении от $\alpha_1 = 0$), так и по переменной α_3 (чтобы было возможным выполнение лицевых условий на близко расположенных поверхностях $\alpha_3 = \pm h$). Соответственно для КНДС масштабные преобразования независимых переменных должны выполняться по формулам

$$\alpha_1 = R\lambda^{-l}\theta_1, \quad \alpha_2 = R\lambda^{-p}\theta_2, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta \tag{1.2}$$

Здесь θ_1, θ_2 обладают такими же свойствами, как ξ_1, ξ_2 в (1.1), а ζ имеет прежний смысл.

Замечание. Постулируется, что КНДС имеет одинаково большой (равный единице) показатель изменяемости по α_1 и α_3. Ниже выяснится, что в процессе выполнения торцевых условий это нигде не приводит к некорректным краевым задачам (другие виды формул (1.2) ведут к тем или иным противоречиям).

Было показано [1–4], что внутренний и краевой итерационные процессы интегрирования дифференциальных уравнений пространственной теории упругости позволяют раздельно строить ВНДС и КНДС тонкой оболочки. В исходном приближении они совместно позволяют выразить полное НДС оболочки следующими формулами:

$$\begin{aligned}
&\tau_{ii} = (1+\alpha_3/R_j)\sigma_{ii} = \lambda^l(\tau_{ii}^0 + \zeta\lambda^{-l+2p-c+b}\tau_{ii}^1) + \tilde{\tau}_{ii}\\
&\tau_{ij} = (1+\alpha_3/R_i)\sigma_{ij} = \lambda^l(\tau_{ij}^0 + \zeta\lambda^{-l+2p-c+b}\tau_{ij}^1) + \tilde{\tau}_{ij}\\
&\tau_{i3} = (1+\alpha_3/R_j)\sigma_{i3} = \lambda^p(\tau_{i3}^0 + \zeta\tau_{13}^1 + \zeta^2\lambda^{-l+2p-c+b}\tau_{i3}^2) + \tilde{\tau}_{i3} \quad (i,j=1,2;\ i\neq j)\\
&\tau_{33} = (1+\alpha_3/R_1)(1+\alpha_3/R_2)\sigma_{33} = \lambda^c(\tau_{33}^0 + \zeta\tau_{33}^1 + \zeta^2\lambda^{-l+2p-c+b}\tau_{33}^2 + \zeta^3\lambda^{-2l+2p-2c+b}\tau_{33}) + \tilde{\tau}_{33}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
&v_i = \lambda^{l-p+b}(v_i^0 + \zeta\lambda^{-l+2p-c}v_i^1) + \tilde{v}_i \quad (i=1,2)\\
&v_3 = \lambda^{l-c+b}(v_3^0 + \zeta\lambda^{-l+c}v_3^1) + \tilde{v}_3
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\tau}_{mn} = \lambda^{\mu+\alpha}ES_{mn}(\alpha) + \lambda^{\nu+\beta}ES_{mn}(\beta),\\
&\tilde{v}_m = \lambda^{\mu+\alpha-l}RV_m(\alpha) + \lambda^{\nu+\beta-l}RV_m(\beta), \quad m,n=1,2,3)
\end{aligned}$$

Под σ_{mn}, v_m (m, n = 1, 2, 3) здесь подразумеваются напряжения и перемещения трехмерной упругой среды, а под τ_{mn} – так называемые несимметричные напряжения, смысл которых вытекает из равенств (1.3), R_k – главные радиусы кривизны срединной поверхности.

Асимптотические множители λ^l, λ^p в (1.3), (1.4) имеют такой же смысл, как в (1.1), (1.2). О λ^c, λ^b будет сказано ниже. Величины, обозначенные через τ, υ (когда это не вызывает недоразумений, здесь и ниже, выписываются только корневые буквы, т.е. отбрасываются все верхние и нижние индексы), являются функциями двух переменных ξ_1, ξ_2 или, что то же, α_1, α_2. Они определяют напряжения (τ) и перемещения (υ) ВНДС и являются искомыми функциями теории тонких оболочек. С искомыми величинами этой теории они связаны формулами

$$\tau_{ii}^0 = \frac{1}{2R}T_i, \quad \tau_{ij}^0 = \frac{1}{2R}S_{ij}; \quad \tau_{ii}^1 = -\lambda^{2l-2p+c-b}\frac{3}{2R^2}G_i$$
$$\tau_{12}^1 = \lambda^{2l-2p+c-b}\frac{3}{2R^2}H_{12}, \quad \tau_{i3}^0 + \frac{1}{3}\lambda^{-l+2p-c+b}\tau_{i3}^2 = -\frac{\lambda^{l-p}}{2R}N_i \tag{1.5}$$
$$\upsilon_i^0 = \lambda^{-l+p-b}u_i, \quad \upsilon_3^0 = -\lambda^{-l+c-b}w, \quad \upsilon_i^1 = -R\lambda^{-l-p+c-b}\gamma_i$$

В них для величин, стоящих справа, использованы обозначения монографии [4]. Эти величины удовлетворяют всем приведенным там же уравнениям общей двумерной теории оболочек (в этом заключается адекватность одночленной асимптотики ВНДС и теории Кирхгофа–Лява).

Справедливы и дополнительные (не предусмотренные в классической теории оболочек) соотношения [4]

$$\tau_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c+b}\tau_{i3}^2 = \lambda^{-p}(\tau_{i3}^+ - \tau_{i3}^-)/2$$
$$\tau_{i3}^1 = \lambda^{-p}(\tau_{i3}^+ - \tau_{i3}^-)/2 \quad (i = 1,2), \quad v_3^1 = -\lambda^{-b}\nu(T_1 + T_2)/(2E) \tag{1.6}$$

При их выводе, описанном в [4], считается, что лицевые условия имеют вид

$$\alpha_3 = \pm h: \ \tau_{k3} = \tau_{k3}^{\pm} \quad (k = 1,2,3)$$

Через S, V в (1.3), (1.4) обозначены безразмерные напряжения и перемещения КНДС (ES – размерные несимметричные напряжения, hV – размерные перемещения, индексы здесь и ниже тоже опущены). Учитывается, что КНДС расчленяется на антиплоское НДС, приближенно определяемое в плоскости (θ_1, ζ) уравнениями антиплоской задачи теории упругости, и плоское НДС, таким же образом определяемое уравнениями плоской задачи. Соответственно величины S, V отмечаются дополнительными записями (α) и (β). Это значит [1, 4], что среди $S_{ij}(\alpha)$ и $V_k(\alpha)$ асимптотически главными являются величины

$$P = [S_{12}(\alpha), S_{23}(\alpha), V_2(\alpha)] \tag{1.7}$$

а среди $S_{ij}(\beta)$, $V_k(\beta)$ – величины

$$Q = [S_{11}(\beta),\ S_{22}(\beta),\ S_{33}(\beta),\ S_{13}(\beta),\ V_1(\beta),\ V_3(\beta)] \tag{1.8}$$

Это свойство КНДС в (1.3), (1.4) учитывается асимптотическими множителями λ^μ, λ^ν при величинах S, V. Когда речь идет о величинах P, надо полагать $\mu = 0$, $\nu = -l + p$, а для величин Q надо считать $\mu = -l + p$, $\nu = 0$ [4].

Антиплоская и плоская задачи при построении величин $S(\alpha)$, $V(\alpha)$ и $S(\beta)$, $V(\beta)$ должны решаться с учетом однородных лицевых условий, так как внешние силы, приложенные к поверхностям $\alpha_3 = \pm h$, уже приняты во внимание во внутреннем итерационном процессе. Поэтому при величинах $S(\alpha)$, $V(\alpha)$ и $S(\beta)$, $V(\beta)$ в (1.3), (1.4) введены асимптотические множители $\lambda^\alpha, \lambda^\beta$, в которых показатели α, β должны определяться в зависимости от вида торцевых условий на основании рассуждений, описываемых ниже.

Формулы (1.3), (1.4) определяют в явном виде асимптотику некоторого семейства интегралов дифференциальных уравнений пространственной теории упругости тонкого тела со свободными лицевыми поверхностями. Из результатов последующих разделов статьи следует, что соответствующие НДС можно приближенно подчинить не только лицевым, но и торцевым условиям объемной теории упругости (возможно и итерационное улучшение этого результата). Отсюда следует, что степени λ в (1.3), (1.4) задают асимптотику полного НДС оболочки. Она зависит от параметров η, t, c, b, физический смысл которых заключается в следующем: η – безразмерная полутолщина (главный параметр оболочечной асимптотики); $p/l = t$ – показатель изменяемости ВНДС оболочки; c – дискриминантный параметр; он связан с параметрами p и l следующими соотношениями:

для оболочки, не вырождающейся в пластину,

$$c=0 \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \quad c=2p-l \quad \text{при } t \geqslant 1/2 \tag{1.9}$$

для пластины

$$c = 2p - l \text{ при любом } t \tag{1.10}$$

(параметр c появляется в формулах (1.3), (1.4) вследствие того, что при переходе показателя изменяемости t через значение $1/2$ ВНДС претерпевает качественное изменение), b – так называемый показатель псевдоизгибаний [5]; он характеризует асимптотическую близость деформации срединной поверхности оболочки к бесконечно малым изгибаниям.

2. Оболочка со свободным торцом. Пусть оболочка имеет свободный торец $\alpha_1 = 0$, на котором, в силу (1.3), должны выполняться следующие приближенные условия трехмерной теории упругости:

$$\begin{gathered}
\lambda^l(\tau_{11}^0 + \zeta\lambda^{-l+2p-c}\tau_{11}^1) + \lambda^{-l+p+\alpha} ES_{11}(\alpha) + \lambda^\beta ES_{11}(\beta) = 0 \\
\lambda^l(\tau_{12}^0 + \zeta\lambda^{-l+2p-c}\tau_{12}^1) + \lambda^\alpha ES_{12}(\alpha) + \lambda^{-l+p+\beta} ES_{12}(\beta) = 0 \\
\tau_{13}^0 + 1/3\,\lambda^{-l+2p-c}\tau_{13}^2 + \zeta\tau_{13}^1 + \lambda^{-l+2p-c}(\zeta^2 - 1/3)\tau_{13}^2 + \lambda^{-l+\alpha} ES_{13}(\alpha) + \lambda^{-p+\beta} ES_{13}(\beta) = 0
\end{gathered} \tag{2.1}$$

В них показатели μ, ν выбраны, как описано в разд. 1, и для уменьшения числа вариантов принято (как и всюду в дальнейшем), что $b = 0$. Показатели p, l и c в (2.1) считаются заданными с учетом предполагаемых свойств решения рассматриваемой задачи.

Предлагаемый подход к формулировке граничных условий в классической двумерной теории оболочек заключается в том, что соотношения вида (2.1) трактуются как торцевые условия для задачи построения КНДС, т.е. искомыми считаются величины S, V, а величины τ рассматриваются пока как известные, и ставится вопрос о тех условиях, которым надо подчинить τ на линии $\alpha_1 = 0$, чтобы S, V обладали свойством сен-венановского затухания по α_1.

Построение КНДС надо выполнить в полуполосе $\{0 \leqslant \alpha_1 < \infty; -h \leqslant \alpha_3 \leqslant +h\}$ при учете однородных лицевых условий $S_{3k} = 0$ ($k = 1, 2, 3$) на линиях $\alpha_3 = \pm h$ и с дополнительными требованиями затухания трех напряжений S_{1k} и трех перемещений V_k при $\alpha_1 \to \infty$. Кроме того, конечно, надо выполнять условие ограниченности КНДС при $\lambda \to \infty$. Для выполнения этих требований в (2.1) можно распоряжаться значениями весовых показателей α, β и назначать вид четырех условий, выставляемых в классической теории оболочек на линии $\alpha_1 = 0$ для величин τ. Таким образом, надо добиться, чтобы а) в соотношениях (2.1), после отбрасывания общих множителей вида λ^{χ}, стал возможным переход к пределу при $\lambda \to \infty$ (т.е. отсутствовали положительные степени λ);

б) из предельных (при $\lambda \to \infty$) торцевых соотношений следовали одно торцевое условие для антиплоской задачи и два торцевых условия для плоской задачи;

в) предельные торцевые условия как для антиплоской так и для плоской задач в отдельности не допускали тривиального (нулевого) решения (противоположное свидетельствовало бы об ошибке в выборе α, β).

Перечисленные требования будут выполнены, если удовлетворяются соотношения

$$\alpha_1 = 0:\ \tau_{11}^0 = 0,\quad \tau_{12}^0 = 0,\quad \tau_{11}^1 = 0 \tag{2.2}$$

и если для весовых показателей α, β будут приняты формулы

$$\alpha = 2p - c,\ \beta = p \tag{2.3}$$

При этом предельные краевые соотношения (2.1) примут вид

$$\begin{gathered}\lambda^{-l+2p-c}ES_{11}(\alpha) + ES_{11}(\beta) = 0,\quad \zeta\tau_{12}^1 + ES_{12}(\alpha) = 0 \\ \tau_{13}^0 + \tfrac{1}{3}\lambda^{-l+2p-c}\tau_{13}^2 + \zeta\tau_{13}^1 + \lambda^{-l+2p-c}(\zeta^2 - \tfrac{1}{3})\tau_{13}^2 + \\ +\lambda^{-l+2p-c}ES_{13}(\alpha) + ES_{13}(\beta) = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

В (2.4) сохранены члены с множителем $\lambda^{-l+2p-c}$, хотя считается, что был осуществлен переход к пределу при $\lambda \to \infty$. Дело в том, что этот множитель согласно (1.9), (1.10) либо отрицателен (при $p < l/2$), либо равен единице (при $p \geqslant l/2$). Его надо расшифровать соответствующим образом в зависимости от значений параметров p, l.

Можно считать, что в (2.4) выполнены и требования неоднородности. Это, вообще говоря, обеспечивается входящими в (2.4) слагаемыми с τ_{12}^1, τ_{13}^0, τ_{13}^2, τ_{13}^1. Согласно (1.5), (1.6) они не принадлежат к величинам, подчиняющимся в двумерной теории оболочек каким-то краевым требованиям. Поэтому обращение в нуль свободных членов в (2.4) может произойти только "случайно", т.е. лишь в конкретных задачах при специфических значениях входных данных.

Остается вопрос обеспечения сен-венановского затухания КНДС. К нему вернемся после рассмотрения некоторых общих свойств приближенной теории КНДС в следующем разделе.

3. Модифицированный принцип Сен-Венана в теории оболочек. Будем рассматривать КНДС оболочки вблизи торца $\alpha_1 = 0$ и выпишем для него уравнения равновесия трехмерной теории упругости следующим образом:

$$X_i \equiv \frac{\partial\sigma_{i1}}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial\alpha_3} = 0 \quad (i = 1,2,3) \tag{3.1}$$

(для простоты использованы декартовы координаты, но окончательные выводы остаются верными и для произвольной координатной системы).

Выполним в (3.1) замены искомых величин по формулам

$$\sigma_{st} = ES_{st}\ \ (s, t = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

а для независимых переменных примем замены (1.2) и учтем, что асимптотика КНДС выражается соотношениями [4]

$$\begin{gathered}\frac{1}{E}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \alpha_{33}, \sigma_{13}) = \lambda^{\beta}[S_{11}(\beta), S_{22}(\beta), S_{33}(\beta), S_{13}(\beta)] + \\ +\lambda^{\alpha-l+p}[S_{11}(\alpha), S_{22}(\alpha), S_{33}(\alpha), S_{13}(\alpha)]\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{E}(\sigma_{12}, \sigma_{23}) = \lambda^{\alpha}[S_{12}(\alpha), S_{23}(\alpha)] + \lambda^{\beta-l+p}[S_{12}(\beta), S_{23}(\beta)] \tag{3.4}$$

В этих равенствах $S(\alpha)$, $S(\beta)$ – величины вида $O(\lambda^{\chi})$ при одинаковом χ для всех S, а под α, β подразумеваются весовые показатели, введенные в разд. 1. Последние характеризуют относительную асимптотическую интенсивность напряжений антиплоского (α) и плоского (β) в КНДС.

Соотношения (3.3), (3.4) выведены с отбрасыванием величин вида

$$\varepsilon = O(\lambda^{-l+p}) \tag{3.5}$$

В рассуждениях, относящихся к формулировке граничных условий, будем считать допустимыми и другие отбрасывания того же порядка.

Условимся раздельно рассматривать три следующих случая:

$$0 < \alpha - \beta < l - p \tag{3.6}$$

$$0 < \beta - \alpha < l - p \tag{3.7}$$

$$\alpha - \beta = 0 \tag{3.8}$$

(значения α, β, не укладывающиеся в эти рамки, в дальнейшем не понадобятся).

Соотношениями (3.6)–(3.8) характеризуются КНДС с различными асимптотическими свойствами. Предполагаются возможными почти антиплоское КНДС, в котором выполняются неравенства (3.6) и асимптотически главными являются σ_{12}, σ_{23}, почти плоское КНДС, в котором выполняются неравенства (3.7) и главными являются σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{13}, и смешанное КНДС, в котором справедливо равенство (3.8) и все напряжения асимптотически эквивалентны.

Можно проверить, что при выполнении любого из соотношений (3.6)–(3.8) в правых частях равенств (3.3), (3.4) в рамках точности (3.5) достаточно оставлять лишь первые слагаемые. Кроме того, для КНДС справедливы масштабные преобразования (1.2). Это позволяет заключить, что с точностью (3.5) уравнения равновесия (3.1) можно заменить приближенными равенствами, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
X_1 &\equiv \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\alpha_1} + \left(\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\alpha_2}\right)_{(3.6)} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha_3} = 0 \\
X_2 &\equiv \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial\alpha_1} + \left(\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\alpha_2}\right)_{(3.7)} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\alpha_3} = 0 \\
X_3 &\equiv \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\alpha_1} + \left(\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial\alpha_2}\right)_{(3.6)} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_3} = 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь принято, что члены, заключенные в скобки, должны быть сохранены лишь при выполнении соотношения, номер которого указан в индексе за скобкой. (Так, при выполнении равенства (3.8) все члены в скобках отбрасываются.)

Введем в рассмотрение четыре очевидных равенства

$$\begin{aligned}
&\iint X_1 dg = 0, \quad \iint X_2 dg = 0, \quad \iint X_3 dg = 0 \\
&\iint (X_1\alpha_3 - X_3\alpha_1) dg = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

в которых интегрирование распространяется на область $g = \{0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \infty; -h \leqslant \alpha_3 \leqslant +h\}$, и будем раскрывать их левые части традиционными приемами теории упругости, учитывая, что напряжения σ_{st} должны подчиняться однородным лицевым условиям

$$\alpha_3 = \pm h\colon \sigma_{3k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

торцевым условиям

$$\alpha_1 = 0\colon \quad \sigma_{11} = \lambda^l s_{11}, \quad \sigma_{12} = \lambda^l s_{12}, \quad \sigma_{13} = \lambda^p s_{13} \tag{3.11}$$

(s_{11}, s_{12}, s_{13} – заданные функции переменных α_2, α_3, соизмеримые с λ^0) и условиям достаточно быстрого затухания напряжений σ при $\alpha_1 \to \infty$.

Соответствующие действия были подробно описаны [6] для случая, когда приближенные уравнения равновесия отвечают условиям (3.6). При этом уравнения (3.9) приводятся при учете (3.11) к четырем равенствам (интегрирование по α_3 здесь и далее ведется от $-h$ до h)

$$\int s_{11} d\alpha_3 = 0, \quad \int s_{12} d\alpha_3 = 0$$

$$\lambda^p \int s_{13} d\alpha_3 + \lambda^l \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int s_{12} \alpha_3 d\alpha_3 = 0 \tag{3.12}$$

$$\lambda^l \int s_{11} \alpha_3 d\alpha_3 + \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \iint \sigma_{12} \alpha_3 dg \right\} = 0$$

В последнем из них член, взятый в фигурные скобки, в рамках точности (3.5) пренебрежимо мал. Это следует из (3.11) и из того, что в нем предусматривается дополнительное интегрирование по α_1 экспоненциально затухающей функции σ_{12}.

После отбрасывания малого слагаемого в (3.12) будут содержаться только заданные на линии $\alpha_1 = 0$ значения напряжений и, следовательно, условия (3.12) можно сформулировать не решая соответствующую краевую задачу. Эти условия, очевидно, необходимы для существования затухающего решения обсуждаемой краевой задачи. Под модифицированным принципом Сен-Венана будем, как и ранее [6], понимать здесь утверждение, что такого рода условия являются так же и достаточными.

После очевидных преобразований с использованием формул (1.5) равенства (3.12), взятые без слагаемого в фигурных скобках, принимают вид

$$T_1 = S_{21} = N_1 + \frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_2} = G_1 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0 \tag{3.13}$$

Они подтверждают общепринятые в настоящее время граничные условия в классической двумерной теории оболочек для свободного края. Погрешность этих условий определяется принятой в этом разделе оценкой (3.5). Ниже выяснится, что она характерна, вообще говоря, для традиционных граничных условий двумерной теории оболочек. Вместе с тем показано [4], что при выводе двумерных дифференциальных уравнений теории оболочек легко достижимой является более высокая точность порядка λ^{-2l+2p}.

Естественно возникает вопрос об уточнении формулировки и граничных условий до величин того же порядка (такие условия получили название приведенных). Однако излагаемые здесь соображения показывают, что для граничных условий вопрос уточнения более сложен, чем для дифференциальных уравнений, а построение уточняющих слагаемых связано с необходимостью решать некоторые дополнительные краевые задачи плоской теории упругости.

Замечание. Можно проверить, что достигнутая здесь точность (3.5) достаточна для того, чтобы задним числом оправдать применение соотношений (2.2) для вывода предельных равенств (2.4).

Примем теперь, что вместо (3.6) выполняются неравенства (3.7). Используя приближенные уравнения равновесия (3.9), из первого, третьего и четвертого соотношения (3.10) получаем

$$\int s_{11} d\alpha_3 = \int s_{13} d\alpha_3 = \int s_{11} \alpha_3 d\alpha_3 = 0$$

Для преобразования второго равенства (3.10) учтем, что в рассматриваемом случае главным является плоский пограничный слой, для которого справедливо приближенное равенство [4]

$$\sigma_{22} + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}) = 0$$

и выражение X_2 в (3.9) приводится к виду

$$X_2 \equiv \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial\alpha_1} - \nu\left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_2}\right) + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\alpha_3} \tag{3.14}$$

При расшифровке второго равенства (3.10) возникнут лишь трудности, связанные со вторым слагаемым в формуле (3.14). Приведем соответствующие выкладки (интегрирование по α_1 ведется от нуля до бесконечности)

$$\iint \sigma_{11} dg = \int d\alpha_3 \int \sigma_{11} d\alpha_1 = \int \left\{ [\alpha_1 \sigma_{11}]_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=\infty} - \int \alpha_1 \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\alpha_1} d\alpha_1 \right\} d\alpha_3$$

Первый член в фигурных скобках исчезает вследствие предположения об экспоненциальном затухании напряжения σ_{11}. Второй член можно преобразовать при помощи первого равенства (3.9). Получим

$$\iint \sigma_{11} dg = -\iint \alpha_1 \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\alpha_1} dg = \int \alpha_1 d\alpha_1 \int \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha_3} d\alpha_3 = 0$$

Далее имеем

$$\iint \sigma_{33} dg = \int \left\{ [\alpha_3 \sigma_{33}]_{\alpha_3=-h}^{\alpha_3=+h} - \int \alpha_3 \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_3} d\alpha_3 \right\} d\alpha_1 = -\iint \alpha_3 \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_3} dg =$$

$$= \iint \alpha_3 \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\alpha_1} dg = -\lambda^p \int s_{31} \alpha_3 d\alpha_3$$

Окончательно условия выполнения модифицированного принципа Сен-Венана в случае (3.7), т.е. для достаточно жестко закрепленного торца [7], принимают вид

$$\begin{gathered} \int s_{11} d\alpha_3 = \int s_{13} d\alpha_3 = \int s_{11} \alpha_3 d\alpha_3 = 0 \\ \lambda^l \int s_{12} d\alpha_3 + j\nu\lambda^p \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \int s_{13} \alpha_3 d\alpha_3 = 0 \end{gathered} \tag{3.15}$$

(j – условный множитель, который пока считается равным единице).

Замечания. 1^0. Бросается в глаза аналогия между последним равенством (3.15) и третьим равенством (3.12). Последнее в классической теории оболочек обусловливает использование приведенного перерезывающего усилия. Однако из последнего равенства (3.15) не следует, что при достаточно жесткой заделке торца подобные поправки надо вводить для сдвигающего усилия. При помощи (1.2) можно убедиться, что обсуждаемое слагаемое в соотношениях (3.15) можно отбросить с погрешностью порядка λ^{-2l+2p}. Это значит, что в (3.15) можно положить $j = 0$, т.е. считать, что при достаточно жестком закреплении края для получения модифицированных условий сен-венановского затухания надо в канонических условиях только отбросить требование обращения в нуль краевого крутящего момента, не изменяя смысла перерезывающего усилия.

2°. Из сказанного, в частности, следует, что известные чисто статические рассуждения Кельвина – Тэта не являются исчерпывающим оправданием для использования приведенного перерезывающего усилия. Необходимо учитывать не только статику, но и характер закрепления торца.

Можно проверить, что условия затухания (3.15) при $j = 0$ справедливы и в случае $\alpha = \beta$.

Отметим, что предлагаемый подход к формулировке граничных условий позволяет попутно получить соотношения вида (2.3) для весовых показателей α, β, т.е. определить качественную картину приторцевых упругих явлений в почти двумерных телах.

Формулы (1.3) показывают, что в случае, когда $\alpha = \beta = l$, антиплоский пограничный слой, плоский пограничный слой и ВНДС оболочки асимптотически эквивалентны друг другу по интенсивности напряжений. В силу этого при учете (2.3) (1.9), (1.10) заключаем, что вблизи свободного торца

а) в оболочке (не вырождающейся в пластину) при $t < 1/2$ КНДС в целом асимптотически второстепенно, а при $t \geqslant 1/2$ оно соизмеримо с ВНДС;

б) в пластине ВНДС и КНДС соизмеримы при любом t;

в) в отдельно взятом КНДС, вообще говоря, асимптотически господствует антиплоский пограничный слой, а исключением является лишь случай, когда оболочка не вырождается в пластину и $t = 0$, т.е. когда КНДС второстепенно в целом.

4. Жестко заделанные торцы. Обратимся к случаю, когда торец $\alpha_1 = 0$ жестко заделан и на нем поставлены условия объемной теории упругости

$$\alpha_1 = 0\colon\ v_1 = 0,\ v_2 = 0,\ v_3 = 0 \tag{4.1}$$

Применим соотношения (1.4), примем в них $b = 0$, выберем μ, ν, как указано в разд. 1, и зададим весовые показатели формулами

$$\alpha = p,\ \beta = l \tag{4.2}$$

Получим торцевые равенства

$$\begin{aligned} &RV_1(\beta) + R\lambda^{-2l+2p}V_1(\alpha) = -\lambda^{l-p}(\nu_1^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\nu_1^1) \\ &RV_2(\alpha) + RV_2(\beta) = -\lambda^{2l-2p}(\nu_2^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\nu_2^1) \\ &RV_3(\beta) + R\lambda^{-2l+2p}V_3(\alpha) = -\lambda^{l-c}(\nu_3^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\nu_3^1) \end{aligned} \tag{4.3}$$

которые снова будем рассматривать как граничные условия для КНДС.

Замечание. Равенства (4.3) были приведены ранее [7, 8] без описания соответствующих выкладок и содержат несущественную для окончательных результатов ошибку: в левых частях первого и последнего равенств (4.3) вместо множителей λ^{-2l+2p} ошибочно написаны множители $\lambda^{-l+2p-c}$. Кроме того, выражение в скобках в правой части последнего равенства (4.3) было дополнено слагаемым $\lambda^{-2l+2p}\zeta^2\nu_3^2$, что необходимо для правильного расчета КНДС. В предлагаемой статье, где ставится вопрос лишь о граничных условиях в двумерной теории оболочек, это уточнение несущественно.

В левых частях равенств (4.3) все степени λ неположительны. В правых частях λ положительны при пяти величинах $\nu_1^0, \nu_1^1, \nu_3^0, \nu_2^0, \nu_2^1$. Первые четыре из них согласно (1.5) пропорциональны перемещениям u_1, u_2, w срединной поверхности и упругому углу поворота γ_1. Поэтому естественно предположить, что при $\alpha_1 = 0$ они обратятся в нуль с асимптотической точностью, достаточной для нейтрализации положительных степеней λ. Это подтверждается полученными ниже результатами. Остается единственная положительная степень λ, стоящая при ν_2^1, т.е. при величине, пропорциональной, согласно (1.5), углу поворота γ_2. Для последнего справедлива формула [4]

$$\gamma_2 = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{d\alpha_2} - \frac{\nu_2}{R_2} \tag{4.4}$$

Из нее следует, что на линии $\alpha_1 = 0$ вместе с $v_1^0, v_1^1, v_3^0, v_2^0$ будет обращаться в нуль и v_2^1.

Отсюда вытекает непротиворечивость значений (4.2) для α, β по признаку отсутствия положительных степеней λ в торцевых условиях (4.3).

Соотношения (4.2), вообще говоря, не противоречат и требованию неоднородности, так как в третьем из равенств (4.3) содержится член v_3^1, который, согласно (1.6) может при $\alpha_1 = 0$ обратиться в нуль только "случайно". При такой ситуации (4.2) подлежат пересмотру, на котором не останавливаемся.

Замечание. Для жестко закрепленного торца в сущности имеет место такая же невязка, как и для свободного торца: на величины v, казалось бы, надо накладывать не четыре, а пять граничных условий. Однако в данном случае из предполагаемого обращения в нуль граничных значений величин v_3^0, v_2^0 вытекает и граничное равенство $v_2^1 = 0$.

Формулы (4.2) показывают, что вблизи жестко заделанного торца КНДС оболочки всегда в главном определяется решением плоской задачи и соизмеримо с ВНДС. Соответственно условиями применимости модифицированного принципа Сен-Венан в этом случае становятся требования (3.15) при $j = 0$. Их надо относить к силам реакции, возникающим на торце $\alpha_1 = 0$, т.е. к величинам, еще неизвестным на стадии формулировки оболочечных граничных условий. Для преодоления этого препятствия введем в рассмотрение типовые задачи теории КНДС. В них будем считать, что приближенные уравнения антиплоского и плоского пограничных слоев решаются в прямоугольнике

$$\{0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_1^0, -1 \leqslant \zeta \leqslant +1\} \tag{4.5}$$

(θ_1^0 – достаточно большое число) и учитываются лицевые условия

$$\zeta = \pm 1: \quad S_{3j} = 0 \quad (j = 1,2,3)$$

условия защемления на достаточно удаленном торце

$$\theta_1 = \theta_1^0: \quad V_i = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

и условия на рассматриваемом торце

$$\theta_1 = 0: \quad V_n = \delta_{mn}\zeta^k \quad (k = 0,1; m,n = 1,2,3)$$

(δ_{mn} – символ Кронекера).

Таким образом, типовыми называются задачи приближенной теории КНДС, решаемые в прямоугольнике (4.5) с учетом трех статических или кинематических условий на каждой из прямолинейных частей края области. При этом в любой, конкретной типовой задаче, неоднородным является только одно условие, определяющее при $\theta_1 = 0$ то или иное из безразмерных перемещений как величину, меняющуюся по толщине по закону ζ^0 или ζ^1.

Предполагается, что типовые задачи решаются приближенно, при помощи описываемой ниже процедуры. Если единственное неоднородное условие типовой задачи, задает торцевое перемещение V_1 или V_3, то величины Q, определяемые соотношениями вида (3.3), строятся как решение плоской задачи теории упругости (с учетом относящихся к ней граничных условий, в том числе и единственного неоднородного условия). Соответствующие величины P будут в этой типовой задаче асимптотически второстепенными (содержащими согласно (3.4) дополнительный множитель λ^{-l+p}). Для их построения служат уравнения неоднородной антиплоской задачи, в которых правые части содержат фактор пропорциональности λ^{-l+p}. Эти уравнения должны решаться с учетом оставшихся неиспользованными однородных граничных условий. Таким образом, в этом случае можно положить $P = \lambda^{-l+p}P^*$ и считать, что в формулировку краевых задач, определяющих P^* и Q, большой параметр λ не входит, т.е. что P^* и Q соизмеримы с λ^0.

Равным образом, для случая, когда единственным неоднородным граничным условием в типовой задаче задается торцевое перемещение V_2, можно считать, что ее решение определяется величинами P и $Q = \lambda^{-l+p} Q^*$, в которых P и Q^* соизмеримы с λ^0.

Введем обозначение $s_{ij}[V_r = \zeta^k]$ и будем считать, что $s_{ij}[\cdot]$ – торцевое (при $\theta_1 = 0$) значение размерных напряжений σ_{lj}, определяемое решением типовой задачи, в которой единственное неоднородное условие выражается равенством, записанном в квадратных скобках. Например, символом $s_{11}[V_1 = \zeta^1]$ обозначается напряжение σ_{11} на торце $\theta_1 = 0$, возникающее в упругом прямоугольнике (4.5) в результате приложения к его торцу перемещения V_1 равного ζ^1.

Построение КНДС, соответствующего условиям (4.3), можно осуществить следующим образом. Оставим в правых частях (4.3) лишь одно слагаемое (например, $-\lambda^{l-c}\zeta \overset{1}{v}_2$ в правой части второго торцевого равенства) и заметив, что в этом члене величина $\lambda^{l-c}\overset{1}{v}_2|_{\alpha_1=0}$ может зависеть только от переменного ξ_2, заменим этот множитель единицей. Получим одну из типовых задач, а именно ту, решение которой отмечается записью $[V_1 = \zeta]$. В окончательное выражение искомой реактивной силы оно войдет с множителем – $\lambda^{l-c}\overset{1}{v}_2$. Таким же приемом учитываются и все остальные слагаемые в правых частях торцевых равенств (4.3). При этом, конечно, надо помнить, что если неоднородность содержится только, например, в антиплоской задаче, то все решения плоской задачи надо дополнительно умножить на малую величину λ^{-l+p}.

Таким образом, реактивные силы $s_{lr}[\cdot]$ ($r = 1, 2, 3$) на торце $\alpha_1 = 0$ выразятся формулами

$$Rs_{1j} = -\lambda^{l-p}s_{1j}[V_1 = 1]\overset{0}{v}_1 - \lambda^{p-c}s_{1j}[V_1 = \zeta]\overset{1}{v}_1 - \lambda^{l-c}s_{1j}[V_3 = 1]\overset{0}{v}_3 -$$

$$-\lambda^0 s_{1j}[V_3 = \zeta]\overset{1}{v}_3 - \lambda^{l-p}s^*_{1j}[V_2 = 1]\overset{0}{v}_2 - \lambda^{p-c}s^*_{1j}[V_2 = \zeta]\overset{1}{v}_2 \quad (j = 1,3) \tag{4.6}$$

$$Rs_{12} = -\lambda^0 s^*_{12}[V_1 = 1]\overset{0}{v}_1 - \lambda^{-l+2p-c}s^*_{12}[V_1 = \zeta]\overset{1}{v}_1 - \lambda^{p-c}s^*_{12}[V_3 = 1]\overset{0}{v}_3 -$$

$$-\lambda^{-l+p}s^*_{12}[V_3 = \zeta]\overset{1}{v}_3 - \lambda^{2l-2p}s_{12}[V_2 = 1]\overset{0}{v}_2 - \lambda^{l-c}s_{12}[V_2 = \zeta]\overset{1}{v}_2 \tag{4.7}$$

Здесь звездочки напоминают, что в соответствующем слагаемом учтен множитель λ^{-l+p}, о котором говорилось выше. Следовательно, можно принять, что все величины $s[\cdot]$ со звездочкой или без нее соизмеримы с λ^0.

5. Граничные условия на жестко закрепленном торце. Для формулировки граничных условий двумерной теории оболочек на заделанном торце надо подставить реактивные краевые напряжения, подсчитанные по формулам (4.6), (4.7), в четыре условия выполнения модифицированного принципа Сен-Венана (3.15) при $j = 0$. В последние входят интегралы, которые должны вычисляться в симметричном по α_3 интервале $(-h, +h)$. Поэтому часть из них обратятся в нуль в силу четности или нечетности функций $s[\cdot]$ по α_3. Можно убедиться, что эти свойства выражаются следующим образом: s_{11}, s_{12}, s_{13} четны, когда в соответствующей типовой задаче неоднородные торцевые условия задаются одним из трех равенств $V_1 = 1$, $V_2 = 1$, $V_3 = \zeta$, и нечетны, если последние равенства имеют вид $V_1 = \zeta$, $V_2 = \zeta$, $V_3 = 1$.

С учетом этого, из первого и четвертого условий затухания (3.15) получаем, после замены $\alpha_3 = h\zeta$ (интегрирование по ζ от -1 до 1)

$$\lambda^{l-p}v_1^0\int s_{11}[V_1=1]d\zeta+\lambda^0 v_3^1\int s_{11}[V_3=\zeta]d\zeta+\lambda^{l-p}v_2^0\int s_{11}^*[V_2=1]d\zeta=0$$

$$\lambda^0 v_1^0\int s_{12}^*[V_1=1]d\zeta+\lambda^{l+p}v_3^1\int s_{12}^*[V_3=\zeta]d\zeta+\lambda^{2l-2p}v_2^0\int s_{12}[V_2=1]d\zeta=0 \tag{5.1}$$

а третье и второе условия (3.15) дают

$$\lambda^{p-c}v_1^1\int s_{11}[V_1=\zeta]\zeta d\zeta+\lambda^{l-c}v_3^0\int s_{11}[V_3=1]\zeta d\zeta+\lambda^{p-c}v_2^1\int s_{11}^*[V_2=\zeta]\zeta d\zeta=0 \tag{5.2}$$

$$\lambda^{p-c}v_1^1\int s_{13}[V_1=\zeta]d\zeta+\lambda^{l-c}v_3^0\int s_{13}[V_3=1]d\zeta+\lambda^{p-c}v_2^1\int s_{13}^*[V_2=\zeta]d\zeta=0$$

Равенства (5.1) и (5.2) образуют две самостоятельные системы линейных алгебраических уравнений соответственно относительно величин (v_1^0, v_2^0) и (v_3^0, v_1^1), которые согласно (1.5) пропорциональны перемещениям u_1, u_2, w и упругому углу поворота γ_1 в двумерной теории оболочек. Поскольку (5.1), (5.2) должны выполняться на крае $\alpha_1 = 0$, этими равенствами определяются искомые граничные условия, соответствующие жестко заделанному торцу.

В системах (5.1), (5.2) все определенные интегралы можно рассматривать как известные величины. Для их фактического определения потребуется решать типовые задачи, в формулировку которых не входят малые параметры. Поэтому можно считать, что все они соизмеримы с λ^0 и асимптотика коэффициентов обсуждаемых систем явно выражена входящими в них степенями λ. Поэтому легко получить и асимптотику неизвестных в уравнениях (5.1), (5.2). Она имеет вид

$$v_1^0=O(\lambda^{-l+p}v_3^1),\quad v_2^0=O(\lambda^{-2l+2p}v_3^1),\quad v_1^1=O(\lambda^0 v_2^1),\quad v_3^0=O(\lambda^{-l+p}v_2^1)\quad (\text{при } \alpha_1=0) \tag{5.3}$$

Отсюда при учете (1.5) и (4.4) следует, что принятый математический подход подтверждает выставляемые в двумерной теории из физических соображений условия

$$u_1=u_2=w=\gamma_1=0$$

и устанавливает, что их погрешность имеет вид $O(\lambda^{-l+p})$.

Замечание. Третья из оценок (5.3) не означает "полной неточности" граничного условия для γ_1. Надо учитывать, что в силу (4.4) v_2^1 при $\alpha_1=0$ обращается в нуль вместе с величинами v_2^0, v_3^0.

6. Сложно закрепленные торцы оболочки. *1°. Оболочка с частично заделанным торцом.* Рассмотрим торец $\alpha_1 = 0$, жестко заделанный на одной части своей толщины и свободный на остальной части. Примем, что заделке соответствуют неравенства $1 \geqslant \zeta \geqslant 1-\chi$ и торцевые условия, вытекающие из (1.4), а свободной части – неравенства $1-\chi \geqslant \zeta \geqslant -1$ и торцевые условия, вытекающие из (1.3), где χ – фиксированная правильная дробь.

В этом случае надо положить

$$\alpha=l,\quad \beta=l. \tag{6.1}$$

Отсюда вытекают предельные торцевые условия на заделанном участке торца

$$\lambda^{l-p}(v_1^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_1^1)+RV_1(\beta)=0,\quad \lambda^{l-p}(v_2^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_2^1)+RV_2(\alpha)=0 \tag{6.2}$$

$$\lambda^{l-c}(v_3^0+\lambda^{-l+c}\zeta v_3^1)+RV_3(\beta)=0$$

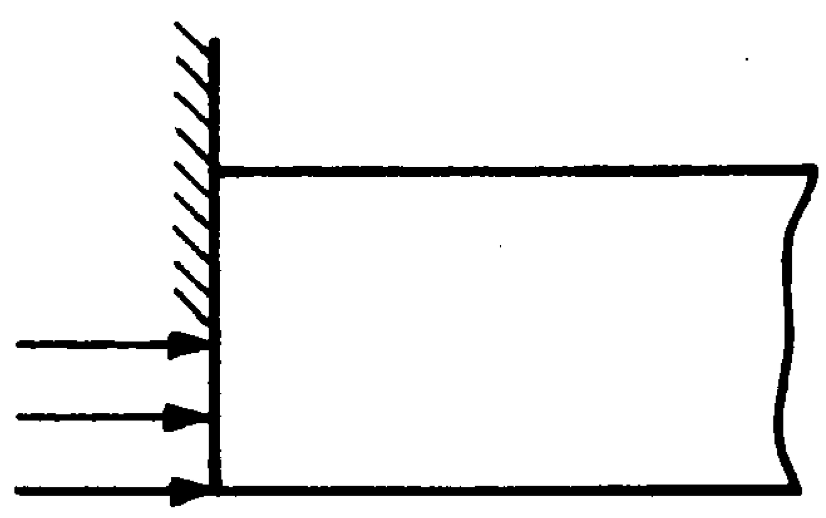
и на свободном участке торца

$$\tau_{11}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{11}^1+ES_{11}(\beta)=0,\quad \tau_{12}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{12}^1+ES_{12}(\alpha)=0 \tag{6.3}$$

$$\lambda^{-l+p}(\tau_{13}^0+\zeta\tau_{13}^1+\lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\tau_{13}^2)+ES_{13}(\beta)=0$$

(учтено, что в силу (1.9), (1.10) справедливо неравенство $-2l+3p-c<0$).

Необходимые требования, обеспечивающие выполнение сформулированных в разд. 2 свойств предельных торцевых условий, выполняются, если при α_1=0 с достаточной асимптотической точностью будут осуществляться соотношения вида (5.3), полученные для торца, заделанного по всей толщине. Отсюда и из соображений, приводимых ниже, вытекает, что в классической двумерной теории оболочек на частично заделанном торце надо ставить такие же граничные условия, как и на торце, заделанном целиком. На свободном участке торца при этом возникнут невязки, которые очевидным образом можно устранить при решении задачи о КНДС для полуполосы, изображенной на фиг. 1.



$\alpha_1=0$

Фиг. 1

Решение этой задачи всегда (без выполнения каких бы то ни было дополнительных условий) будет иметь затухающий характер, что вытекает из следующих физических соображений.

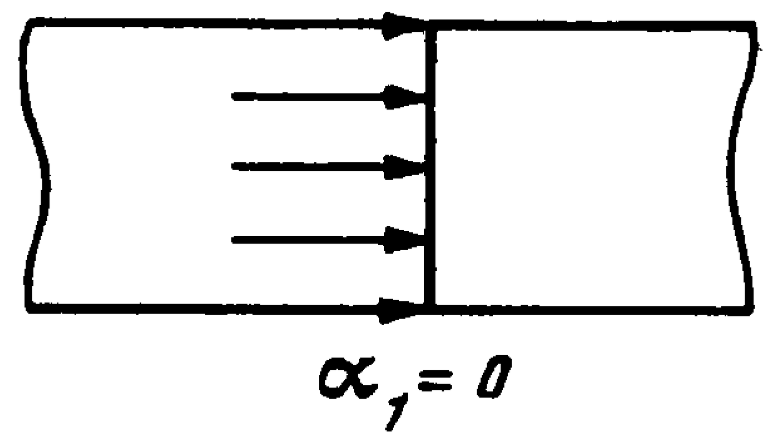
В заделанной части торца полуполосы в принципе могут возникнуть реакции, уравновешивающие любые силы, приложенные к его свободной части. Поэтому предположение о затухании решения в данном случае не находится в явном противоречии с требованием глобальной уравновешенности полосы. В тоже время принцип Сен-Венана (в том числе и модифицированный) можно трактовать как утверждение, что НДС будет затухать всегда, когда это не вызывает глобальной неуравновешенности.

Безусловное затухание КНДС в данном случае можно обнаружить и формальными рассуждениями, использованными уже в разд. 5 для полностью заделанного торца. Для этого надо ввести понятия о типовых задачах, позволяющих выразить через их решения реактивные силы, вытекающие из торцевых условий (6.2), и присоединить к этим воздействиям силы, непосредственно вытекающие из условий (6.3). Тогда четыре требования применимости модифицированного принципа Сен-Венана приведут, как и в разд. 5, к четырем линейным алгебраическим уравнениям, определяющим граничные значения величин v и τ. В эти соотношения перейдут степени λ, содержащиеся в (6.2), (6.3), и станет возможным асимптотический анализ этой системы. Он покажет, что τ-члены асимптотически пренебрежимы по сравнению с v-членами, и это эквивалентно сделанному выше выводу (он косвенно подтверждается и асимптотической структурой упомянутых торцевых соотношений).

На подробностях такого рода рассуждений здесь и ниже останавливаться не будем. Отметим только два обстоятельства: 1) они никогда не приводят в классической теории к несоответствию числа граничных условий и возможностью их выполнения; 2) в них всегда неявно предполагается, что число χ, задающие относительную толщину заделанного участка, не приближается асимптотически ни к нулю ни к единице (в противном случае для формулировки граничных условий может потребоваться предварительное решение типовых задач теории КНДС).

2°. Стык двух оболочек равной толщины. В этом случае при $\alpha_1=0$ и любом ζ должны выполняться все шесть равенств, вытекающих из (1.3), (1.4), но в них надо заменить величины τ, v, S, и V на скачки, которые они испытывают при переходе через $\alpha_1=0$.

В таких задачах для α, β останутся в силе формулы (6.1). Составив с учетом этого шесть предельных условий стыка, убеждаемся, что в соответствующих кинематичес-



Фиг. 2

ких соотношениях, т.е. в аналогах равенств (6.2), надо положить

$$\delta v_1^0 = \delta v_2^0 = \delta v_3^0 = \delta v_1^1 = 0 \tag{6.4}$$

чтобы в них исчезли все положительные степени λ и сохранился член $\lambda^0 \zeta \delta v_3^1$, обеспечивающий неоднородность задачи определения КНДС.

Эта задача должна решаться в полосе, изображенной на фиг. 2. Внешние силы, приложенные к стыку $\alpha_1 = 0$ полосы, определяются слагаемыми с величинами $\delta\tau$ в аналогах равенств (6.3). Эти силы надо подчинить условиям сен-венановского затухания. В данном случае (при $\alpha = \beta$) они в обозначениях формул (1.5) имеют вид

$$\delta T_1 = \delta S_{21} = \delta N_1 = \delta G_1 = 0 \quad (\text{при } \alpha_1 = 0) \tag{6.5}$$

Из (6.4) и (6.5) следует, что традиционная в двумерной классической теории трактовка условий стыка двух оболочек в главном подтверждается. Однако условия (6.5) показывают, что преобразование Кельвина– Тэта в этом случае приводит к ошибке: на стыке должен обращаться в нуль скачок "реального" и не "приведенного" перерезывающего усилия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01098 и 96-15-96037).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593–608.
2. *Green A.E.* On the linear theory of thin elastic shells // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1962. V. 266. № 1325. P. 143–160.
3. *Green A.E.* Boundary layer equations in the linear theory of thin elastic shells // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1962. V. 269. № 1339. P. 481–491.
4. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. *Гольденвейзер А.Л.* Математическая жесткость поверхностей и физическая жесткость оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 65–77.
6. *Гольденвейзер А.Л.* Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 96–108.
7. *Гольденвейзер А.Л.* О краевом напряженно-деформированном состоянии тонких упругих оболочек // Proc. Estonian Acad. Sci. Ser. Phys. Math. 1993. V. 42. № 1. С. 32–44.
8. *Гольденвейзер А.Л.* О внутреннем и краевом расчетах тонких упругих тел // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 1019–1032.
9. *Гольденвейзер А.Л.* Общая теория упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки) // Изв. АН РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 3–17.

Москва

Поступила в редакцию
17.III1997