ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 62. Вып. 4, 1998

УДК 539.3

© 1998 г. С.А. Назаров, М. Шпековиус-Нойгебауер

О ПОГРЕШНОСТЯХ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ УПРУГИХ ТЕЛ ОГРАНИЧЕННЫМИ

Напряженно-деформированное состояние изотропной плоскости, ослабленной полостью произвольной формы, отыскивается приближенно при решении упругой задачи в большом круге с той же полостью. Осуществляется асимптотический анализ задачи с параметром (радиус круга) и среди разнообразных, устойчивых, естественных и искусственных, краевых условий на окружности выбирается то, которое обеспечивает наилучшую аппроксимацию задачи для бесконечного тела. Указываются асимптотически точные оценки погрешностей вычисления смещений, напряжений и их производных. Обсуждаются возможные обобщения подхода, в том числе на трехмерные или двумерные клиновидные тела.

1. Постановка задач. Рассматривается изотропная однородная упругая плоскость $\mathbf{R}^n$ (пространство при $n = 3$), которая ослаблена полостью ω, содержащей начало координат $x = 0$. Вектор смещений $u = (u_1, ..., u_n)$ удовлетворяет системе уравнений Ламе

$$L(\nabla)u(x) \equiv -\mu\nabla\cdot\nabla u(x) - (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot u(x) = f(x), \quad x \in \Omega = \mathbf{R}^n \setminus \overline{\omega} \tag{1.1}$$

Здесь λ и μ – коэффициенты Ламе, f – вектор массовых сил, $\nabla = \operatorname{grad}$, $\nabla\cdot = \operatorname{div}$ и $\nabla\cdot\nabla = \Delta$ оператор Лапласа. На $\partial\omega$ назначим одно из следующих краевых условий:

$$N(x, \nabla)u(x) \equiv \sigma^{(\nu)}(u;\ x) = g(x), \quad x \in \partial\omega \tag{1.2}$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\omega \tag{1.3}$$

В (1.3) g – вектор вынужденных смещений, а в (1.2) g – вектор внешних нагрузок, ν – единичный вектор внутренней (по отношению к ω) нормали к поверхности $\partial\omega = \partial\Omega$, которая для простоты предполагается гладкой. Кроме того,

$$\sigma_{ij}(u) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda\nabla\cdot u, \quad \sigma_j^{(\nu)}(u) = \nu_i\sigma_{ij}(u)$$

По повторяющимся индексам производится суммирование в пределах от 1 до n; δ_{ij} – символ Кронекера.

Пусть $R \in [R^0, +\infty)$ и величина R^0 столь велика, что круг (шар при $n = 3$) $B_{R^0} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < R^0\}$ содержит множество $\overline{\omega} = \omega \cap \partial\omega$. Рассмотрим уравнения

$$L(\nabla)u^R(x) = f(x), \quad x \in \Omega_R = B_R / \overline{\omega} \tag{1.4}$$

$$M^R(x, \nabla)u^R(x) = h^R(x), \quad x \in \partial B_R \tag{1.5}$$

дополненные одним из краевых условий

$$N(x,\ \nabla)u^R(x) = g(x),\quad x \in \partial\omega \tag{1.6}$$

$$u^R(x) = g(x),\quad x \in \partial\omega \tag{1.7}$$

Решение u^R задачи (1.4)–(1.6) в усеченной области Ω_R интерпретируется как приближение к решению u внешней задачи. Ставится вопрос: каким следует выбрать оператор $M^R(x,\ \nabla)$ краевых условий на дальней границе ∂B_R с целью обеспечить наилучшую скорость сходимости u^R к u при $R \to \infty$?

Этот вопрос давно привлекает внимание вычислителей в связи с тем, что многие численные методы (например метод конечных элементов) требуют перехода от неограниченной области к ограниченной. Обсуждались [1–4] внешние трехмерные задачи Дирихле для операторов Лапласа и Стокса – подбирались искусственные краевые условия на ∂B_R и оценивалась разность $u - u_R$ по энергетической норме. Исследованы [5] краевые задачи для трехмерной системы Ламе (краткое описание результатов представлено в разд. 2). Рассмотрены три возможности: поверхность ∂B_R жестко защемлена ($M^R u = u$ – условия Дирихле), свободна от напряжений ($M^R u = Nu$ – условие Неймана) и на ∂B_R реализуются условия упругой заделки (смешанное краевое условие). В третьем случае оператор M_R определен формулой

$$M^R(x,\ \nabla)u^R(x) = \sigma^{(\nu)}(u^R;\ x) + A(x)u^R(x) \tag{1.8}$$

где $\nu = x|x|^{-1}$ – внешняя нормаль к ∂B_R, а A – симметрическая и неотрицательно определенная (3×3)-матрица-функция. Оказывается, что при надлежащем выборе A задача (1.4)–(1.6) с оператором M^R из (1.8) дает наилучшую точность $O(R^{-2})$ приближения.

Задачи теории упругости в неограниченных областях являются идеализацией реальных задач для тел конечных размеров. Тем не менее именно такие задачи играют главенствующую роль в асимптотическом анализе (см. [6–9] и др.), а их интегральные характеристики фигурируют в разнообразных асимптотических формулах (см. [7, 10–13] и др.). Важнейшие среди этих характеристик – матрицы (тензоры) упругой емкости и поляризации, обобщающие известные классические объекты в теории гармонических функций (см., например, [14]). Элементы названных матриц выражаются через интегралы от решений задач (1.1), (1.3) или (1.1), (1.2) со специальными правыми частями, т.е. для них достаточно повышения точности вычислений лишь вблизи отверстия ω. В разд. 3–5 выделение зон улучшенной аппроксимации производится посредством весовых оценок разности $u - u^R$ и ее производных.

Большинство приемов, используемых далее, пригодны для анизотропных или неоднородных материалов (см. разд. 6), но даже в случае изотропии приближенное нахождение матриц поляризации при помощи усечения областей не лишено смысла, поскольку простые представления их через конформные отображения в [15, 16] оказались неверными (ключевые соотношения (5)–(8) в [15] и (17), (21) в [16] ошибочны, а их исправление приводит к необозримым финальным формулам).

Результаты настоящей статьи, относящиеся к задаче (1.1), (1.2), сохраняются при замене полости ω упругим включением.

2. Трехмерная задача. Сжатием координат $x \mapsto \xi = R^{-1}x$ область Ω_R трансформируется в единичный шар с малой полостью $\omega(R) = \{\xi \in \mathbf{R}^3 : R\xi \in \omega\}$. Поэтому задачу (1.4)–(1.6) следует интерпретировать как сингулярное возмущение задачи (1.1), (1.2). Методы построения асимптотики решений подобных задач разработаны в полной мере (см. [6, 9, 17] и др.). Применим метод составных асимптотических разложений и будем искать решение в виде формального ряда

$$u^R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} R^{-k}(v^k(x) + w^k(R^{-1}x)) \tag{2.1}$$

Члены ряда v^k, зависящие от «быстрых» переменных x, суть решения задач (1.1), (1.2) с некоторыми правыми частями, определяемыми рекуррентно. Вектор-функции w^k записаны при помощи медленных переменных $\xi = R^{-1}x$ и их роль состоит в компенсации невязок, оставленных v^k в краевом условии (1.5) на ∂B_R. Они находятся при решении задач следующего типа:

$$L(\nabla_\xi)w(\xi) = 0, \quad \xi \in B_1 = \{\xi: |\xi| < 1\} \tag{2.2}$$

$$M(\xi,\ \nabla_\xi)w(\xi) = h(\xi), \quad \xi \in \partial B_1 \tag{2.3}$$

При этом $L(\nabla_\xi)$ – оператор Ламе из (1.1), содержащий дифференцирование по ξ, а оператор M из краевого условия на единичной сфере ∂B_1 связан с оператором M^R из (1.5) соотношением

$$M^R(x,\ \nabla_x) = M^R(R\xi,\ R^{-1}\nabla_\xi) = R^\varkappa M(\xi,\ \nabla_\xi) \tag{2.4}$$

Здесь $\varkappa$ – целое число, показывающее степень обобщенной однородности M^R относительно замены $x \mapsto \xi$. По сути (2.4) – первое из ограничений, накладываемых на структуру оператора искусственных краевых условий.

Логично предположить, что основной член v^0 в (2.1) совпадает с решением u внешней задачи (1.1), (1.2). Поэтому ближайшая цель – за счет выбора оператора M^R аннулировать как можно больше очередных членов ряда (2.1). Так, если окажется, что

$$v^0 = u, \quad w^0 = \ldots = w^{K-1} = 0, \quad v^1 = \ldots = v^{K-1} = 0 \tag{2.5}$$

то u^R является приближением к u порядка K и при $x \in \Omega_R$

$$u(x) - u^R(x) = O(R^{-K}) \tag{2.6}$$

Для справедливости полного разложения (2.1) приходится предполагать, что правая часть f системы (1.1) финитна (равна нулю при $|x| > R_1$). Однако окончательная формулировка результата (см. далее разд. 3) требует более слабого ограничения

$$f(x) = O(|x|^{-4-\varepsilon}) \tag{2.7}$$

Здесь ε – произвольное (вообще говоря, малое) положительное число и для укорачивания записей принято соглашение: формулу (2.7) можно дифференцировать сколь угодно раз, считая, что $\nabla O(|x|^\tau) = O(|x|^{\tau-1})$. Как известно (см., например, [18], § 6.4, и [5]), существует единственное исчезающее на бесконечности решение задачи (1.1), (1.2), которое, к тому же, допускает асимптотическое представление

$$u(x) = T(x)a + O(|x|^{-2}) \tag{2.8}$$

Здесь a – зависящий от f и g столбец (все векторы реализуются как столбцы в декартовом представлении), а T – тензор Кельвина–Сомилианы, рассматриваемый как (3×3) – матрица с элементами

$$T_{ij}(x) = \alpha |x|^{-1}[(1+2\gamma)\delta_{ij} + x_i x_j |x|^{-2}]$$

$$\alpha = (\lambda+\mu)[8\pi\mu(\lambda+2\mu)]^{-1}, \quad \gamma = \mu(\lambda+\mu)^{-1}$$

Пусть сначала M^R – оператор условий Дирихле, $\varkappa = 0$ в (2.4) и

$$M^R(x,\ \nabla)u^R(x) \equiv u^R(x) = 0, \quad x \in \partial B_R \tag{2.9}$$

Тогда главный член невязки, порождаемой u в краевом условии (2.9), равен $T(x)a =$

$= R^{-1}T(\xi)a$ и компенсируется решением w^1 системы (2.2) с условием Дирихле

$$w^1(\xi) = -T(\xi)a, \quad \xi \in \partial B_1$$

Итак, $w^0 = 0$, т.е. выполнены соотношения (2.5) с $K = 1$, однако член w^1 в (2.1) не обязан аннулироваться. Следовательно, задача (1.4), (2.9), (1.6) доставляет приближение к u первого порядка.

Изучим случай смешанных искусственных краевых условий. Пусть элементы (3×3)-матрицы определены так:

$$A_{ij}(x) = \frac{2\mu}{1+\gamma}|x|^{-1}\left(\gamma\delta_{ij} + \frac{3+5\gamma}{2(1+\gamma)}\right) \tag{2.10}$$

Для оператора M^R из (1.8) справедливо соотношение (2.4) с $\varkappa = -1$. Как показывают расчеты [5], при любом столбце a справедливо равенство

$$M^R(x, \nabla)T(x)a = \sigma^{(\nu)}(Ta; x) + A(x)T(x)a = 0 \tag{2.11}$$

Таким образом, ввиду (2.8) и (2.11) невязка решения u в условиях (1.5) составляет $O(R^{-3})$. Поэтому члены w^0 и w^1 в ряде (2.1) исчезают; к тому же, пропадает и член v^1, предназначенный для устранения дополнительной невязки, порождаемой w^1 в (1.6).

Итак, формулы (2.5) верны при $K = 2$, т.е. решение задачи (1.4)–(1.6) с $h^R = 0$ и оператором M^R, взятым из (1.8), (2.10), доставляет приближение второго порядка (лучшее, чем при постановке на ∂B_R условий (2.9)).

Если в (1.8) $A = 0$, то M^R принимает вид оператора краевых условий в напряжениях. Получающаяся задача Неймана в Ω_R разрешима при выполнении шести равенств (главные вектор и момент нагрузок обязаны аннулироваться), а ее решение определено с точностью до жестких смещений. Установлено [5] (см. также далее разд. 4), что при специальном выборе h^R в (1.5) напряжения $\sigma_{ij}(u^R)$ служат хорошим приближением для $\sigma_{ij}(u)$ в Ω_R. Тем не менее оператор M^R с A из (2.10) обладает очевидными преимуществами: однородность ($h^R = 0$) краевого условия (1.5) и однозначная разрешимость соответствующей задачи (1.4)–(1.6).

3. Обсуждение. Основные идеи построения искусственных краевых условий особенно наглядны на примере оператора Лапласа с фундаментальным решением в $\mathbf{R}^3$

$$\Phi(x) = (4\pi|x|)^{-1} \tag{3.1}$$

При этом решение u внешней задачи (Дирихле или Неймана) допускает разложение $u(x) = a_0\Phi(x) + O(|x|)^{-2})$. Оператор M^R подбирается так, чтобы он уничтожал главный асимптотический член $a_0\Phi$. В рассматриваемом скалярном случае такого уничтожения удается достичь на любой усекающей поверхности $\Gamma_R = \partial\Omega_R \backslash \partial\omega$ (на это обращалось внимание в [5], но в [1, 2] Γ_R – сфера). Именно, если $\Gamma_R = \{x: R^{-1}x \in \Gamma\}$ и Γ – поверхность с внешней нормалью ν, то

$$M^R(x, \nabla) = \nu_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\nu_j x_j}{|x|^2} \equiv \partial_\nu + A_0(x)$$

и

$$M^R(x, \nabla)\Phi(x) = -\nu_j \frac{1}{4\pi}\frac{x_j}{|x|^3} + \frac{\nu_j x_j}{|x|^2}\frac{1}{4\pi|x|} = 0 \tag{3.2}$$

Однако одного требования (3.2) недостаточно, так как получающаяся задача в Ω_R

должна обладать «хорошими» свойствами. Справедлива формула Грина, приводящая к вариационной постановке задачи,

$$-\int_{\Omega_R} u\Delta u dx + \int_{\partial\omega} u\partial_\nu u ds_x + \int_{\Gamma_R} u(\partial_\nu u + A_0 u) ds_x = \tag{3.3}$$

$$= \int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_R} A_0 |u|^2 ds_x$$

Если к тому же $A_0(x) = \nu \cdot x > 0$ при $x \in \Gamma$ (неравенство гарантировано в том случае, когда область, ограниченная Γ, звездна относительно точки $x = 0$; см. [5]), то квадратичная форма справа в (3.3) положительно определена и, значит, задача однозначно разрешима.

Задача теории упругости (1.4)–(1.6) с оператором искусственных краевых условий (1.8) обладает всеми перечисленными выше свойствами. В частности, благодаря тождеству Бетти имеем

$$\int_{\Omega_R} u \cdot Ludx + \int_{\partial\omega} u \cdot \sigma^{(\nu)}(u) ds_x + \int_{\partial B_R} u \cdot (\sigma^{(\nu)}(u) + Au) ds_x =$$

$$= 2E(u;\ \Omega_R) + \int_{\partial B_R} u \cdot Auds_x \equiv 2E_A(u;\ \Omega_R)$$

Так как функционал $E(\cdot;\ \Omega_R)$ упругой энергии вырождается только на жестких смещениях, форма $E_A(\cdot;\ \Omega_R)$ положительно определена ввиду упоминавшихся свойств матрицы A из (2.10). Однако результаты, достигнутые для трехмерной задачи теории упругости, не столь полны, как в случае оператора Лапласа, из-за требований изотропности тела Ω и сферичности Γ_R. Проверено [5], что для несферической поверхности Γ_R матрица A, найденная из условия (3.2), утрачивает симметричность, необходимую для вариационной постановки задачи (1.4)–(1.6). Авторы не знают, существуют ли для анизотропных тел усекающие поверхности, наделяющие задачу в Ω_R желательными свойствами.

Двумерный случай существенно разнится с трехмерным. Пояснения приведем на примере оператора Лапласа, у которого фундаментальное решение на плоскости имеет вид

$$\Phi(x) = -(2\pi)^{-1} \ln|x| \tag{3.4}$$

В отличие от (3.1) оно возрастает при $x \to \infty$, что приводит к «неправильному» знаку у величины A_0 и к потере разрешимости у соответствующей задачи. В самом деле

$$\partial_\nu \Phi(x) + A_0(x)\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\nu_j \frac{x_j}{|x|^2} - A_0(x)\frac{1}{2\pi}\ln|x|$$

а значит, $A_0(x) = -\nu \cdot x|x|^{-2}(\ln|x|)^{-1}$, и неравенство $A_0(x) \geqslant 0$ невозможно всюду на Γ_R (в частности, $A_0 = -(R\ln R)^{-1}$ для окружности $\Gamma_R = \partial B_R$). Именно поэтому следующие разделы, посвященные плоской задаче теории упругости, основываются на других соображениях.

Рассуждения, проведенные в разд. 2, носили формальный характер и потому нуждаются в подтверждении. Подходы, использованные ранее [1–4], дают лишь слабые, энергетические, оценки (имеющие дело с нормой в $L_2(\Omega_R)$ разности $\nabla u - \nabla u^R$). Между тем была разработана [19, 6, 9, 20, 18] методика вывода асимптотически точных оценок решений сингулярно возмущенных задач в весовых L_2 – нормах. Эта методика была перенесена [5] на весовые нормы, порожденные классами Гельдера и L_p. Сформулируем один из результатов, полученных в [5].

Пусть $l = 1, 2, \ldots$ и $p \in (1, \infty)$ – показатели гладкости и суммируемости, а β и γ – весовые показатели, удовлетворяющие неравенствам

$$-\frac{1}{2}<\beta-l-\frac{3}{2}+\frac{3}{p}<\frac{1}{2}<\gamma-l-\frac{3}{2}+\frac{3}{p}<\frac{3}{2} \qquad (3.5)$$

Предположим, что $g = 0$ (для простоты) и правая часть системы (1.1) удовлетворяет соотношению

$$|||f|||_{l-1,\gamma}=\left(\sum_{k=0}^{l-1}\int_{\Omega}|x|^{p(\gamma-l+1+k)}|\nabla^k f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<\infty$$

Здесь $\nabla^k f$ – совокупность всех производных порядка k вектор-функции f. Тогда выбор оператора M^R в виде (1.8), (2.10) гарантирует такую связь между решениями u и u^R задач (1.1), (1.2) и (1.4)–(1.6):

$$|||u-u^R|||_{l+1,\beta,R}=\left(\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\Omega_R}|x|^{p(\beta-l-1+k)}|\nabla^k u(x)-\right.$$

$$\left.-\nabla^k u^R(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant c_{\beta,\gamma}R^{\beta-\gamma}|||f|||_{l-1,\gamma} \qquad (3.6)$$

Постоянная $c_{\beta,\gamma}$ не зависит ни от f, ни от $R\geqslant R^0$. Оценка (3.6) асимптотически точна, т.е. при достижении показателем β или γ одного из пределов, указанных в (3.5), $c_{\beta,\gamma}$ теряет названное свойство независимости.

Подчеркнем, что при соблюдении условий (3.5) разность $\gamma-\beta$ фигурирующую в (3.6), можно сделать сколь угодно близкой в двум. Если $p = 2$ и $\beta = l = 1$, то (3.6) принимает вид оценки по энергетической метрике.

Неравенство (3.6), предположение (2.7) и возможность построить частичную сумму ряда (2.1) влекут поточечную весовую оценку, которая при использовании обозначений, принятых в (2.7), выглядит особенно просто. Так, если выполнено соотношение (2.7), то

$$u(x)-u^R(x)=O(R^{-2}|x|^0) \qquad (3.7)$$

Не останавливаясь на физическом истолковании условий жесткого защемления поверхности внутренней полости, подчеркнем, что все упомянутые результаты верны для условий Дирихле (1.3). Для них формула (3.7) окончательна, но в случае условий Неймана (1.2) при выполнении (2.7) с $\varepsilon > 1$ правую часть (3.7) можно уменьшить до $O(R^{-3}|x|^1)$ (см. далее разд. 4 и 6).

К вопросу об оправдании асимптотических разложений более возвращаться не будем, поскольку плоские задачи обрабатываются по той же схеме из [19, 6, 9, 18, 5].

4. Двумерная задача с краевыми условиями в напряжениях. Пусть $n = 2$, т.е. Ω и Ω_R – соответственно плоскость $\mathbf{R}^2$ и круг B_R с отверстием $\bar{\omega}$. Если справедливо требование (2.7), то решение u внешней задачи Неймана (1.1), (1.2) определено с точностью до постоянного слагаемого $c\in\mathbf{R}^2$ и допускает представление

$$u(x)=c+\sum_{j=1}^{6}b_jT^{(j)}(x)+O(|x|^{-2}) \qquad (4.1)$$

Здесь $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ – столбцы (2×2)-матрицы Буссинеска (двумерного тензора Сомилианы) с элементами

$$T_{ij}(x)=\alpha\{-\delta_{ij}\ln|x|+\gamma x_i x_j|x|^{-2}\} \qquad (4.2)$$

$$\alpha=(\lambda+3\mu)[4\pi\mu(\lambda+\mu)]^{-1},\quad \gamma=(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)^{-1}$$

$$T^{(3)}=\frac{1}{2}(\partial_1T^{(2)}-\partial_2T^{(1)}),\quad T^{(4)}=\frac{1}{2}(\partial_1T^{(2)}+\partial_2T^{(1)})$$

$$T^{(5)} = \partial_1 T^{(1)}, \quad T^{(6)} = \partial_2 T^{(2)}, \quad \partial_i = \partial / \partial x_i, \quad i = 1,\ 2 \tag{4.3}$$

Коэффициенты b_1, b_2 и b_3 имеют смысл компонент главного вектора и момента нагрузок и находятся по формулам

$$b_i = \int_\Omega f_i dx + \int_{\partial\omega} g_i ds_x$$

$$b_3 = \int_\Omega (x_2 f_1 - x_1 f_2) dx + \int_{\partial\omega} (x_2 g_1 - x_1 g_2) ds_x \tag{4.4}$$

Сначала на удаленной границе ∂B_R назначим условия Дирихле и будем искать асимптотику u^R как частичную сумму ряда (2.1). Для того чтобы уменьшить невязку u в (1.5), выберем правую часть h^R согласованно с (4.1)

$$u^R(x) = h^R(x) \equiv b_1 T^{(1)}(x) + b_2 T^{(2)}(x), \quad x \in \partial B_R \tag{4.5}$$

Подчеркнем, что b_1 и b_2 вычисляются непосредственно по f и g. Теперь в соответствии с (4.1), (4.3) невязка u в (4.5) составляет

$$c + \sum_{j=3}^{6} b_j T^{(j)}(x) + O(|x|^{-2-\varepsilon}) = c + R^{-1} \sum_{j=3}^{6} b_j T^{(j)}(\xi) + O(R^{-2-\varepsilon})$$

(Считаем, что $\varepsilon \in (0, 1)$ в (2.7)). Таким образом, $w^0 = -c$, а w^1 – решение системы (2.2) с краевым условием

$$w^1(\xi) = -\sum_{j=3}^{6} b_j T^{(j)}(\xi), \quad \xi \in \partial B_1 \tag{4.6}$$

При этом гладкая вектор-функция $R^{-1} w^1(R^{-1}x)$ порождает невязку $O(R^{-2})$ в (1.6), и значит, $v^1 = 0$, а член v^2 ряда (2.1) исчезает на бесконечности как $O(|x|^{-1})$.

Рассмотрим задачу Неймана в Ω_R. Для выполнения условий для разрешимости зададим на внешнем контуре ∂B_R усилия, уравновешивающие f и g:

$$N(x,\ \nabla) u^R(x) \equiv \sigma^{(\nu)}(u^R;\ x) = \sum_{j=1}^{3} B_j^R \sigma^{(\nu)}(T^{(j)};\ x), \quad x \in \partial B_R \tag{4.7}$$

Величины b_j^R найдены по формулам (4.4), в которых множество интегрирования Ω заменено на Ω_R; в силу (2.7)

$$|b_1^R - b_1| + |b_2^R - b_2| + R^{-1}|b_3^R - b_3| \leqslant cR^{-2-\varepsilon}$$

Так как b_j^R мало отличаются от b_j, план построения начальных членов ряда (2.1) остается тем же, что и для условий (4.5), однако можно положить $w^0 = 0$ и соотношение (4.6) следует заменить таким:

$$\sigma^{(\nu)}(w^1;\ \xi) = -\sum_{j=4}^{6} b_j \sigma^{(\nu)}(T^{(j)};\ \xi), \quad \xi \in \partial B_1 \tag{4.8}$$

Далее под v^0 подразумевается решение u, для которого $c = 0$ в (4.1), т.е. всегда $w^0 = 0$. При учете в разложении (4.1) членов $O(|x|)^{-2})$ (комбинации вторых производных столбцов $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$) удается определить и слагаемое $R^{-2}w^2$ в (2.1); оно – гладкая в $\overline{B}_1$ вектор-функция. Итак, в обоих вариантах

$$u^R(x) = v^0(x) + R^{-1} w^1(R^{-1}x) + R^{-2} v^2(x) +$$
$$+ R^{-2} w^2(R^{-1}x) + O(R^{-2-\varepsilon}|x|^0) \tag{4.9}$$

Поскольку решение самой задачи (1.1), (1.2) определено с точностью до аддитивной постоянной, имеет смысл оценивать разность $u - u^R - c^R$, где $c^R \in \mathbf{R}^2$ – любой удобный столбец. Согласно (4.9) в случае $c^R = c - R^{-1}w^1(0) - R^{-2}w^2(0)$ при $x \in \Omega_R$

$$u(x) - u^R(x) - c^R = O(R^{-2}|\,x\,|^1) \tag{4.10}$$

Обе задачи (1.4), (1.6), (4.5) и (1.4), (1.6), (4.7) дают приближение первого порядка для смещений и второго порядка для напряжений и производных смещений. Задача с условиями Дирихле обладает некоторыми преимуществами: более простой по сравнению с (4.7) структурой правой части в (4.5) и однозначной разрешимостью. К тому же произвол в выборе решений задач (1.1), (1.2) и (1.4), (1.6), (1.7) все равно оказывается неодинаковым; в первом случае это – вектор $c = (c_1, c_2)$, а во втором – вектор $c + c_3\theta$, где θ – поворот $(x_2, -x_1)$.

5. Двумерная задача с краевыми условиями в смещениях. Как и в предыдущем разделе, $n = 2$. Известно (см., например, [18], § 6.4), что при выполнении требования (2.7) существует единственное ограниченное решение u задачи (1.1), (1.3). Оно представимо в виде

$$u(x) = c + \sum_{j=3}^{6} b_j T^{(j)}(x) + O(|x|^{-2}) \tag{5.1}$$

Столбец $c = (c_1, c_2)$ и множители $b_3, \ldots, b_6$ зависят от f, g, а $T^{(j)}$ определены в (4.3). В дальнейших асимптотических конструкциях будет востребован ряд специальных, растущих на бесконечности решений однородной задачи (1.1), (1.3). Именно

$$\zeta^1 = T^{(1)} + \zeta^{10},\ \ \zeta^2 = T^{(2)} + \zeta^{20},\ \ \zeta^3 = \theta + \zeta^{30} \tag{5.2}$$

При этом ζ^{i0} и ζ^{30} – ограниченные энергетические решения задачи (1.1), (1.3) с правыми частями $f = 0$, $g = -T^{(i)}$ и $g = -\theta$ ($i = 1, 2$). В согласии с (6.1) справедливы разложения

$$\zeta^{j0}(x) = (Q_{j1}, Q_{j2}) + \sum_{m=3}^{6} P_{jm} T^{(m)}(x) + O(|x|^{-2}),\ \ j = 1,2,3 \tag{5.3}$$

Матрица $Q = (Q_{jk})_{j,k=1}^{2}$ симметрична; ее столбцы обозначаем $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$. При помощи решений (5.2) (весовых функций) вычисляются коэффициенты c_1, c_2 и b_3 из (5.1)

$$\begin{aligned} c_i &= -\int_{\Omega} f \cdot \zeta^i dx + \int_{\partial\omega} g \cdot \sigma^{(\nu)}(\zeta^i) ds_x,\ \ i = 1,2 \\ b_3 &= \int_{\Omega} f \cdot \zeta^3 dx - \int_{\partial\omega} g \cdot \sigma^{(\nu)}(\zeta^3) ds_x \end{aligned} \tag{5.4}$$

Все приведенные сведения о ζ^j можно найти в [10].

Наконец, пользуясь последним равенством в (5.4) и вспоминая, что ζ^{30} решает задачу (1.1), (1.3) с $f = 0$, $g = -\theta$, находим знак коэффициента P_{33} в представлении (5.3) при $j = 3$

$$P_{33} = \int_{\partial\omega} \theta \cdot \sigma^{(\nu)}(\zeta^3) ds_x = -\int_{\partial\omega} \zeta^{30} \cdot \sigma^{(\nu)}(\zeta^{30}) ds_x = -2E(\zeta^{30}; \Omega) < 0 \tag{5.5}$$

В (5.5) применено тождество Бетти, а под E подразумевается функционал упругой энергии

$$E(u; \Xi) = \frac{1}{2\mu} \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Xi} \left(\sigma_{ij}(u)^2 - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \sigma_{ii}(u) \sigma_{jj}(u) \right) dx \tag{5.6}$$

Перейдем к исследованию задачи (1.4), (1.5), (1.7) в Ω_R. Поставим на удаленной границе ∂B_R условие Дирихле (2.9). Оно берется однородным потому, что согласно (5.4) коэффициенты c_i в (5.1) недоступны без предварительного решения внешней задачи (1.1), (1.3) – нужно знать весовые функции ζ^i. При построении асимптотики воспользуемся предложенным в [21] анзацем (см. также [17, 6, 9]) и будем искать основной член ряда (2.1) для u^R как линейную комбинацию

$$v^0 = u + B_1\zeta^1 + B_2\zeta^2 \tag{5.7}$$

Столбец B коэффициентов B_i в (5.7) вычислим при определении члена w^0 ряда (2.1), исходя из требования $w^0(0) = 0$ (в противном случае невязка $w^0(0) \neq 0$ суммы $v^0 + w^0$ в краевом условии (1.7) недопустимо велика). В соответствии с (5.1)–(5.3) и (4.2) на окружности ∂B_R

$$v^0(x) = c + \sum_{j=1}^{2} B_j(T^{(j)}(x) + Q^{(j)}) + O(R^{-1}) = H(\xi) + O(R^{-1})$$

$$H(\xi) = c + \alpha B \ln R + \sum_{j=1}^{2} B_j(T^{(j)}(\xi) + Q^{(j)})$$

Следовательно, w^0 – решение системы (2.2) с краевым условием $w^0(\xi) = -H(\xi)$, $\xi \in \partial B_1$. Оно представимо в виде

$$w^0(\xi) = -c - \alpha B \ln R + \sum_{j=1}^{2} B_j(\eta^{j0}(\xi) - Q^{(j)}) \tag{5.8}$$

Через η^{j0} обозначено решение той же системы, совпадающее с $-T^{(j)}$ на ∂B_1. Сумма $\eta^j = T^{(j)} + \eta^{j0}$ описывает поле смещений в диске B_1 с защемленным краем под действием сосредоточенной в его центре единичной силы в направлении x_j. Из столбцов $q^{(j)} = \eta^{j0}(0)$ составим (2×2)-матрицу q (она симметрическая). В силу (5.8) нужное соотношение $w^0(0) = 0$ равносильно алгебраической системе

$$\{-\alpha \mathbf{1} \ln R + q - Q\}B = c \tag{5.9}$$

Здесь $\mathbf{1}$ – единичная (2×2)-матрица. Матрица системы (5.9) неособенная при достаточно большом R.

Таким образом, из (5.9) находятся коэффициенты $B_j = O(|\ln R|^{-1})$. Кроме того,

$$w^0(\xi) = \sum_{j=1}^{2} B_j(\eta^{j0}(\xi) - \eta^{j0}(0)) = O(|\ln R|^{-1})$$

Итак, постановка на ∂B_R однородных условий Дирихле привносит возмущение $O(|\ln R|^{-1})$ уже в главный член v^0 ряда (2.1). Разумеется, $u^R(x)$ сходится к $u(x)$ при $R \to \infty$ для любого фиксированного x, однако скорость сходимости весьма мала. Укажем напоследок, что

$$\left|u(x) - u^R(x)\right| \leqslant c_0 |\ln R|^{-1}(1 + |\ln|x||)$$

$$\left|\nabla^k u(x) - \nabla^k u^R(x)\right| \leqslant c_k |\ln R|^{-1} |x|^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Теперь обратимся к задаче (1.4), (1.5), (1.7) с условиями в напряжениях на ∂B_R (т.е. $M^R = N$). Сначала попробуем взять $v^0 = u$. Вычисляя невязку u в однородных условиях (4.7) на ∂B_R, заключаем, что $w^0 = 0$, а член w^1 обязан удовлетворять системе (2.2) и краевому условию

$$\sigma^{(\nu)}(w^1;\xi) = -\sum_{j=3}^{6} b_j \sigma^{(\nu)}(T^{(j)};\xi), \quad \xi \in \partial B_1 \tag{5.10}$$

Если $b_3 = 0$, то полученная задача Неймана в B_1 не имеет гладкого решения (главный момент нагрузки не равен нулю). Поэтому приходится изменить структуру основного члена ряда (2.1). Положим

$$v^0 = u - b_3 P_{33}^{-1} \zeta^3 \tag{5.11}$$

Вектор-функция v^0 удовлетворяет задаче (1.1), (1.3) и в соответствии с (5.1)–(5.3), (5.5) допускает разложение

$$v^0(x) = \theta(x) + C + \sum_{j=4}^{6} C_j T^{(j)}(x) + O(|x|^{-2}) \tag{5.12}$$

Важными оказываются два обстоятельства: из (5.12) исчез член $T^{(3)}$, порождавший ненулевой момент в нагрузке (5.10), и оператор N аннулирует жесткое смещение $\theta + C$.

Итак, краевое условие для w^1 приобретает вид (4.8) (с новыми коэффициентами), а соответствующая задача становится разрешимой. Тем не менее ввиду (5.11), (2.2) $u(x) - u^R(x) = O(1)$, и задачу (1.4), (1.7) с однородным условием (4.7) вообще нельзя рассматривать как аппроксимацию задачи (1.1), (1.3).

Неудовлетворительные результаты были получены при постановке на $\Gamma_R = \partial B_R$ обоих – устойчивого (Дирихле) и естественного (Неймана) – краевых условий; попытаемся обнаружить подходящее искусственное условие. При асимптотическом анализе задачи в напряжениях губительным оказалось наличие третьего (связанного с моментом) условия разрешимости задачи Неймана в B_1. Условия разрешимости порождаются полями, на которых аннулируется функционал энергии (это наблюдение тривиально благодаря тождеству Бетти). Существует множество формул Грина для оператора Ламе, в правых частях которых появляются квадратичные формы, отличающиеся от (5.6). Укажем одну из них

$$\int_{\Xi} u \cdot Lu dx + \int_{\partial\Xi} u \cdot \tau^{(\nu)}(u) ds_x = 2G(u;\Xi) \tag{5.13}$$

$$G(u;\Xi) = \frac{1}{2} \int_{\Xi} (\mu |\nabla u_1|^2 + \mu |\nabla u_2|^2 + (\lambda + \mu) |\nabla \cdot u|^2) dx \tag{5.14}$$

$$\tau_{ii}(u) = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \nabla \cdot u, \quad \tau_{12}(u) = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \tau_{21}(u) = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$
$$\tau^{(\nu)} = (\tau_1^{(\nu)}, \tau_2^{(\nu)}), \quad \tau_i^{(\nu)} = \nu_1 \tau_{i1} + \nu_2 \tau_{i2} \quad (i = 1,2) \tag{5.15}$$

Величины (5.15) и (5.14) не имеют физического смысла; их можно называть квазинапряжениями и квазиэнергией. Однако решающим оказывается тот факт, что $G(u; \Xi) = 0$ лишь при постоянном векторе u; теперь член w^1 ряда (2.1) является решением системы (2.2) с краевым условием

$$M(\xi, \nabla_\xi) w^1(\xi) \equiv \tau^{(\nu)}(w^1;\xi) = -\sum_{j=3}^{6} b_j \tau^{(\nu)}(T^{(j)};\xi), \quad \xi \in \delta B_1 \tag{5.16}$$

Так как среднее правой части (5.16) по ∂B_1 равно нулю, существует гладкое решение этой задачи. Оно определено с точностью до постоянного слагаемого и становится единственным при нормировке $w^1(0) = 0$. По обычной схеме убеждаемся в том, что в (2.1) $v^0 = u$, $w^0 = 0$, $v^1 = 0$ (в частности, равенства (2.5) верны при $K = 1$).

Итак, если определить оператор $M^R(x, \nabla)$ формулами (2.4) с $\varkappa = 1$ и (5.16), то задача (1.4), (1.5), (1.7) доставляет приближение первого порядка к решению задачи (1.1), (1.3), несомненно лучшее, чем в предшествующих случаях. Наконец, выполняется соотношение

$$u(x) - u^R(x) = O(R^{-2}\,|\,x\,|^1) \tag{5.17}$$

Постановка указанных искусственных условий для аппроксимации внешней задачи Неймана также обладает своими достоинствами: при сохранении точности приближения задача (1.4)–(1.6) имеет тот же произвол (постоянные векторы) в выборе решения, что и задача (1.1), (1.2).

6. Замечания, следствия и обобщения. 1°. Результаты, полученные в разд. 4 и 5, остаются в силе и при произвольном (необязательно круговом) усекающем контуре $\Gamma_R = \{x\colon R^{-1}x \in \Gamma\}$. Более того, в случае устойчивых или естественных условий упругий материал может быть анизотропным или даже неоднородным, но с упругими модулями, быстро стабилизирующими на бесконечности. Какая-либо неоднородность препятствует построению искусственных условий типа (5.16) (так как формула Грина фиксирована). Если же при анизотропии удалось написать формулу Грина (5.13) с квазиэнергией G, вырождающейся только на постоянных векторах, то на Γ_R можно ставить краевые условия в квазинапряжениях.

2°. Весовые оценки, использованные в [5] и здесь, наилучшим образом отражают характер поведения разности $u(x) - u^R(x)$ в различных зонах (вблизи $\partial\omega$, при $|\,x\,| = O(R)$ и пр.). Поясним это сравнением (неулучшаемых) соотношений (3.7) и (5.17) в случае условий (1.3) при $n = 3$ и (1.2) при $n = 2$.

Формула (3.7) сообщает, что в шаре с фиксированным (не зависящим от R радиусом) разность $u - u^R$ и все ее производные не превосходят по модулю величины cR^{-2} (множитель c зависит от радиуса и порядка производной). Та же оценка сохраняется для самой разности всюду в Ω_R, но на больших (порядка R) расстояниях она улучшается для производных. В частности, при $|\,x\,| > R/2$ (вблизи ∂B_R) согласно (3.7) имеем

$$\left|\nabla^k u(x) - \nabla^k u^R(x)\right| \le c_k R^{-2} |x|^{-k} \le C_k R^{-2-k}$$

Точность аппроксимации около контура $\partial\omega$, гарантированная формулой (5.17), составляет $O(R^{-2})$, несмотря на то что в целом приближение имеет лишь первый порядок, – в соответствии с (5.17) расхождение $u(x)$ и $u^R(x)$, равное $O(R^{-2})$ на $\partial\omega$, увеличивается при росте $|\,x\,|$ до $O(R^{-1})$. Таким образом, (5.17) содержит более точную информацию о $|\,u(x) - u^R(x)\,|$, чем оценка по максимуму модуля (2.6) с $K = 1$ (сравни конец разд. 1). Продолжая "расшифровку" (5.17), имеем

$$\left|\nabla^k u(x) - \nabla^k u^R(x)\right| \le c_k R^{-2} |x|^{1-k}$$

Итак, для первых производных смещений (деформаций, напряжений) ошибка не превышает $c_1 R^{-2}$ всюду в Ω_R, а для старших производных она уменьшается при удалении от $\partial\omega$.

В интегральных оценках вида (3.6) выделение зон, в которых аппроксимация характеризуется различными порядками точности, достигается варьированием весовых показателей β и γ. Отметим также, что разнородность весовых оценок в разд. 4 вызвана необходимостью модификации весовых норм для двумерных задач Неймана ([18], § 6.1).

3°. В плоской области Ω рассмотрим задачу Неймана

$$-\Delta u(x) = f(x), \ x \in \Omega; \ \partial_\nu u(x) = g(x), \ x \in \partial\omega \tag{6.1}$$

В качестве приближающей возьмем такую задачу:

$$-\Delta u^R(x) = f(x), \ \ x \in \Omega_R = B_R \setminus \overline{\omega}; \ \ \partial_\nu u^R(x) = g(x), \ \ x \in \partial\omega \tag{6.2}$$

$$\partial_\nu u^R(x) + R^{-1} u^R(x) = -b_0 (2\pi R)^{-1}(1 + \ln R), \ \ x \in \partial B_R \tag{6.3}$$

При этом $\partial_\nu = \nu\cdot\nabla$, скалярная функция f подчинена требованию (2.7) с $\varepsilon > 1$ и

$$b_0 = \int_\Omega f(x)dx + \int_{\partial\omega} g(x)ds_x \tag{6.4}$$

Для решения u справедливо разложение

$$u(x) = b_0\Phi(x) + c + \sum_{i=1}^{2} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(x) + O(|x|^{-2}) \tag{6.5}$$

Здесь Φ – фундаментальное решение (3.4), а c – произвольная постоянная. Фиксируем $u = v^0$ так, что $c = 0$ в (6.5). Искусственное условие (6.3) характерно тем, что при $x \in \partial B_R$

$$\left(\partial_\nu + \frac{1}{R}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\left(\partial_\nu + \frac{1}{R}\right)\frac{x_i}{|x|^2} = 0$$

Следовательно, при построении ряда (2.1) обнаруживаем, что v^0 порождает в (6.3) невязку $O(R^{-3})$, а значит, $w^0 = w^1 = 0$ и $v^1 = v^2 = 0$. После учета в (6.4) асимптотических членов порядков $|x|^{-2}$ и $|x|^{-3}$ (комбинации старших производных Φ) можно определить w^2 и v^3, w^3 в (2.1).

Итак, аналогично (4.10) найдется такая постоянная c^R, что в обозначениях (2.7)

$$u(x) - u^R(x) - c^R = O(R^{-3}|x|) \tag{6.6}$$

Повышение точности аппроксимации произошло за счет выбора того же оператора (3.2), что и в трехмерной ситуации, однако теперь он уничтожает не главный, а первый неучтенный в правой части (6.3) член разложения (6.4).

При помощи аффинного преобразования любой скалярный эллиптический оператор второго порядка трансформируется в оператор Лапласа. Поэтому для внешней задачи Неймана с любым таким оператором существует усекающий контур Γ_R и оператор M_R на нем, доставляющие приближение повышенной точности (6.6). Авторам не удалось построить подобные поверхность и оператор для системы уравнений Ламе.

4°. В случае оператора Лапласа все приемы из предыдущих разделов без труда переносятся на угловые области. Обсудим задачу Дирихле

$$-\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega;\ u(x) = g(x),\ x \in \partial\Omega \tag{6.7}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ – область с гладкой (для простоты) границей, совпадающая вне круга B_{R0} с углом $\mathbf{K} = \{x\colon r > 0,\ \varphi \in (0, \alpha)\}$; r, φ – полярные координаты, $r = |x|$, $\alpha \in (0, 2\pi]$. Будем считать, что носители f и g компактны (это условие можно заменить аналогичным (2.7)). Существует единственное ограниченное решение задачи (6.7); для него имеет место разложение

$$u(x) = c_1 r^{-\Lambda}\sin(\Lambda\varphi) + c_2 r^{-2\Lambda}\sin(2\Lambda\varphi) + O(|x|^{-3\Lambda}) \tag{6.8}$$

В (6.8) $\Lambda = \pi/\alpha$; c_1 и c_2 – зависящие от f и g постоянные. Главный член разложения (6.8) подсказывает вид искусственных условий на дуге $\Gamma_R = \partial B_R \cap \mathbf{K}$, а именно

$$\begin{aligned}
&-\Delta u^R(x) = f(x), \quad x \in \Omega_R = \Omega \cap B_R\\
&u^R(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega_R \cap B_R\\
&\partial_\nu u^R(x) + \Lambda R^{-1} u^R(x) = 0, \quad x \in \Gamma_R
\end{aligned} \tag{6.9}$$

С помощью методов, разработанных в [7, 9, 19], решение u^R раскладывается в асимптотический ряд по обратным степеням параметра $R^{-\Lambda}$. Укажем начальные члены этого ряда

$$u^R(x) = u(x) + R^{-2\Lambda} w^2(R^{-1}x) + R^{-3\Lambda} v^3(x) + \ldots \tag{6.10}$$

Функция w^2 находится из задачи в секторе $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K} \cap B_1$

$$-\Delta_\xi w^2(\xi) = 0,\ \ \xi \in \mathbf{K}_1;\ \ w^2(\xi) = 0,\ \ \xi \in \partial\mathbf{K} \cap B_1$$

$$\partial_{\nu(\xi)} w^2(\xi) + \Lambda w^2(\xi) = c_2 \Lambda |\xi|^{-2\Lambda} \sin(2\Lambda\varphi), \quad \xi \in \Gamma_1$$

Справедливо представление $w^2(\xi) = b_1 |\xi|^{\Lambda} \sin(\Lambda\varphi) + O(|\xi|^{2\Lambda})$.

Введем геометрическое ограничение $\Omega \subset \mathbf{K}$; оно непринципиально, но укорачивает формулы (иначе согласно [7, 9, 19] в (6.10) требуется умножить w^2 на срезающую функцию). В этом случае v^3 – решение задачи Дирихле с финитной правой частью

$$-\Delta v^3(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad v^3(x) = -b_1 r^{\Lambda} \sin(\Lambda\varphi), \quad x \in \partial\Omega$$

Выполняется соотношение $v^3(x) = O(|x|^{-\Lambda})$.

Подводя итог, имеем

$$u(x) - u^R(x) = O(R^{-3\Lambda} |x|^{\Lambda})$$

Для справедливости (6.11) к f и g были предъявлены жесткие требования. Их можно ослабить, обратившись к асимптотически точным оценкам, которые получаются прямой конкретизацией результатов [7, 9, 19], относящихся к сингулярным возмущениям областей вблизи конических, угловых или внутренних точек. В частности, из-за особенностей старших производных решения u^R в угловых точках (концах дуги Γ_R; при $f \neq 0$, $g \neq 0$ на Γ_R) оценивание производится по нормам, содержащим дополнительные весовые множители, степени расстояний до этих точек. Все сказанное в равной мере относится и к задаче Неймана в Ω, для которой искусственное условие (6.9) принимает форму

$$\partial_\nu u^R(x) + \Lambda R^{-1} u^R(x) = (2\alpha R)^{-1} b_0 (1 + \Lambda \ln R), \quad x \in \Gamma_R$$

Оно вполне аналогично условию (6.3), причем даже множитель b_0 вычисляется по прежней формуле (6.4). Вообще связь между задачами в угловой области и во внешности компактного множества более тесная, чем кажется на первый взгляд.

Действительно, конформным преобразованием угол $\mathbf{K}$ и область Ω трансформируются соответственно в полуплоскость $\mathbf{R}^2_+$ и в область $\mathbf{R}^2_+ \setminus \Upsilon$, где Υ – некоторый компакт; теперь продолжение по четности (условия Неймана) или нечетности (условия Дирихле) обеспечивают переход к задаче на плоскости с отверстием. Такие преобразования невозможны для упругой задачи в напряжениях и потому вопрос о построении искусственных краевых условий остается открытым даже для простейшей задачи о трещине нормального отрыва в изотропной плоскости. Впрочем, сами асимптотически точные оценки (например, для решений задач с естественными условиями на Γ_R) опять-таки получаются ссылкой на общие результаты [7, 9, 19] (см. также [22]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01069).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goldstein C.I.* The finite element method with nonuniform mesh sizes for unbounded domains // Math. Comput. 1981. V. 36. № 154. P. 387–404.
2. *Goldstein C.I.* Multigrid method for elliptic problems in unbounded domains // SIAM J. Numer. Anal. 1993. V. 30. № 1. P. 159–183.
3. *Guirguis G.H.* On the coupling boundary integral and finite element methods for the exterior Stokes problem in 3–D // SIAM J. Numer. Anal. 1987. V. 24. № 2. P. 310–322.
4. *Guirguis G.H., Gunzburger M.D.* On the approximation of the exterior Stokes problem in three dimensions // RAIRO Modél. Math, Anal. Numer. 1987. V. 21. № 3. P. 445–464.
5. *Назаров С. А., Шпековиус-Нойгебауер М.* Аппроксимация неограниченных областей ограниченными. Краевые задачи для оператора Ламе // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 5. С. 229–268.
6. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981. 206 с.

7. *Назаров С.А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 117 с.
8. *Назаров С.А., Паукшто М.В.* Дискретные задачи и осреднение в задачах теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 93 с.
9. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verlag, 1990. 431 S.
10. *Зорин И.С., Назаров С.А.* О напряженно-деформированном состоянии упругого пространства с тонким тороидальным включением // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 79–86.
11. *Зорин И.С., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Об использовании тензора упругой поляризации в задачах механики трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 128–134.
12. *Зорин И.С., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* О применении тензоров упругой емкости, поляризации и присоединенной деформации // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. Вып. 16. С. 75–91.
13. *Назаров С.А.* Упругие емкость и поляризация дефекта в упругом слое // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 57–65.
14. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
15. *Мовчан А.Б.* Матрицы поляризации и емкости Винера для оператора теории упругости в двусвязных областях // Мат. заметки. 1990. Т. 47. № 2. С. 151–153.
16. *Movchan A.B.* Integral characteristics of elastic inclusions and cavities in the two-dimensional theory of elasticity // European J. Appl. Math. 1992. V. 3. N 1. P. 21–30.
17. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
18. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994. 525 p.
19. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области // Проблемы мат. анализа. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. Вып. 8. С. 72–153.
20. *Nazarov S.A.* Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions // RAIRO Modél. Nath. Anal. Numer. 1993. V. 27. № 6. P. 777–799.
21. *Ильин А.М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием // Мат. сб. 1977. Т. 103. № 2. С. 265–284.
22. *Мазья В.Г., Назаров С.А.* Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
13.XI.1996