

УДК 539.3

© 1998 г. И.Е. Ануфриев, Л.В. Петухов

## ПРИМЕНЕНИЕ УСТОЙЧИВОГО ГРАНИЧНОГО АНАЛОГА МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Для решения краевых задач для уравнений эллиптического типа осуществляется переход от граничного аналога метода наименьших квадратов к граничному аналогу метода коллокации. Этот переход основан на дискретном представлении скалярного произведения в пространствах интегрируемых с квадратом по границе области функций для случая гладкой границы и интегрируемых с квадратом с некоторым весом по границе области функций для случая кусочно-линейной границы. Дается обоснование способа выбора точек коллокации для обеспечения устойчивости метода коллокации в случае задачи Дирихле.

Ранее [1, 2] было рассмотрено применение граничного аналога метода наименьших квадратов для нахождения коэффициентов разложения приближенного решения граничной задачи в ряд по глобальным базисным функциям и доказана устойчивость метода при решении задачи Дирихле в областях с гладкими и кусочно-линейными границами.

Предлагаемый метод имеет ряд преимуществ по сравнению с существующими методами. Он позволяет понизить на единицу евклидову размерность задачи и не требует дискретизации области, что облегчает процесс алгоритмизации и дает преимущества при решении задач с изменяющимися границами. Метод приводит к системам линейных алгебраических уравнений с хорошо обусловленной матрицей. К недостаткам предлагаемого метода можно отнести недостаточную изученность скорости сходимости в зависимости от гладкости границы. Круг задач, для которых применим данный метод, ограничен краевыми задачами для линейных эллиптических дифференциальных уравнений с постоянными или полиномиальными коэффициентами.

Был разработан метод [3], в котором сочетается точное решение в блоках с приближенным, разыскиваемым на границах блоков, покрывающих многоугольную область.

**1. Граничный аналог метода наименьших квадратов.** Был рассмотрен [1] метод решения граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений, основанный на разложении решения по глобальным базисным функциям ядра дифференциального оператора. Согласно этому методу было предложено перейти к граничной задаче для однородного дифференциального уравнения с соответствующим неоднородным граничным условием

$$Lu = 0, \quad x \in \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n; \quad lu|_{\Gamma} = h(y), \quad y \in \Gamma \quad (1.1)$$

где  $\Gamma = \partial\Omega$  – липщицева граница,  $L$  – эллиптический дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами,  $l$  – оператор граничных условий. Предлагалось искать приближенное решение  $u^{(N)}$  граничной задачи (1.1) в виде

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \psi_k(x), \quad x \in \Omega, \quad \psi_k(x) \in \ker L \quad (1.2)$$

Здесь и далее в разд. 1, 2  $k = 1, \dots, N$ .

Коэффициенты  $a_k^{(N)}$  могут быть найдены с помощью граничного аналога метода наименьших квадратов (ГАМНК) [4] из условия

$$\min_{a_1, a_2, \dots, a_N} \|u^{(N)} - h\|_{V(\Gamma)}^2 \quad (1.3)$$

Здесь  $V(\Gamma)$  – некоторое вещественное гильбертово пространство, в котором норма порождена скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)_{V(\Gamma)}$ .

Условие (1.3) приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{G}^{(N)} \mathbf{a}^{(N)} = \mathbf{h}^{(N)} \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{a}^{(N)}, \mathbf{h}^{(N)}$  – векторы с элементами  $a_k^{(N)}, h_k^{(N)} = (h, l\psi_k)_{V(\Gamma)}$  соответственно, а  $\mathbf{G}^{(N)}$  – матрица Грама первых  $N$  элементов системы  $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_N, \dots\}$  в гильбертовом пространстве со скалярным произведением  $(l \cdot, l \cdot)_{V(\Gamma)}$ .

Для большинства задач система  $\Psi$  оказывается неортогональной, поэтому главным вопросом является устойчивость метода. Устойчивость ГАМНК в смысле сформулированных ранее определений [5] зависит только от свойств системы  $\Psi$  в соответствующем гильбертовом пространстве. Для того чтобы ГАМНК был устойчив, необходимо и достаточно чтобы система  $\Psi$  была сильно минимальна в пространстве со скалярным произведением  $(l \cdot, l \cdot)_{V(\Gamma)}$ , т.е. чтобы нашлось положительное число  $\lambda_0$ , такое, что

$$\lambda_0 < \lambda_{\min}(\mathbf{G}^{(N)}), \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

где  $\lambda_{\min}(\mathbf{G}^{(N)})$  – наименьшее собственное число матрицы  $\mathbf{G}^{(N)}$  [5].

*Замечание 1.* Если  $L$ -эллиптический дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами, то возможно построить систему полиномов, удовлетворяющих однородному дифференциальному уравнению.

**2. Переход к граничному аналогу метода коллокации.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $V(\Gamma) = L_2(\Gamma)$ . Рассмотрим переход от ГАМНК к граничному аналогу метода коллокации, основанный на применении квадратурных формул. Элементы матрицы  $\mathbf{G}^{(N)}$  определяются выражением

$$G_{ij}^{(N)} = (l\psi_i, l\psi_j)_{2,\Gamma} = \int_0^1 l\psi_i(x_1(s), x_2(s)) l\psi_j(x_1(s), x_2(s)) d\Gamma(s) \quad (2.1)$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено противное,  $i, j = 1, \dots, N$ .

Пусть  $d\Gamma(s) = \gamma(s)ds$ ,  $\gamma(s) \in C^\infty([0, 1])$ ,  $l\psi_i(x_1(s), x_2(s)) \in C^\infty([0, 1])$ . Применяя квадратурную формулу Гаусса с  $N$  узлами  $s_k^{(N)} \in [0, 1]$  и коэффициентами  $A_k^{(N)}$  для вычисления (2.1), получим

$$(l\psi_i, l\psi_j)_{2,\Gamma} = \sum_{k=1}^N A_k^{(N)} l\psi_i(x_1(s_k^{(N)}), x_2(s_k^{(N)})) l\psi_j(x_1(s_k^{(N)}), x_2(s_k^{(N)})) \gamma(s_k^{(N)}) + \delta B_{ij}^{(N)} \quad (2.2)$$

где  $\delta B_{ij}^{(N)}$  – погрешность квадратурной формулы.

Введем обозначения

$$x_{1k}^{(N)} = x_1(s_k^{(N)}), \quad x_{2k}^{(N)} = x_2(s_k^{(N)}), \quad y_k^{(N)} = y(s_k^{(N)}), \quad \gamma_k^{(N)} = \gamma(s_k^{(N)})$$

Тогда систему линейных уравнений метода наименьших квадратов (1.4) можно представить в виде

$$(\mathbf{B}^{(N)} + \delta \mathbf{B}^{(N)}) \mathbf{a}^{(N)} = \mathbf{h}^{(N)} + \delta \mathbf{h}^{(N)} \quad (2.3)$$

где элементы матрицы  $\mathbf{B}^{(N)}$  и вектора  $\mathbf{h}^{(N)}$  таковы:

$$B_{ij}^{(N)} = \sum_{k=1}^N \sqrt{A_k^{(N)} \gamma_k^{(N)}} l\psi_i(x_{1k}^{(N)}, x_{2k}^{(N)}) \sqrt{A_k^{(N)} \gamma_k^{(N)}} l\psi_j(x_{1k}^{(N)}, x_{2k}^{(N)})$$

$$h_i^{(N)} = \sum_{k=1}^N A_k^{(N)} \gamma_k^{(N)} l\psi_i(x_{1k}^{(N)}, x_{2k}^{(N)}) h(s_k^{(N)})$$

а  $\delta h_i^{(N)}$  – погрешность квадратурной формулы при вычислении правой части системы метода наименьших квадратов. Заметим, что матрицу  $\mathbf{B}^{(N)}$  можно записать в виде  $\mathbf{B}^{(N)} = \mathbf{K}^{(N)}[\mathbf{K}^{(N)}]^T$ , где элементы матрицы  $\mathbf{K}^{(N)}$  имеют вид

$$K_{ij}^{(N)} = \sqrt{A_j^{(N)} \gamma_j^{(N)}} l\psi_i(x_{1j}^{(N)}, x_{2j}^{(N)}) \quad (2.4)$$

Обозначим через  $\mu(\mathbf{M})$  число обусловленности матрицы  $\mathbf{M}$  относительно второй матричной нормы:  $\mu(\mathbf{M}) = \|\mathbf{M}\|_2 \|\mathbf{M}^{-1}\|_2$ . Известно, что [6]

$$\mu(\mathbf{B}^{(N)}) = \mu^2([\mathbf{K}^{(N)}]^T), \quad \|([\mathbf{K}^{(N)}]^T)^{-1}\|_2 = \lambda_{\min}^{-1/2}(\mathbf{B}^{(N)}) \quad (2.5)$$

Обозначим через  $\bar{\mathbf{a}}^{(N)}$  решение системы (2.3), а через  $\tilde{\mathbf{a}}^{(N)}$  – решение системы  $\mathbf{B}^{(N)}\mathbf{a}^{(N)} = \mathbf{h}^{(N)}$

$$\mathbf{B}^{(N)}\mathbf{a}^{(N)} = \mathbf{h}^{(N)} \quad (2.6)$$

Из оценки [5]

$$\|\bar{\mathbf{a}}^{(N)} - \tilde{\mathbf{a}}^{(N)}\|_2 \leq \frac{C \lambda_{\min}^{-3/2}(\mathbf{G}^{(N)}) \|\delta \mathbf{B}^{(N)}\|_2 + \lambda_{\min}^{-1}(\mathbf{G}^{(N)}) \|\delta \mathbf{h}^{(N)}\|_2}{1 - \lambda_{\min}^{-1}(\mathbf{G}^{(N)}) \|\delta \mathbf{B}^{(N)}\|_2} \quad (2.7)$$

следует теорема, дающая достаточные условия сходимости.

**Теорема 1.** Пусть система  $\Psi$  и квадратурная формула, применяемая для приближенного вычисления интеграла (2.1), таковы, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [\lambda_{\min}^{-3/2}(\mathbf{G}^{(N)}) \|\delta \mathbf{B}^{(N)}\|_2] = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} [\lambda_{\min}^{-1}(\mathbf{G}^{(N)}) \|\delta \mathbf{h}^{(N)}\|_2] = 0$$

Тогда  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{a}}^{(N)} - \tilde{\mathbf{a}}^{(N)}\|_2 = 0$ .

**Замечание 2.** Для сильно минимальных систем достаточно потребовать:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ N \max_{i,j=1,2,\dots,N} |\delta B_{ij}^{(N)}| \right] = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ N \max_{j=1,2,\dots,N} |\delta h_j^{(N)}| \right] = 0 \quad (2.8)$$

Это следует из оценки  $\|\cdot\|_2$ .

Величины  $\delta B_{ij}^{(N)}$  и  $\delta h_j^{(N)}$  являются погрешностями применения квадратурных формул для интегрирования по отрезку  $[0, 1]$  функций вида  $l\psi_i(x_1(s), x_2(s)) l\psi_j(x_1(s), x_2(s)) \gamma(s)$  и  $h(y(s)) l\psi_j(x_1(s), x_2(s)) \gamma(s)$  соответственно. Скорость сходимости квадратурных формул определяется порядком гладкости подынтегральных функций. Так, если [7]

$$\frac{d}{ds} [l\psi_i(x_1(s), x_2(s)) l\psi_j(x_1(s), x_2(s)) \gamma(s)] \in \text{Lip}([0, 1]) \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{ds} [h(y(s)) l\psi_j(x_1(s), x_2(s)) \gamma(s)] \in \text{Lip}([0, 1])$$

где  $\text{Lip}([0, 1])$  – класс липшицевых на  $[0, 1]$  функций, то условия (2.8) выполнены.

*Замечание 3.* Условие (2.9) выполнено если  $\psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2), \dots, h(y)$  и  $\gamma(s)$  – бесконечно-дифференцируемые функции.

Рассмотрим систему функционалов

$$W_j(\psi) = \int_0^1 \psi(s) w_j(s) \gamma(s) ds \quad (2.10)$$

Коэффициенты разложения (1.2) найдем из условия [4]

$$W_j \left( \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \psi_k - h \right) = 0 \quad (2.11)$$

Выберем функции  $w_j(s)$  в (2.10) так, чтобы (2.11) была системой линейных алгебраических уравнений относительно  $\mathbf{a}^{(N)}$  с матрицей  $\mathbf{K}^{(N)}$ , определяемой (2.4). Положим

$$w_j^{(N)}(s) = \sqrt{A_j^{(N)} / \gamma(s)} \delta(s - s_j^{(N)}) \quad (2.12)$$

где  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция,  $s_j^{(N)}$  – узлы квадратурной формулы. Тогда систему (2.11) можно представить в виде

$$[\mathbf{K}^{(N)}]^T \mathbf{a}^{(N)} = \bar{\mathbf{h}}^{(N)} \quad (2.13)$$

Элементы матрицы  $\mathbf{K}^{(N)}$  определены формулой (2.4), а элементы вектора  $\bar{\mathbf{h}}^{(N)}$  таковы:

$$\bar{h}_j^{(N)} = h(y_j^{(N)}) \sqrt{A_j^{(N)} \gamma_j^{(N)}} \quad (2.14)$$

Решение системы метода коллокации (МК) (2.13) совпадает с решением системы (2.6) и, при  $N \rightarrow \infty$ , сходится к решению (1.4) по евклидовой норме. Таким образом, найдены базисные функции МК, обеспечивающие его сходимость.

*Замечание 4.* Матрицы  $\mathbf{B}^{(N)}$  и  $\delta \mathbf{B}^{(N)}$  эрмитовы, поэтому из теоремы Вейля [6] следуют оценки

$$|\lambda_{\max}(\mathbf{G}^{(N)}) - \lambda_{\max}(\mathbf{B}^{(N)})| \leq \|\delta \mathbf{B}^{(N)}\|_2, \quad |\lambda_{\min}(\mathbf{G}^{(N)}) - \lambda_{\min}(\mathbf{B}^{(N)})| \leq \|\delta \mathbf{B}^{(N)}\|_2$$

Теперь из (2.5) при  $\|\delta \mathbf{B}^{(N)}\|_2 \rightarrow 0$  следует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu([\mathbf{K}^{(N)}]^T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\mu(\mathbf{G}^{(N)})}$$

*Замечание 5.* Для случая  $n > 2$  переход к граничному аналогу МК осуществляется при помощи кубатурных формул. Получающиеся результаты аналогичны результатам для  $n = 2$ .

**3. Задача Дирихле в областях с гладкими границами.** Пусть  $\Delta u = 0$  в  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $u|_{\Gamma} = h(y)$ ,  $y \in \Gamma$ . В качестве  $\psi$  возьмем систему

$$\{1, \operatorname{Re}z, \operatorname{Im}z, \operatorname{Re}z^2, \operatorname{Im}z^2, \dots\}, \quad z = x_1 + ix_2 \quad (3.1)$$

Были доказаны [1] сходимость ГАМНК по системе (3.1) и ее сильная минимальность. Пусть граница области  $\Omega$  задана параметрически:  $\Gamma = \{(x_1, x_2) | x_1 = x_1(s), x_2 = x_2(s), s \in [0, 1]\}$ . Если функции  $x_1(s), x_2(s) \in C^\infty([0, 1])$ , то система линейных алгебраических уравнений МК с весовыми функциями (2.12) разрешима для любого порядка аппроксимации, МК сходится, и справедливо замечание 4 относительно числа обусловленности матрицы вышеупомянутой системы.

4. **Задача Дирихле в областях с кусочно-линейными границами.** Рассмотрим задачу Дирихле в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с кусочно-линейной границей  $\Gamma$ . В этом случае

$$\Gamma = \bigcup_{m=1}^L \Gamma_m \quad (4.1)$$

где  $\Gamma_m = \{(x_1, x_2) | x_r = x_{rm}(s) \equiv a_{rm}s + b_{rm}, r = 1, 2, s \in [s_m, s_{m+1}]\}$ .

Будем считать, что  $s \in [0, 1]$ , и следовательно,

$$\bigcup_{m=0}^{L-1} [s_m, s_{m+1}] = [0, 1]$$

Пусть  $\pi\alpha_m$  – внутренние углы области  $\Omega$  в точках  $(x_1(s_m), x_2(s_m))$  ( $m = 1, \dots, L$ ). Введем гильбертово пространство с весом  $L_2(\Gamma; p)$ , где

$$p(s) = \prod_{m=0}^L [(x_1(s) - x_1(s_m))^2 + (x_2(s) - x_2(s_m))^2]^{1/\alpha_m - 1}$$

Ранее [1] была доказана сильная минимальность системы (3.1) в  $L_2(\Gamma; p)$ , рассмотрено применение ГАМНК для аппроксимации решения задачи Дирихле и предложена оценка погрешности вычисления скалярного произведения по границе аналогичная оценке Рунге.

Для построения базисных функций МК, обеспечивающих разрешимость системы и сходимость МК, а также позволяющие сделать вывод о поведении числа обусловленности матрицы системы линейных алгебраических уравнений МК, запишем выражение для скалярного произведения в  $L_2(\Gamma; p)$

$$\begin{aligned} (\Psi_i, \Psi_j)_{2, \Gamma; p} &= \int_0^1 \Psi_i(x_1(s), x_2(s)) \Psi_j(x_1(s), x_2(s)) p(s) \gamma(s) ds = \\ &= \sum_{m=0}^L \left\{ \int_{s_m}^{\theta_{1m}} \Psi_{ij}(x_{1m}(s), x_{2m}(s)) p_{1m}(s) (s - s_m)^{1/\alpha_m - 1} \gamma_m(s) ds + \right. \\ &+ \int_{\theta_{1m}}^{\theta_{2m}} \Psi_{ij}(x_{1m}(s), x_{2m}(s)) p_m(s) \gamma_m(s) ds + \\ &\left. + \int_{\theta_{2m}}^{s_{m+1}} \Psi_{ij}(x_{1m}(s), x_{2m}(s)) p_m(s) (s_{m+1} - s)^{1/\alpha_{m+1} - 1} \gamma_m(s) ds \right\} \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$p_m(s) = p(s), \quad s_m \leq s \leq s_{m+1}, \quad p_{1m}(s) = p_m(s) / (s - s_m)^{1/\alpha_m - 1}$$

$$p_{2m}(s) = p_m(s) / (s_{m+1} - s)^{1/\alpha_{m+1} - 1}$$

$$\gamma_m(s) = \sqrt{a_{1m}^2 + a_{2m}^2}, \quad s_m < \theta_{1m} < \theta_{2m} < s_{m+1}$$

$$\Psi_{ij}(x_{1m}(s), x_{2m}(s)) = \Psi_i(x_{1m}(s), x_{2m}(s)) \Psi_j(x_{1m}(s), x_{2m}(s))$$

Применим для вычисления интегралов по  $[\theta_{1m}, \theta_{2m}]$  квадратурную формулу Гаусса без веса, а для вычисления интегралов по  $[s_m, \theta_{1m}]$  и  $[\theta_{2m}, s_{m+1}]$  квадратурные формулы Гаусса с весами  $(s - s_m)^{1/\alpha_m - 1}$  и  $(s_{m+1} - s)^{1/\alpha_{m+1} - 1}$  соответственно. Тогда (4.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
(\Psi_i, \Psi_j)_{2,\Gamma;p} = & \sum_{m=0}^L \left\{ \sum_{n=1}^{N_{1m}} C_{1n}^{N_{1m}} \Psi_{ij}(x_{11mn}, x_{21mn}) P_{1m}(s_{1mn}) \gamma_m(s_{1mn}) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{N_m} C_n^{N_m} \Psi_{ij}(x_{1mn}, x_{2mn}) P_m(s_{mn}) \gamma_m(s_{mn}) + \\
& \left. + \sum_{n=1}^{N_{2m}} C_{2n}^{N_{2m}} \Psi_{ij}(x_{12mn}, x_{22mn}) P_{2m}(s_{2mn}) \gamma_m(s_{2mn}) + R_{1mij}^{N_{1m}} + R_{mij}^{N_m} + R_{2mij}^{N_{2m}} \right\} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

где  $s_{1mn}$ ,  $C_{1n}^{N_{1m}}$  – узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса с весом  $(s - s_m)^{1/\alpha_m - 1}$  ( $n = 1, \dots, N_{1m}$ ),  $s_{mn}$ ,  $C_n^{N_m}$  – узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса без веса ( $n = 1, \dots, N_m$ ), а  $s_{2mn}$ ,  $C_{2n}^{N_{2m}}$  – узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса с весом  $(s_{m+1} - s)^{1/\alpha_{m+1} - 1}$  ( $n = 1, \dots, N_{2m}$ ),  $x_{rqmn} = x_{rm}(s_{qmn})$  ( $n = 1, \dots, N_{qm}$ ),  $x_{rmn} = x_{rm}(s_{mn})$  ( $n = 1, \dots, N_m$ );  $r, q = 1, 2, m = 0, \dots, L$ , причем  $\sum_{m=0}^L (N_m + N_{1m} + N_{2m}) = N$ , которое совпадает с числом базисных функций. Перенумеруем точки  $x_{11mn}$ ,  $x_{1mn}$ ,  $x_{12mn}$  через  $x_{1k}$ , точки  $x_{21mn}$ ,  $x_{2mn}$ ,  $x_{22mn}$  через  $x_{2k}$ , а точки  $s_{1mn}$ ,  $s_{mn}$ ,  $s_{2mn}$  через  $s_k$  и представим равенство (4.3) в форме

$$\begin{aligned}
(\Psi_i, \Psi_j)_{2,\Gamma;p} = & \sum_{k=1}^N D_k^{(N)} \Psi_{ij}(x_{1k}^{(N)}, x_{2k}^{(N)}) P(s_k^{(N)}) \gamma(s_k) + R_{ij}^{(N)} \\
P(s_k) = & \begin{cases} P_{1m}(s_{1mn}), & \text{если } k \text{ соответствует } (1, m, n) \\ P_m(s_{mn}), & \text{если } k \text{ соответствует } (m, n) \\ P_{2m}(s_{2mn}), & \text{если } k \text{ соответствует } (2, m, n) \end{cases} \\
D_k^{(N)} = & \begin{cases} C_{1m}^{N_{1m}}, & \text{если } k \text{ соответствует } (1, m, n) \\ C_m^{N_m}, & \text{если } k \text{ соответствует } (m, n) \\ C_{2m}^{N_{2m}}, & \text{если } k \text{ соответствует } (2, m, n) \end{cases} \\
R_{ij}^{(N)} = & \sum_{m=0}^L [R_{1mij}^{N_{1m}} + R_{mij}^{N_m} + R_{2mij}^{N_{2m}}]
\end{aligned}$$

В этом случае для системы линейных уравнений (2.3)

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{(N)} &= \mathbf{K}^{(N)} [\mathbf{K}^{(N)}]^T \\
K_{ik}^{(N)} &= \sqrt{D_k^{(N)} \gamma(s_k^{(N)}) P(s_k^{(N)})} \Psi_i(x_{1k}^{(N)}, x_{2k}^{(N)}) \quad (4.4) \\
h_i^{(N)} &= \sum_{k=1}^N D_k^{(N)} h(y(s_k^{(N)})) \Psi_i(x_{1k}^{(N)}, x_{2k}^{(N)}) \gamma_k^{(N)}
\end{aligned}$$

а  $\delta B_{ij}^{(N)} = R_{ij}^{(N)}$ ,  $\delta h_i^{(N)}$  – погрешности квадратурных формул. Выберем в (2.10) весовые функции

$$w_j(s) = \sqrt{\frac{D_j^{(N)} P(s_j^{(N)})}{\gamma^{(N)}(s)}} \delta(s - s_j^{(N)}) \quad (4.5)$$

и получим систему линейных уравнений (2.13), в которой  $\mathbf{K}^{(N)}$  определена формулами (4.4), а элементы вектора правой части задаются по формуле

$$\bar{h}_i^{(N)} = h(s_i^{(N)}) \sqrt{D_i^{(N)} \gamma(s_i^{(N)}) P(s_i^{(N)})}, \quad i = 1, \dots, N$$

Пусть  $\bar{\mathbf{a}}^{(N)}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}^{(N)}$  – решения систем (2.3), (2.6) для (4.4). Заметим, что  $\tilde{\mathbf{a}}^{(N)}$  совпадает

с решением (2.13) для (4.4). Если в (2.7) за  $G^{(N)}$  обозначить матрицу Грама первых  $N$  элементов системы  $\{\psi_i\}_{i=1,2,\dots}$  в  $L_2(\Gamma; p)$ , то получим достаточные условия для сходимости МК. Была доказана [1] сильная минимальность системы  $\Psi$  в  $L_2(\Gamma; p)$ .

Достаточными условиями сходимости МК будут условия (2.8). Рассмотрим первый предел (2.8). Так как  $\delta B_{ij}^{(N)} = R_{ij}^{(N)}$ , то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{m=0}^L (N_m + N_{1m} + N_{2m}) \sum_{m=0}^L [R_{mij}^{(N_m)} + R_{1mij}^{(N_{1m})} + R_{2mij}^{(N_{2m})}] \right\} = 0$$

Потребуем, чтобы

$$N_m = \xi_m N, \quad N_{1m} = \xi_{1m} N, \quad N_{2m} = \xi_{2m} N, \quad \sum_{m=0}^L (\xi_m + \xi_{1m} + \xi_{2m}) = 1 \quad (4.6)$$

Так как функция  $P(s)$  бесконечно-дифференцируема на каждом из отрезков интегрирования, а функции  $x_1(s)$ ,  $x_2(s)$  – кусочно-линейные на каждом из отрезков интегрирования, то первое условие (2.8) справедливо. Если

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [h(y(s))] &\in \text{Lip}([s_m, \theta_{1m}]) \\ \frac{d}{ds} [h(y(s))] &\in \text{Lip}([\theta_{1m}, \theta_{2m}]) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{ds} [h(y(s))] \in \text{Lip}([\theta_{2m}, s_{m+1}])$$

то справедливо и второе условие (2.8). Таким образом, доказана теорема

**Теорема 2.** Если выполнены условия (4.6) и (4.7), то

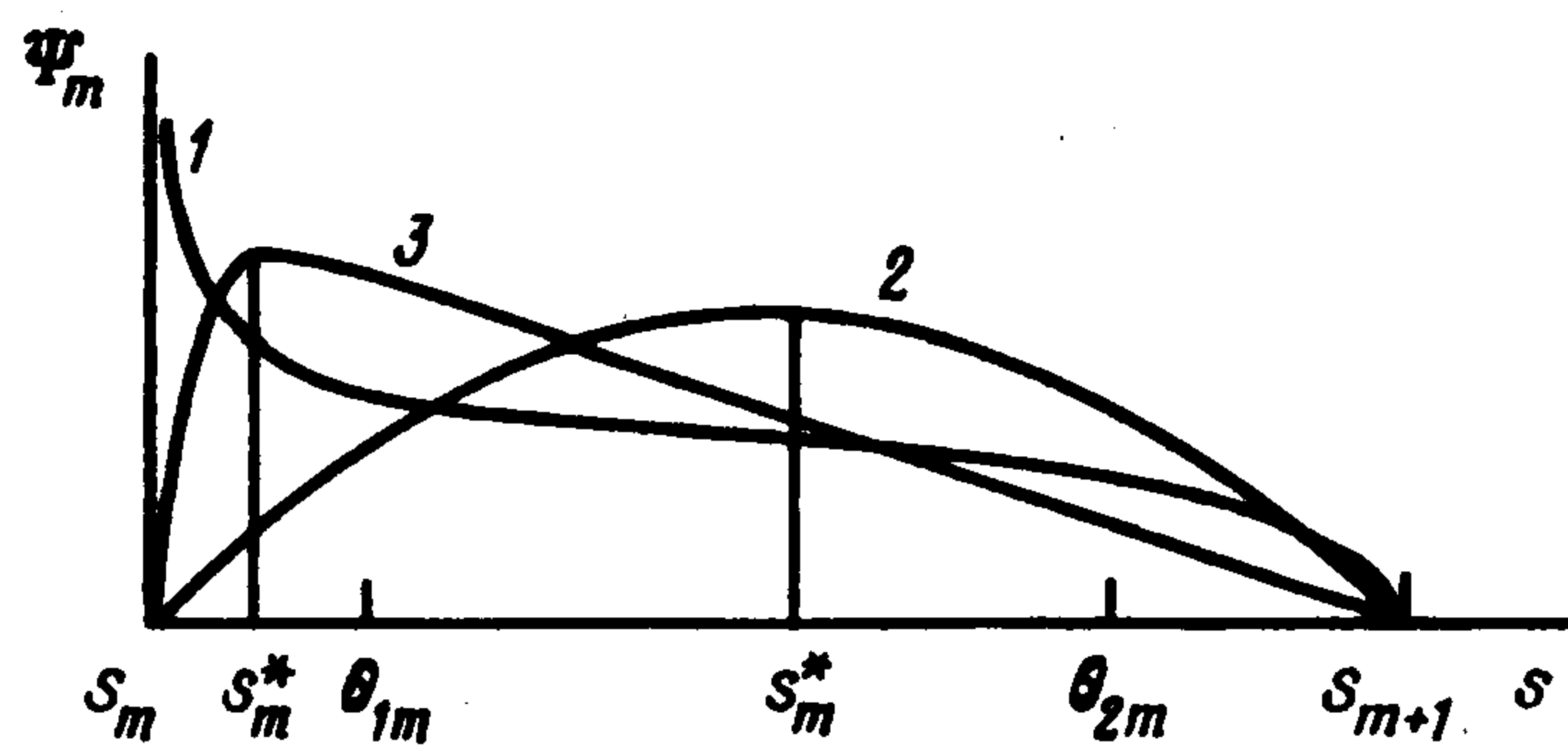
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\bar{a}^{(N)} - \tilde{a}^{(N)}\|_2 = 0$$

Сходимость МК установлена. Справедливо замечание, аналогичное замечанию 4, о числе обусловленности матрицы системы метода коллокации.

Для применения МК существенную роль играет выбор точек  $\theta_{rm}$  ( $r = 1, 2, m = 0, 1, \dots, L$ ), разделяющих отрезки, на которых применяются квадратурные формулы с весом и без веса. Их желательно выбрать так, чтобы погрешности интегрирования на каждом из отрезков  $[s_m, \theta_{1m}]$ ,  $[\theta_{1m}, \theta_{2m}]$ ,  $[\theta_{2m}, s_{m+1}]$ ,  $m = 0, 1, \dots, L$  имели одинаковый порядок. Оценка, полученная в [1] на основе оценки Рунге, неприменима, так как при возрастании числа базисных функций  $N$  не будет выполняться предположение о постоянстве соответствующих производных от подынтегральных функций на каждом отрезке интегрирования. Это связано с тем, что базисные функции системы  $\Psi$  имеют вид:  $[x^2(s) + y^2(s)]^{k/2} \cos k\psi(s)$ ,  $[x^2(s) + y^2(s)]^{k/2} \sin k\psi(s)$ , где  $k = 1, 2, \dots, N/2$ ,  $\psi(s)$  – угол между радиус-вектором точки границы  $(x(s), y(s))$  и осью  $Ox$ . С возрастанием  $N$  они будут осциллировать по отрезкам интегрирования.

Для определения точек  $\theta_{rm}$  ( $r = 1, 2, m = 0, 1, \dots, L$ ) воспользуемся условиями равенства оценок погрешностей квадратурных формул на каждом из отрезков  $[s_m, \theta_{1m}]$ ,  $[\theta_{1m}, \theta_{2m}]$ ,  $[\theta_{2m}, s_{m+1}]$  ( $m = 0, 1, \dots, L$ ). Положим  $F(s) = \psi_{ij}(x_{1m}(s), x_{2m}(s))$  и рассмотрим интеграл

$$\int_{s_m}^{s_{m+1}} F(s) p(s) ds = \int_{s_m}^{\theta_{1m}} F(s) p_{1m}(s) (s - s_m)^{\beta_m} ds + \int_{\theta_{1m}}^{\theta_{2m}} F(s) p_m(s) ds +$$



Фиг. 1

$$+ \int_{\theta_{2m}}^{s_{m+1}} F(s) p_{2m}(s) (s_{m+1} - s)^{\beta_{m+1}} ds, \quad \beta_k = \alpha_k^{-1} - 1, \quad k = m, m+1 \quad (4.8)$$

Пусть  $R_{1m}^{N_{1m}}, R_m^{N_m}, R_{2m}^{N_{2m}}$  – погрешности квадратурных формул Гаусса вычисления интегралов, стоящих в правой части (4.8), причем для вычисления первого и третьего интегралов используются квадратурные формулы Гаусса с весами  $(s - s_m)^{\beta_m}$ ,  $(s_{m+1} - s)^{\beta_{m+1}}$  порядков  $N_{1m}$  и  $N_{2m}$  соответственно, а для вычисления второго интеграла – квадратурная формула Гаусса без веса порядка  $N_m$ . Тогда [7]

$$|R_m^{N_m}| \leq \frac{1}{(2N_m)!} \max_{s \in (\theta_{1m}, \theta_{2m})} \left| \frac{d^{2N_m}}{ds^{2N_m}} [F(s)p(s)] \right| \int_{\theta_{1m}}^{\theta_{2m}} \omega_{N_m}^2(s) ds \quad (4.9)$$

где  $\omega_{N_m}(s)$  – корневой полином квадратурной формулы Гаусса без веса. Вычисляя производную порядка  $2N_m$  от подынтегральной функции  $F(s)p(s)$ :

$$\frac{d^{2N_m}}{ds^{2N_m}} [F(s)p(s)] = \sum_{j=0}^{2N_m} \binom{2N_m}{j} F^{(2N_m-j)}(s) p^{(j)}(s),$$

$$p^{(j)}(s) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} p_m^{(j-k)}(s) \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} (-1)^{k-t} \beta_m^{[t]} \beta_{m+1}^{[k-t]} (s - s_m)^{\beta_m - t} (s_{m+1} - s)^{\beta_{m+1} - k + t}$$

$$\beta_m^{[t]} = \beta_m (\beta_m - 1) \cdots (\beta_m - t + 1)$$

а также вводя обозначения

$$p = \max_{m=0,1,\dots,L} \sup_{s \in (s_m, s_{m+1})} |p_m^{(j)}(s)|, \quad F = \sup_{s \in [0,1]} |F^{(j)}(s)|$$

$$j \in [0, 2N_m] \quad j \in [0, 2N_m]$$

$$K_m = \left| \sum_{j=0}^{2N_m} \binom{2N_m}{j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} \beta_m^{[t]} \beta_{m+1}^{[k-t]} \right|$$

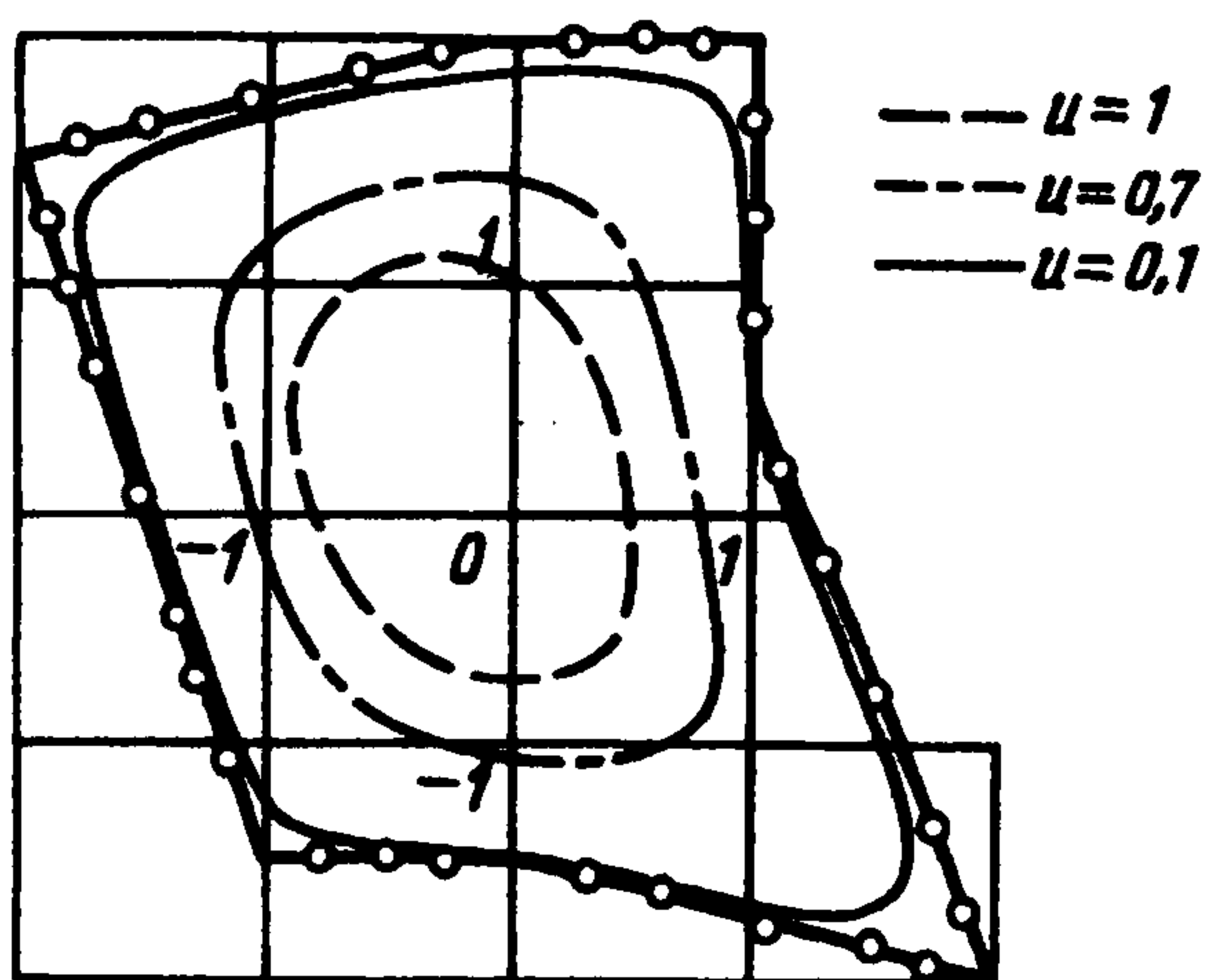
из (4.9) получим

$$|R_m^{N_m}| \leq \frac{1}{(2N_m)!} p F K_m \max_{\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 2N_m]} \sup_{s \in (\theta_{1m}, \theta_{2m})} \Psi_m(s, \lambda_1, \lambda_2)$$

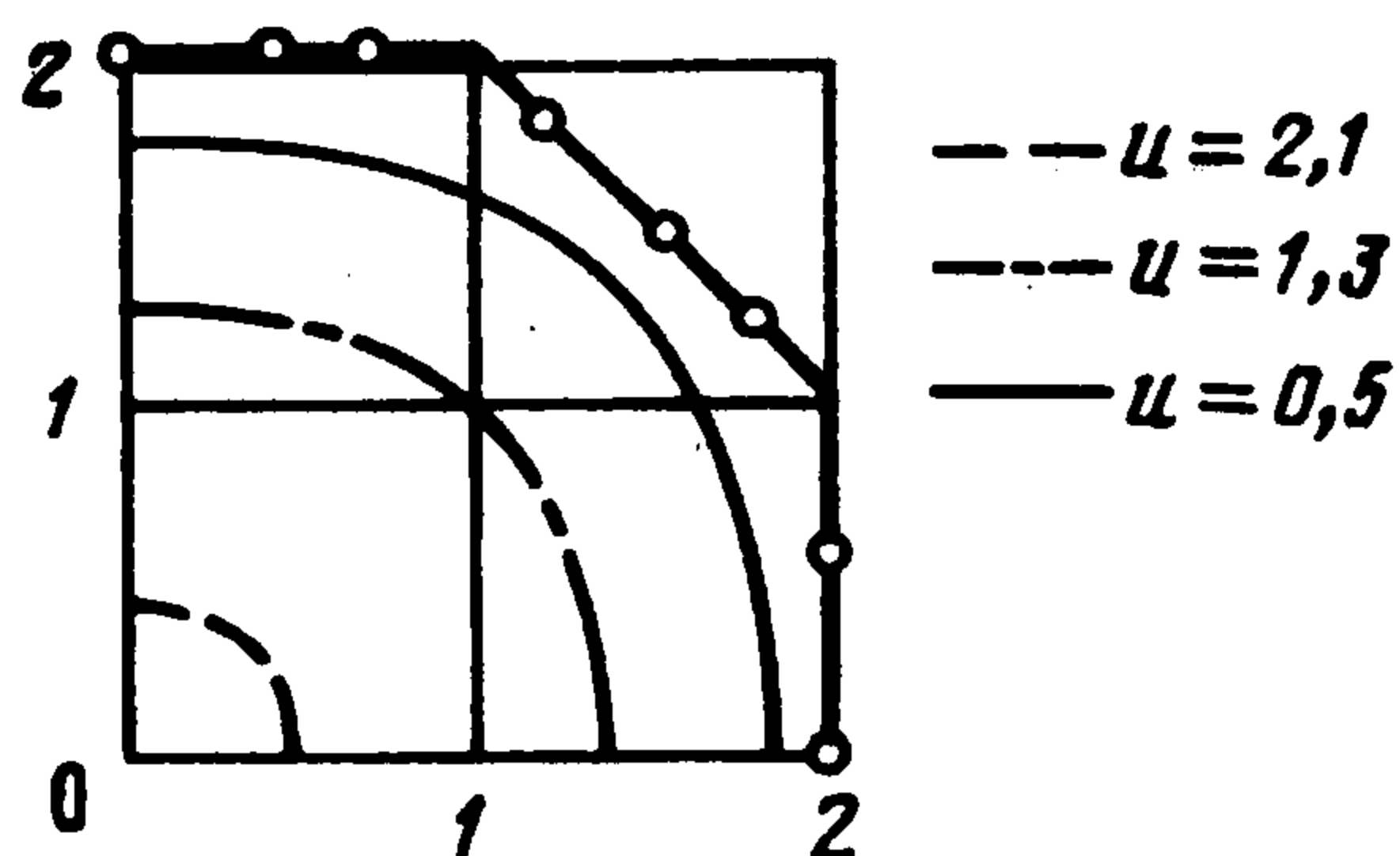
$$\Psi_m(s, \lambda_1, \lambda_2) = (s - s_m)^{\beta_m - \lambda_1} (s_{m+1} - s)^{\beta_{m+1} - \lambda_2}$$

Введем обозначение

$$s_m^* = \frac{(\beta_{m+1} - \lambda_2) s_{m+1} + (\beta_m - \lambda_1) s_m}{\beta_m + \beta_{m+1} - \lambda_1 - \lambda_2}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

и заметим, что  $(\Psi_m)'_s(s_m^*, \lambda_1, \lambda_2) = 0$ , при  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq \beta_m + \beta_{m+1}$ . Так как внутренние углы границы  $\Gamma$  области  $\Omega$  заключены в интервале  $(0, 2\pi)$ , то  $\alpha_m \in (0, 2)$ , а  $\beta_m \in (-1/2, +\infty)$ .

Рассмотрим три случая поведения функции  $\Psi_m$  на отрезке  $[\theta_{1m}, \theta_{2m}]$  и расположения точки  $s_m^*$  относительно точек  $\theta_{1m}, \theta_{2m}$  (фиг. 1): для  $\beta_m - \lambda_1 < 0, \beta_{m+1} - \lambda_2 > 0$  (кривая 1), для  $s_m^* \in [\theta_{1m}, \theta_{2m}]$ ,  $\beta_m - \lambda_1 > 0, \beta_{m+1} - \lambda_2 > 0$  (кривая 2), для  $s_m^* \notin [\theta_{1m}, \theta_{2m}]$ ,  $\beta_m - \lambda_1 > 0, \beta_{m+1} - \lambda_2 > 0$  (кривая 3).

Исследуя эти случаи, получим оценку погрешности вычисления второго интеграла правой части (4.8) при помощи квадратурной формулы Гаусса без веса

$$|R_m^{N_m}| \leq \rho F K_m T_m \chi_m(\theta_{1m}, \theta_{2m}) / (2N_m)! \quad (4.10)$$

$$\chi_m(\theta_{1m}, \theta_{2m}) = \max \begin{cases} 1, & \text{при } \beta_m > 0, \beta_{m+1} > 0 \\ h_{1m}^{\beta_m - 2N_m}, & \text{при } \beta_{m+1} > 0, \beta_m - 2N_m < 0 \\ h_{2m}^{\beta_{m+1} - 2N_m}, & \text{при } \beta_m > 0, \beta_{m+1} - 2N_m < 0 \\ \sigma_m, & \text{при } \beta_m - 2N_m < 0, \beta_{m+1} - 2N_m < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_m = \max\{h_{1m}^{\beta_m - 2N_m} (\bar{s}_m)^{\beta_{m+1} - 2N_m}, h_{2m}^{\beta_{m+1} - 2N_m} (\bar{s}_m)^{\beta_m - 2N_m}\}$$

$$h_{1m} = \theta_{1m} - s_m, \quad h_{2m} = s_{m+1} - \theta_{2m}, \quad \bar{s}_m = (s_{m+1} - s_m) / 2$$

$$T_m = (N_m)!^4 [(2N_m)!^2 (2N_m + 1)]^{-1} (s_{m+1} - s_m)^{2N_m + 1}$$

Аналогично можно получить оценки погрешностей метода Гаусса для первого и третьего интегралов в правой части (4.8).

Приравнявая полученные оценки погрешностей аппроксимации интегралов в правой части равенства (4.8), получим точки  $\theta_{1m}, \theta_{2m}$ , отделяющие отрезки интегрирования по квадратурным формулам Гаусса с весом и без веса. Затем находим узлы квадратурных формул с весом и без веса и, используя (4.5), получим МК, обладающий свойством устойчивости и дающий последовательность приближенных решений, сходящуюся к точному решению.

**5. Аппроксимация решения задачи Сен-Венана о кручении упругих призм.** Пусть  $\Omega$  – односвязная область, занимаемая сечением призмы, граница  $\Gamma = \partial\Omega$  определена по (4.1). Решение задачи Сен-Венана сводится к нахождению гармонической в  $\Omega$  функции  $u$ , удовлетворяющей на  $\Gamma$  условию

$$u|_{\Gamma}(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) / 2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma$$

Будем искать приближенное решение задачи Сен-Венана в виде конечного ряда (1.2), где  $\psi_k$  – функции системы (3.1). Для нахождения коэффициентов ряда (1.2)  $a_k^{(N)}$  применим граничный аналог метода коллокации с весовыми функциями (4.5) в (2.10). Вектор  $(a_1^{(N)}, \dots, a_N^{(N)})$  является решением (2.13).

Были проведены расчеты для различных многоугольных областей. На фиг. 2, 3 изображены линии уровня функции  $u$  и точки коллокации (изображены кружками). Ввиду симметрии на фиг. 3 показана четверть области. Число базисных функций системы (3.1) совпадает с числом точек коллокации.

Проделаны расчеты для большого числа базисных функций ( $\approx 90$ ) для области, изображенной на фиг. 3, причем численной неустойчивости метода обнаружено не было.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ануфриев И.Е., Петухов Л.В. Метод решения эллиптических дифференциальных уравнений, основанный на разложении решения по неортогональным базисным функциям // Сб. тр. СПбГТУ, 1996. № 461. С. 120–129.
2. Петухов Л.В., Ануфриев И.Е. Метод решения эллиптических дифференциальных уравнений, основанный на разложении решения по неортогональным базисным функциям // Материалы Междунар. конф. и Чебышевских чтений, посвящ. 175-летию со дня рожд. П.Л. Чебышева. М.: Изд-во МГУ, 1996. Т. 2. С. 286–288.
3. Volkov E.A. Block Method for Solving the Laplace Equation and for Constructing Conformal Mappings. Boca Raton, etc.: CRC Press, 1994. 227 p.
4. Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978. 351 с.
5. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, 1966. 632 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
20.III.1997