УДК 539.3

© 1998 г. В.М. Мальков

О ФОРМАХ СВЯЗИ ТЕНЗОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В НЕЛИНЕЙНО УПРУГОМ МАТЕРИАЛЕ

В развитии работ В.В. Новожилова [1–3] аналогичным методом, основанным на тригонометрическом представлении тензоров, получены новые зависимости тензоров напряжений и деформаций, составляющих энергетические пары, для нелинейно упругого материала. Естественным образом вводятся ранее не использовавшиеся тензоры деформаций и напряжений сдвига. Установлено, что единичный тензор, девиатор и тензор сдвига образуют ортогональный тензорный базис. Тензор напряжений можно разложить по базису тензора деформации и наоборот. В результате применения такого разложения нелинейный закон упругости записан в компактной и физически наглядной форме. Показано, что в главных осях напряжения выражаются через деформации и обратно с помощью линейных соотношений, а нелинейность содержится в коэффициентах, которые являются функциями смешанных инвариантов тензоров, введенных В.В. Новожиловым, обобщенных модулей объемного сжатия и сдвига и фазы подобия девиаторов. Рассматриваются соотношения для разных энергетических пар тензоров, в том числе для тензоров истинных напряжений и деформаций, где обобщенные модули упругости имеют физический смысл при больших деформациях.

1. Нелинейный закон упругости обычно строят для тензора деформаций Грина $\mathbf{E}$ и тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа $\boldsymbol{\Sigma}$. Эти тензоры симметричны, соосны и образуют энергетическую пару; приращение работы деформации можно записать в виде $\delta W = \boldsymbol{\Sigma} : \delta\mathbf{E}$ (две точки означают операцию свертки).

Выделим в тензорах шаровую и девиаторную части:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{3}e\mathbf{I} + \mathbf{D}_E, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{3}\sigma\mathbf{I} + \mathbf{D}_\Sigma \tag{1.1}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор, e – tr $\mathbf{E}$, σ = tr $\boldsymbol{\Sigma}$ – первые инварианты тензоров. Наряду с девиаторами тензоров $\mathbf{D}_E$ и $\mathbf{D}_\Sigma$ введем в рассмотрение два новых тензора $\mathbf{S}_E$ и $\mathbf{S}_\Sigma$, которые раньше не употреблялись. В главных осях деформации имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_E &= \left(\varepsilon_i - \frac{1}{3}e\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{S}_E = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_k - \varepsilon_j)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i. \\ \mathbf{D}_\Sigma &= \left(\sigma_i - \frac{1}{3}\sigma\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{S}_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_k - \sigma_j)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{e}_i$ – векторы главного ортонормированного базиса; индексы i, j, k = 1, 2, 3 образуют циклическую перестановку, по индексу i выполняется суммирование.

Компоненты тензоров $\mathbf{S}_E$ и $\mathbf{S}_\Sigma$ пропорциональны главным деформациям сдвига и главным касательным напряжениям, поэтому назовем их тензорами сдвига для деформаций и напряжений соответственно. Для тензоров (1.2) выполняются соотношения

$$\begin{gathered}
\mathbf{D}_E : \mathbf{I} = \mathbf{S}_E : \mathbf{I} = 0, \quad \mathbf{D}_\Sigma : \mathbf{I} = \mathbf{S}_\Sigma : \mathbf{I} = 0 \\
\mathbf{D}_E : \mathbf{S}_E = 0, \quad \mathbf{D}_E : \mathbf{D}_E = \mathbf{S}_E : \mathbf{S}_E = 2\bar{e}^2 \\
\mathbf{D}_\Sigma : \mathbf{S}_\Sigma = 0, \quad \mathbf{D}_\Sigma : \mathbf{D}_\Sigma = \mathbf{S}_\Sigma : \mathbf{S}_\Sigma = 2\bar{\sigma}^2 \\
\mathbf{D}_E^2 + \mathbf{S}_E^2 = \frac{4}{3}\bar{e}^2\mathbf{I}, \quad \mathbf{D}_\Sigma^2 + \mathbf{S}_\Sigma^2 = \frac{4}{3}\bar{\sigma}^2\mathbf{I}
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\bar{e}$ и $\bar{\sigma}$ – интенсивности деформаций сдвига и касательных напряжений.

Из этих соотношений следует, что тензоры ($\mathbf{I}, \mathbf{D}_E, \mathbf{S}_E$) и ($\mathbf{I}, \mathbf{D}_\Sigma, \mathbf{S}_\Sigma$) образуют ортогональные тензорные базисы.

Формулы (1.3) инвариантны по отношению к системе координат, поэтому последние два равенства (1.3) можно рассматривать как определение тензоров сдвига через девиаторы в системе координат общего вида.

Отметим некоторые свойства девиаторов и тензоров сдвига, выраженных равенствами (1.3): свертка девиатора и тензора сдвига равна нулю, эти тензоры равны по норме (под нормой понимается свертка), сумма квадратов девиатора и тензора сдвига пропорциональна единичному тензору.

Главные значения девиаторов и тензоров сдвига запишем в тригонометрической форме

$$\begin{gathered}
\varepsilon_i - \frac{1}{3}e = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\cos\varphi_i, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_k - \varepsilon_j) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\sin\varphi_i \\
\sigma_i - \frac{1}{3}\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}\cos\psi_i, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_k - \sigma_j) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}\sin\psi_i
\end{gathered} \tag{1.4}$$

где индексы $i, j, k = 1, 2, 3$ образуют циклическую перестановку. Углы φ_i и ψ_i для разных значений индекса $i = 1, 2, 3$ различаются на постоянные числа, кратные $2\pi/3$. Далее будем считать, что начало отсчета углов φ_i и ψ_i в девиаторной плоскости $e = 0$ и $\sigma = 0$ выбрано одинаковым образом (это возможно, поскольку тензоры $\mathbf{E}$ и $\mathbf{\Sigma}$ соосны), тогда $\omega^* = \psi_i - \varphi_i$. Угол ω^* называют фазой подобия девиаторов тензоров. Формулы можно представить в тензорном виде

$$\begin{gathered}
\mathbf{D}_E = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\cos\mathbf{A}_E, \quad \mathbf{S}_E = -\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\sin\mathbf{A}_E \\
\mathbf{D}_\Sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}\cos\mathbf{A}_\Sigma, \quad \mathbf{S}_\Sigma = -\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}\sin\mathbf{A}_\Sigma
\end{gathered}$$

Здесь введены тензоры углов вида $\mathbf{A}_E$ и $\mathbf{A}_\Sigma$, которые в главных осях имеют компоненты φ_i и ψ_i. Разность этих тензоров пропорциональна единичному тензору: $\mathbf{A}_\Sigma - \mathbf{A}_E = \omega^*\mathbf{I}$.

На общей девиаторной плоскости рассматриваемых тензоров найдем векторы напряжений и деформаций ($\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к этой плоскости)

$$\begin{gathered}
\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{3}e\mathbf{n} + \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{e}\boldsymbol{\nu}_e, \quad \mathbf{D}_E\cdot\mathbf{n} = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{e}\boldsymbol{\nu}_e, \quad \mathbf{S}_E\cdot\mathbf{n} = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{e}\mathbf{t}_e \\
\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{3}\sigma\mathbf{n} + \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma}\boldsymbol{\nu}_\sigma, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_\Sigma = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma}\boldsymbol{\nu}_\sigma, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_\Sigma = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma}\mathbf{t}_\sigma
\end{gathered}$$

Можно показать, что векторы ($\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\nu}_e$, $\mathbf{t}_e$) и ($\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\nu}_\sigma$, $\mathbf{t}_\sigma$) образуют ортогональные базисы, ω^* – угол между векторами $\boldsymbol{\nu}_e$, $\boldsymbol{\nu}_\sigma$.

Девиатор и тензор сдвига для тензора деформаций в векторном базисе девиаторной плоскости имеют вид

$$\mathbf{D}_E = \frac{3D_e}{2\bar{e}^2}(\boldsymbol{\nu}_e\boldsymbol{\nu}_e - \mathbf{t}_e\mathbf{t}_e) - \frac{3S_e}{2\bar{e}^2}(\boldsymbol{\nu}_e\mathbf{t}_e + \mathbf{t}_e\boldsymbol{\nu}_e) + \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{e}(\boldsymbol{\nu}_e\mathbf{n} + \mathbf{n}\boldsymbol{\nu}_e)$$

$$\mathbf{S}_E = -\frac{3S_e}{2\bar{e}^2}(\boldsymbol{\nu}_e\boldsymbol{\nu}_e - \mathbf{t}_e\mathbf{t}_e) - \frac{3D_e}{2\bar{e}^2}(\boldsymbol{\nu}_e\mathbf{t}_e + \mathbf{t}_e\boldsymbol{\nu}_e) + \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{e}(\mathbf{t}_e\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{t}_e)$$

Здесь D_e, S_e – определители девиатора и тензора сдвига.

Аналогичное представление имеет место для тензора напряжений в соответствующем базисе девиаторной плоскости.

2. Предполагаем, что материал идеально упругий (гиперупругий по другой терминологии) и его механические свойства определяются упругим потенциалом Φ (удельной энергией деформации). Дифференциал упругого потенциала можно записать следующим образом [3]:

$$d\Phi = K^* e de + 4G^*\bar{e}(\cos\omega^* d\bar{e} + \bar{e}\sin\omega^* d\varphi) \tag{2.1}$$

где K^* и G^* – обобщенные модули объемного сжатия и сдвига, определяемые соотношениями

$$\sigma = 3K^* e, \quad \bar{\sigma} = 2G^*\bar{e} \tag{2.2}$$

Дифференцируя потенциал Φ с помощью выражения (2.1) по тензору деформаций, получим нелинейный закон упругости для данной энергетической пары тензоров

$$\mathbf{\Sigma} = d\Phi / d\mathbf{E} = K^* e\mathbf{I} + 2G^*(\cos\omega^*\mathbf{D}_E + \sin\omega^*\mathbf{S}_E) \tag{2.3}$$

При дифференцировании потенциала Φ применялись формулы

$$de / d\mathbf{E} = \mathbf{I}, \quad d\bar{e}^2 / d\mathbf{E} = \mathbf{D}_E, \quad 2\bar{e}^2 d\varphi / d\mathbf{E} = \mathbf{S}_E$$

Выражение (2.3) есть разложение тензора напряжений по базису тензора деформаций ($\mathbf{I}$, $\mathbf{D}_E$, $\mathbf{S}_E$). Из соотношений (1.1) и (2.3) следует

$$\mathbf{D}_\Sigma = 2G^*(\cos\omega^*\mathbf{D}_E + \sin\omega^*\mathbf{S}_E), \quad \mathbf{S}_\Sigma = 2G^*(-\sin\omega^*\mathbf{D}_E + \cos\omega^*\mathbf{S}_E) \tag{2.4}$$

Закон упругости (2.3) и соотношения (2.4) легко обращаются:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{9K^*}\sigma\mathbf{I} + \frac{1}{2G^*}(\cos\omega^*\mathbf{D}_\Sigma - \sin\omega^*\mathbf{S}_\Sigma) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{D}_E = \frac{1}{2G^*}(\cos\omega^*\mathbf{D}_\Sigma - \sin\omega^*\mathbf{S}_\Sigma), \quad \mathbf{S}_E = \frac{1}{2G^*}(\sin\omega^*\mathbf{D}_\Sigma + \cos\omega^*\mathbf{S}_\Sigma) \tag{2.6}$$

Производя операцию свертки, из формул (2.4), (2.6) найдем

$$\mathbf{D}_\Sigma : \mathbf{D}_E = \mathbf{S}_\Sigma : \mathbf{S}_E = 4G^*\bar{e}^2\cos\omega^*$$

$$\mathbf{D}_E : \mathbf{S}_\Sigma = -\mathbf{D}_\Sigma : \mathbf{S}_E = 4G^*\bar{e}^2\sin\omega^*$$

Отсюда можно определить угол ω^*, в частности,

$$\operatorname{tg}\omega^* = \frac{\mathbf{D}_E:\mathbf{S}_\Sigma}{\mathbf{D}_\Sigma:\mathbf{D}_E} = -\frac{\mathbf{D}_\Sigma:\mathbf{S}_E}{\mathbf{D}_\Sigma:\mathbf{D}_E}$$

Для реализации модели материала с нулевой фазой подобия девиаторов тензоров напряжений и деформаций необходимо и достаточно выполнение условия: $\mathbf{D}_E : \mathbf{S}_\Sigma = -\mathbf{D}_\Sigma : \mathbf{S}_E = 0$, т.е. свертка девиатора и тензора сдвига энергетической пары тензоров должна равняться нулю.

В компонентах тензоров законы упругости (2.3), (2.5) имеют вид

$$\sigma_i = K^* e + 2G^* \left[\cos\omega^* \left(\varepsilon_i - \frac{1}{3} e \right) + \sin\omega^* \frac{1}{\sqrt{3}} (\varepsilon_k - \varepsilon_j) \right]$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{9K^*} \sigma + \frac{1}{2G^*} \left[\cos\omega^* \left(\sigma_i - \frac{1}{3} \sigma \right) - \sin\omega^* \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_k - \sigma_j) \right]$$

Таким образом, введение тензоров сдвига позволило записать нелинейный закон упругости в простой и физически наглядной форме (2.3), (2.5). В результате выявлена линейная зависимость между компонентами тензоров напряжений и деформаций в главных осях. Нелинейность содержится в коэффициентах соотношений, которые являются функциями только смешанных инвариантов В.В. Новожилова: обобщенных модулей упругости и фазы подобия девиаторов тензоров.

В.В. Новожиловым закон упругости был получен непосредственно из формы функциональной зависимости двух симметричных соосных тензоров, без привлечения вариации работы. Этот закон имеет вид [3]

$$\mathbf{\Sigma} = K^* e \mathbf{I} + 2G^* \left\{ \cos\omega^* \mathbf{D}_E + \sin\omega^* \left[\operatorname{ctg} 3\varphi \mathbf{D}_E - \frac{\sqrt{3}}{\bar{e} \sin 3\varphi} \left(\mathbf{D}_E^2 - \frac{2}{3} \bar{e}^2 \mathbf{I} \right) \right] \right\}$$

Можно показать, привлекая формулы (1.4), что довольно громоздкое выражение, стоящее в квадратных скобках этой формулы, преобразуется в тензор сдвига $\mathbf{S}_E$, т.е. оно является линейной функцией деформаций в главных осях и его компоненты имеют реальный физический смысл. Однако такое доказательство раньше не было сделано.

Если система координат не является главной, то тензор сдвига можно определить через девиатор с помощью выражения, которое эквивалентно последним двум равенствам (1.3),

$$\mathbf{S}_E = \frac{D_e}{S_e} \mathbf{D}_E - \frac{2}{3} \bar{e}^2 \frac{1}{S_e} \left(\mathbf{D}_E^2 - \frac{2}{3} \bar{e}^2 \mathbf{I} \right)$$

Для нахождения углов вида тензора и фазы подобия девиаторов можно применить формулы

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{S_e}{D_e}, \quad \operatorname{tg} 3\psi = \frac{S_\sigma}{D_\sigma}, \quad \operatorname{tg} 3\omega = \frac{D_e S_\sigma - D_\sigma S_e}{D_e D_\sigma + S_e S_\sigma} \tag{2.7}$$

где определители девиаторов и тензоров сдвига связаны зависимостями

$$D_e^2 + S_e^2 = \frac{4}{27} \bar{e}^6, \quad D_\sigma^2 + S_\sigma^2 = \frac{4}{27} \bar{\sigma}^6 \tag{2.8}$$

Соотношения (2.7), (2.8) выводятся с помощью равенств (1.4). Из формул (2.7) следует, что углы вида тензоров и их разность (фаза подобия девиаторов) находятся в интервале $(-\pi/6, +\pi/6)$. Раньше считалось [3], что угол ω^* меняется в пределах $(-\pi/3, +\pi/3)$. Формулы (2.7) удобны тем, что они инвариантны. Для определения углов вида тензоров по (2.7) не нужно, как это обычно делается, ранжировать напряжения и деформации по их величине (вводить соотношения типа $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$).

3. Линейные соотношения между рассматриваемыми тензорами имеют место не только в главных осях деформации. Пусть в упругом теле введена система ортогональных криволинейных координат с векторным базисом $\mathbf{e}_i$, ($i = 1, 2, 3$), где только одно направление $\mathbf{e}_3$ главное. Такая ситуация имеет место при плоской или осесимметричной деформации, плоском напряженном состоянии. Покажем, что и в этом случае зависимость напряжений и деформаций линейна (нелинейность содержится в коэффициентах, являющихся функциями инвариантов). Из соотношений (1.3) найдем тензор сдвига (ε_{ij} – компоненты тензора деформаций $\mathbf{E}$)

$$\mathbf{S}_E = -\frac{1}{2}\left[s+\frac{d}{s}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\right]\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \frac{d}{s}\varepsilon_{12}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[s-\frac{d}{s}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\right]\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + s\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \qquad (3.1)$$

где $d = \varepsilon_{33} - e/3$ и $s=\sqrt{4\bar{e}^2/3-d^2}$ – компоненты девиатора и тензора сдвига в главном направлении. Эти компоненты являются инвариантами, так что тензор сдвига $\mathbf{S}_E$ и соотношения закона упругости (2.3) линейны относительно деформаций.

4. Получим нелинейный закон упругости для тензоров истинных напряжений и деформаций. Рассматриваемую энергетическую пару можно вывести путем преобразования вариации работы деформации

$$\delta W = \mathbf{\Sigma} : \delta\mathbf{E} = (\mathbf{G}^{-1}J\mathbf{T}\mathbf{G}) : \delta\mathbf{R}$$

где $\mathbf{G}$ – градиент деформации, $J = \det\mathbf{G}$ – кратность изменения объема, $\mathbf{T}$ – тензор истинных напряжений, $\mathbf{R} = \ln\mathbf{\Lambda}$ – тензор истинных деформаций, $\mathbf{\Lambda}$ – тензор кратностей удлинений, причем $\mathbf{\Lambda}^2 = \mathbf{I} + 2\mathbf{E}$. Тензор $\mathbf{T}^* = \mathbf{G}^{-1}J\mathbf{T}\mathbf{G} = \mathbf{Q}^TJ\mathbf{T}\mathbf{Q}$, составляющий энергетическую пару тензору $\mathbf{R}$, отличается от тензора $\mathbf{T}$ наличием поворота осей базиса. Это связано с тем, что тензор $\mathbf{T}$ отнесен к текущей конфигурации, а тензор $\mathbf{T}^*$ – к исходной. Поворот осуществляется с помощью ортогонального тензора $\mathbf{Q}$, участвующего в полярном разложении $\mathbf{G} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}$.

Дифференциал упругого потенциала для истинных напряжений и деформаций имеет вид [2]

$$d\Phi = KJrdr + 4GJ\bar{r}(\cos\omega d\bar{r} + \sin\omega\bar{r}d\varphi_R) \qquad (4.1)$$

где $(r, \bar{r}, \varphi_R)$ – инварианты тензора $\mathbf{R}$, аналогичные инвариантам $(e, \bar{e}, \varphi)$ тензора $\mathbf{E}$, в частности $r = \ln J$; K и G – обобщенные модули упругости, $\omega = \psi_T - \varphi_R$ – разность углов вида тензоров (фаза подобия девиаторов). Из (4.1) получим закон упругости

$$\mathbf{T}^* = d\Phi / d\mathbf{R} = KJr\mathbf{I} + 2GJ(\cos\omega\mathbf{D}_R + \sin\omega\mathbf{S}_R) \qquad (4.2)$$

$$t = 3Kr, \quad \bar{t} = 2G\bar{r}$$

t и $\bar{t}$ – инварианты тензора $\mathbf{T}$, аналогичные инвариантам $\sigma, \bar{\sigma}$ тензора $\mathbf{\Sigma}$.

Для девиаторов $\mathbf{D}_T$, $\mathbf{D}_R$ и тензоров сдвига $\mathbf{S}_T$, $\mathbf{S}_R$ имеют место все формулы, которые были получены выше для девиаторов и тензоров сдвига энергетической пары ($\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{E}$) (нужно только заменить инварианты).

В частности,

$$\mathbf{D}_T = 2GJ(\cos\omega\mathbf{D}_R + \sin\omega\mathbf{S}_R), \quad \mathbf{S}_T = 2GJ(-\sin\omega\mathbf{D}_R + \cos\omega\mathbf{S}_R) \qquad (4.3)$$

В компонентах тензоров закон упругости (4.2) имеет вид

$$t_i = Kr + 2G\left[\cos\omega\left(r_i - \frac{1}{3}r\right) + \sin\omega\frac{1}{\sqrt{3}}(r_k - r_j)\right] \qquad (4.4)$$

Здесь t_i, r_i – компоненты тензоров истинных напряжений и деформаций в главных осях.

Легко могут быть написаны соотношения, обратные (4.2)–(4.4).

В случае, когда только одно координатное направление – главное, линейная зависимость истинных напряжений и деформаций устанавливается методом, аналогичным рассмотренному выше. Тензор сдвига для истинных деформаций будет аналогичен тензору (3.1).

5. Были рассмотрены [2] три энергетические пары тензоров и соответствующие им законы упругости и были даны оценки их преимуществ и недостатков для практического применения. Первый и второй варианты соотношений приведены выше – формулы (2.3), (4.2). Третий вариант относится к энергетической паре ($\mathbf{B}$, $\mathbf{\Lambda}$), где $\mathbf{B} = \mathbf{G}^{-1}J\mathbf{TQ}$ – тензор напряжений Био, $\mathbf{\Lambda}$ – тензор кратностей удлинений.

Автор разделяет мнение В.В. Новожилова [2] по поводу первых двух и третьего вариантов определяющих уравнений. Первый вариант удобен в математическом отношении, поскольку тензор деформаций Грина достаточно просто записывается через перемещения. Однако обобщенные модули упругости, входящие в формулу (2.3), теряют физический смысл при больших деформациях. Второй вариант нагляден физически, так как величины K и G в формуле (4.2) сохраняют физический смысл модуля объемного сжатия и модуля сдвига при больших деформациях. Но этот вариант менее удобен в математическом смысле, поскольку сложен тензор истинных деформаций. Таким образом, первые два варианта определяющих уравнений как бы дополняют друг друга, есть основание думать, что они оба найдут применение [2]. Об уравнениях для тензоров Био и кратностей удлинений В.В. Новожилов пишет: "третий вариант вообще не рационален, так как обладает всеми недостатками и ни одним из достоинств двух предыдущих вариантов".

Закон упругости в форме В.В. Новожилова был использован [4] для построения нелинейной теории эластомерного слоя. Двумерные уравнения слоя получены асимптотическим методом. Были приняты также некоторые кинематические гипотезы, соответствующие условиям деформации этих слоев в многослойных резинометаллических конструкциях. Фаза подобия девиаторов тензоров в законе упругости полагалась равной нулю. О второстепенном значении фазы подобия в определяющих уравнениях, по сравнению с обобщенными модулями упругости, сказано ранее [1].

Рассмотрим один пример практического применения полученных результатов для построения приближенных зависимостей между напряжениями и деформациями. На основе первого и второго вариантов определяющих уравнений (2.3), (4.2) можно вывести закон упругости, объединяющий их преимущества и свободный от указанных выше недостатков. Дефект формул (2.3) состоит в том, что обобщенные модули теряют физический смысл при больших деформациях. Если выразить модули K^* и G^* через модули K и G, входящие в формулы (4.2) и сохраняющие физический смысл при больших деформациях, недостаток будет устранен. Эту операцию можно выполнить с помощью формулы $Jt_i = \lambda_i^2\sigma_i$, связывающей истинные напряжения с напряжениями Пиолы – Кирхгофа. Вычислив первый и второй инварианты тензоров напряжений по соотношениям (2.3), (4.2), установим искомую зависимость между обобщенными модулями. Результаты даны ниже в приближенном варианте применительно к эластомерным материалам.

Для резиноподобных материалов модуль объемного сжатия на три-четыре порядка больше модуля сдвига (коэффициент Пуассона близок к 0,5). Опуская малые слагаемые порядка отношений модулей в соотношениях между обобщенными модулями упругости, получим

$$KJ\ln J = K^*e\left(1+\frac{2}{3}e\right)+\frac{8}{3}G^*\bar{e}^2$$

$$GJ\bar{r} = \left[K^*e+\left(1+\frac{2}{3}e+\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\right)G^*\right]\bar{e}$$

Если считать обобщенные модули K и G известными функциями инвариантов тензора истинных деформаций, то обобщенные модули K^* и G^* также становятся известными.

Используя соотношение (4.4), найдем первый инвариант тензора

$$p = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) = K \ln J$$

Известно, что закон сжимаемости $p = K \ln J$ при постоянном модуле K применим до давлений порядка 40–50 МПа. Так что в пределах этих давлений величину K можно считать постоянной. Если фаза подобия девиаторов мала (например, для материала Генки, применяемого в теории пластичности), то выражение GJ будет функцией только инварианта $\bar{r}$ – интенсивности деформаций сдвига, которую можно найти с помощью простых экспериментов.

6. Полученные соотношения для энергетических пар тензоров имеют общий математический характер. Они выполняются для любой пары симметричных соосных тензоров. Фактический переход к теории упругости произойдет, когда зададим или получим экспериментально зависимость обобщенных модулей упругости от инвариантов тензоров. Линейная зависимость напряжений и деформаций получена в двух вариантах: когда система координат является главной и когда имеется только одно главное направление.

Укажем некоторые области возможного применения результатов: в ряде теоретических исследований и прежде всего при построении упругих потенциалов или нелинейных законов упругости; при решении краевых задач нелинейной теории упругости, особенно тех, где допустимо использование главных координат (класс таких задач достаточно широк, некоторые из них были названы раньше); при обработке данных экспериментов, в частности, для получения зависимости обобщенных модулей упругости от инвариантов [2]; при создании моделей малой размерности нелинейной теории упругости для слоя, пластин, оболочек, мембран, стержней.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-01175, 96-01-00411).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В.В.* О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругой среде // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 2. С. 183–194.
2. *Новожилов В.В.* О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 6. С. 709–722.
3. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судостроение, 1958. 370 с.
4. *Мальков В.М.* Нелинейная теория эластомерного слоя // Фундам. и прикл. проблемы механики деформируемых сред и конструкций. Научные труды. Н.-Новгород: Изд. ННГУ, 1995. Вып. 2. С. 11–21.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
14.VI.1996