УДК 539.3

© 1998 г. Й. Виттенбург

ОБРАЩЕНИЕ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ ТЁПЛИЦЕВЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ МАТРИЦ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К МЕХАНИКЕ[1]

Линейное алгебраическое уравнение $Ax= b$ с трехдиагональной матрицей коэффициентов решено аналитическим обращением матрицы A. Точная формула для обращения известна, если A – тёплицева матрица. Даны новые формулы для следующих случаев: 1) матрица A – тёплицева матрица с возмущениями (квазитёплицева), когда элементы $A_{1,1}$ и $A_{n,n}$ отличаются от остальных диагональных элементов; 2) матрица A – p-периодическая с $p > 1$, что означает, что в каждой из ее трех диагоналей периодически повторяется группа из p элементов; 3) трехдиагональная матрица A составлена из периодических подматриц различной длины периода. В случаях *2* и *3* задача обращения матриц сводится к решению разностного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Решение основано на теореме Флоке. Показано, что формулы, полученные для периодических матриц, переходят в формулы для частного случая теплицевых матриц. Даны примеры применения полученных результатов к задачам эластостатики и теории колебаний.

1. Введение. Исследуется система линейных уравнений вида

$$\beta_{i-1}x_{i-1}+\alpha_i x_i+\gamma_i x_{i+1}=b_i \quad (i=1,\ldots,\ n;\ x_0=x_{n+1}=0) \tag{1.1}$$

с действительными или комплексными коэффициентами, или в матричной форме $Ax= b$ с симметричной или несимметричной трехдиагональной матрицей A. Такие системы уравнений возникают во многих областях науки.

В простейшем случае элементами матрицы будут $\alpha_i \equiv \alpha$, $\beta_i \equiv \beta$, $\gamma_i \equiv \gamma$. Такие матрицы называются (трехдиагональными) тёплицевыми матрицами. Тёплицеву матрицу будем называть возмущенной (или квазитёплицевой), если "граничные" элементы α_1 и α_n отличны от α. Эти элементы отвечают граничным условиям исследуемых механических систем. Механические системы, состоящие из периодически повторяющихся подсистем, приводят к периодическим матрицам с элементами $\alpha_{i+p}\equiv \alpha_i$, $\beta_{i+p} \equiv \beta_i$, $\gamma_{i+p} \equiv \gamma_i (p > 1)$.

В разд. 2 элементы обратных трехдиагональных матриц выражаются через континуанты (ведущие главные миноры), т.е. определители трехдиагональных подматриц матрицы A. Континуанты являются решениями линейного разностного уравнения второго порядка, коэффициентами которого будут диагональные элементы α_i и произведения $\delta_i = \beta_i\gamma_i$ внедиагональных элементов. Отсюда следует, что обращение несимметричных матриц не сложнее, чем симметричных. Всюду предполагается, что $\delta_i \neq 0$ ($i = 1,\ldots, n - 1$), ибо в противном случае задача может быть сведена к обращению трехдиагональных матриц меньшего порядка.

[1] Статья посвящается проф. Эрвину Штейну (Ганновер) по случаю его 65-летия.

В разд. 3 разностные уравнения с постоянными коэффициентами $\alpha_i \equiv \alpha$, $\delta_i \equiv \delta$ решены точно и получены точные выражения для обратных тёплицевых и для возмущенных тёплицевых матриц. За исключением некоторых формул, относящихся к возмущенным матрицам, это хорошо известные результаты. Новые результаты получены в разд. 4 и 5. В разд. 4 исследованы разностные уравнения с p-периодическими коэффициентами $\alpha_{i+p} \equiv \alpha_i$, $\delta_{i+p} \equiv \delta_i$. Точные решения основаны на теореме Флоке. Результаты для p-периодических коэффициентов идентичны таковым для постоянных коэффициентов, если положить $p = 1$. В разд. 5 результаты обобщаются на трехдиагональные матрицы с подматрицами различных периодов. В разд. 6 полученные результаты прилагаются к задачам эластостатики и теории колебаний.

Трехдиагональные матрицы и их обобщения изучались многими авторами [1–7]. Обсуждалось [5] обращение периодических трехдиагональных матриц, однако замкнутые формы выражений, данные в настоящей статье, не приводились.

2. Выражение элементов обратной матрицы в терминах континуантов. Пусть $u_i(i = 1,\ldots, n)$ – определитель трехдиагональной подматрицы матрицы A с элементами A_{jk} (j, $k = 1,\ldots, i$). Следуя определению [1], u_i будем называть i-м континуантом матрицы A. Далее, пусть v_i ($i = 1,\ldots, n$) означает i-й континуант транспонированной относительно второй диагонали матрицы A. Из этих определений следуют равенства $u_n = v_n = \det A$. Если матрица A персимметрична (симметрична по отношению к ее второй диагонали), то $v_i = u_i$ ($i = 1,\ldots, n$).

Элемент $(A^{-1})_{ij}$ ($i, j = 1, \ldots, n$) обратной матрицы есть C_{ij}/u_n, где C_{ij} – алгебраическое дополнение A_{ji}. Он представляет собой умноженный на $(-1)^{i-j}$ определитель подматрицы, остающейся после вычеркивания j-й строки и i-го столбца. Для матрицы из уравнения (1.1) при $i > j$ алгебраическое дополнение равно

$$C_{ij} = (-1)^{i-j} \begin{array}{r|ccccccc|}
 & & & & & & i-1 & i+1 \\
j-1 & \|A_{j-1}\| & \gamma_{j-1} & & & & & \\
j+1 & & \beta_j & \alpha_{j+1} & \gamma_{j+1} & & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & & & \beta_{i-3} & \alpha_{i-2} & \gamma_{i-2} & \\
 & & & & & \beta_{i-2} & \alpha_{i-1} & \\
 & & & & & & \beta_{i-1} & \gamma_i \\
 & & & & & & & \|B_{n-i}\|
\end{array} \quad (i > j)$$

$\|A_{j-1}\|$ и $\|B_{n-i}\|$ – матрицы с элементами A_{kl} при $k,l = 1,\ldots, j-1$ и $k,l = i+1,\ldots,n$ соответственно. Их определители являются континуантами u_{j-1} и v_{n-i} соответственно. Видно, что C_{ij} остается неизменным, если все элементы α и γ вне $\|A_{j-1}\|$ и $\|B_{n-i}\|$ заменяются нулями. Сперва это показывается для γ_{j-1} и, следовательно, также и для γ_i и потом для остальных элементов. В каждом случае видно, что в выражении для определителя коэффициент рассматриваемого элемента есть нуль. Следовательно,

$$C_{ij} = (-1)^{i-j} u_{j-1} v_{n-i} \prod_{k=j}^{i-1} \beta_k \qquad (i > j;\ \ j = 1,\ldots,\ n)$$

Положим $u_0 = v_0 = 1$. Тогда эта формула верна также в случае $i = j(i = 1,\ldots, n)$. Если $i < j$, то i и j, а также β и γ должны поменяться ролями. Согласно этой формуле элементами матрицы A^{-1} являются

$$(A^{-1})_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i-j}\dfrac{u_{j-1}v_{n-i}}{u_n}\prod\limits_{k=j}^{i-1}\beta_k & (i\geqslant j)\\ & \qquad (j=1,\ldots,n)\\ (-1)^{j-i}\dfrac{u_{i-1}v_{n-j}}{u_n}\prod\limits_{k=i}^{j-1}\gamma_k & (i\leqslant j)\end{cases}\tag{2.1}$$

Таким образом, матрица A^{-1} известна, если известны континуанты. Разложение определителя u_i по его i-му столбцу приводит к разностному уравнению второго порядка

$$u_i=\alpha_i u_{i-1}-\delta_{i-1}u_{i-2}\quad (i=2,\ldots,n)\tag{2.2}$$

где $\delta_i=\beta_i\gamma_i$ ($i=1,\ldots,n-1$), с начальными условиями

$$u_0=1,\quad u_1=\alpha_1\tag{2.3}$$

Континуанты $v_i(i=0,\ldots,n)$ получаются приложением того же уравнения к транспозиции A относительно второй диагонали. Всюду предполагается $\delta_i\neq 0$ ($i=1,\ldots,n-1$). При этом условии никакие два последовательных континуанта u_k и u_{k+1} или v_k и v_{k+1} ($k\geqslant 0$) не нули. Уравнение (2.2) одно и то же для симметричной и несимметричной матриц.

3. Тёплицевы матрицы. В этом разделе уравнение (2.2) явно решается для трехдиагональных матриц с возмущениями, т.е. в случае $\beta_i\equiv\beta$, $\gamma_i\equiv\gamma$ ($i=1,\ldots,n-1$), $\alpha_i\equiv\alpha$ ($i=2,\ldots,n-1$), $\alpha_1,\alpha_n\neq\alpha$. Из решения u_i ($i=0,\ldots,n$) уравнения (2.2) континуанты v_i получаются перестановкой α_1 и α_n. При $\delta=\beta\gamma$ уравнения (2.2) принимают вид

$$u_i=\begin{cases}\alpha u_{i-1}-\delta u_{i-2} & (i=2,\ldots,n-1)\\ \alpha u_{n-1}-\delta u_{n-2}+(\alpha_n-\alpha)u_{n-1} & (i=n)\end{cases}\tag{3.1}$$

с начальными условиями (2.3). При $i=2,\ldots,n-1$ уравнения (3.1) имеют постоянные коэффициенты. Решение уравнения ищется в виде $u_i=Cq^i$ ($i=0,\ldots,n-1$), подстановка которого в (3.1) приводит к характеристическому уравнению

$$q^2-\alpha q+\delta=0\tag{3.2}$$

В случае неравных корней ($q_1\neq q_2$) общее решение имеет вид $u_i=C_1q_1^i+C_2q_2^i$ ($i=0,\ldots,n-1$). Коэффициенты C_1 и C_2, определяемые из начальных условий (2.3), получаем в виде $C_1=[q_1+(\alpha_1-\alpha)]/(q_1-q_2)$ и $C_2=-[q_2+(\alpha_1-\alpha)]/(q_1-q_2)$, так что

$$u_i=\frac{q_1^{i+1}-q_2^{i+1}+(\alpha_1-\alpha)(q_1^i-q_2^i)}{q_1-q_2}\quad (i=0,\ldots,n-1)\tag{3.3}$$

Из уравнения (3.1) находим

$$u_n=\frac{q_1^{n-1}(q_1+\alpha_1-\alpha)(q_1+\alpha_n-\alpha)-q_2^{n-1}(q_2+\alpha_1-\alpha)(q_2+\alpha_n-\alpha)}{q_1-q_2}\tag{3.4}$$

В случае равных корней ($q_1=q_2=q=\alpha/2$) общее решение $u_i=(C_1+iC_2)(\alpha/2)^i$ ($i=0,\ldots,n-1$). Из начальных условий (2.3) получаем $C_1=1$, $C_2=2\alpha_1/\alpha-1$. Отсюда следует, что

$$u_i=(1+i)q^i+i(\alpha_1-\alpha)q^{i-1}\quad (i=0,\ldots,n-1)\tag{3.5}$$

$$u_n=[q^2+n(q+\alpha_1-\alpha)(q+\alpha_n-\alpha)-(\alpha_1-\alpha)(\alpha_n-\alpha)]q^{n-2}\tag{3.6}$$

В частном случае $\alpha_1 = \alpha_n = \alpha$ равенства (3.3)–(3.6) принимают вид

$$u_i = v_i = \begin{cases} \dfrac{q_1^{i+1} - q_2^{i+1}}{q_1 - q_2} & (q_1 \neq q_2) \\ (1+i)q^i & (q_1 = q_2 = q = \alpha/2) \end{cases} \quad (i = 0, \ldots, n) \tag{3.7}$$

Эти результаты известны [2, 3]. В [1] случай $q_1 = q_2$ не рассматривается, а результат для $q_1 \neq q_2$ содержит опечатку.

Для действительных матриц континуанты (3.3)–(3.7) действительны, даже если $q_{1,2}$ комплексно-сопряженные. Далее выводятся действительные выражения для несимметричных матриц в особом случае $\alpha_1 = \alpha_n = \alpha$ и для симметричных матриц в особом случае $\alpha_1 = \alpha_n \neq \alpha$.

Действительные несимметричные тёплицевы матрицы. Матрица персимметрична, т.е. $u_i = v_i$ $(i = 0,\ldots, n)$, выражения (2.1) принимают вид

$$(A^{-1})_{ij} = \begin{cases} (-\beta)^{i-j} \dfrac{u_{j-1}u_{n-i}}{u_n} & (i \geqslant j) \\ (-\gamma)^{j-i} \dfrac{u_{i-1}u_{n-j}}{u_n} & (i \leqslant j) \end{cases} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

Не ограничивая общности, будем предполагать диагональные элементы α матрицы A неотрицательными (в случае $\alpha < 0$ следует рассматривать $-A$). В равенствах (3.7) следует различать три случая в зависимости от того, имеет ли уравнение (3.2) два различных действительных корня, двойной корень или комплексно-сопряженные корни.

1°. *Различные действительные корни.* Из уравнения (3.2) при $\alpha > 0$ следует, что $q_1 > 0$, $\operatorname{sign} q_2 = \operatorname{sign}\delta$ и $|q_2| < q_1$.

Определим действительное число

$$r = \frac{q_2}{q_1} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\delta}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\delta}} \quad (0 < |r| < 1;\ \operatorname{sign} r = \operatorname{sign}\delta) \tag{3.9}$$

Так как $q_1 q_2 = \delta$, то с учетом (3.9) имеем $q_1 = \sqrt{\delta/r}$. Формулы (3.7) записываются в виде

$$u_i = \left(\frac{\delta}{r}\right)^{i/2} \frac{1 - r^{i+1}}{1 - r} \quad (i = 0, \ldots, n) \tag{3.10}$$

2°. *Двойной корень:* $q = \alpha/2 = \sqrt{\delta} > 0$. Формулы (3.7) принимают вид

$$u_i = \delta^{i/2}(1+i) \quad (i = 0, \ldots, n) \tag{3.11}$$

3°. *Комплексно-сопряженные корни.* В этом случае $4\delta - \alpha^2 > 0$, и значит, $\delta > 0$. Так как $\alpha \geqslant 0$, действительная часть корней не меньше нуля, абсолютная величина равна $\sqrt{\delta}$. Записывая $q_{1,2} = \sqrt{\delta} e^{\pm i\varphi}$, определяем угол

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4\delta - \alpha^2}}{\alpha} \quad \left(0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.12}$$

Формулы (3.7) имеют вид

$$u_j = \delta^{j/2} \frac{e^{i(j+1)\varphi} - e^{-i(j+1)\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} = \delta^{j/2} \frac{\sin[(j+1)\varphi]}{\sin\varphi} \quad (j = 0, \ldots n) \tag{3.13}$$

Подстановка (3.10), (3.11) и (3.13) в (3.8) приводит к конечному результату для обращения матрицы A:

$$(A^{-1})_{ij}=\begin{cases}(-\beta)^{i-j}\left(\dfrac{r}{\delta}\right)^{(i-j+1)/2}\dfrac{(1-r^j)(1-r^{n+1-i})}{(1-r)(1-r^{n+1})} & (\alpha^2>4\delta)\\ (-\beta)^{i-j}\left(\dfrac{1}{\delta}\right)^{(i-j+1)/2}\dfrac{j(n+1-i)}{n+1} & (\alpha^2=4\delta)\\ (-\beta)^{i-j}\left(\dfrac{1}{\delta}\right)^{(i-j+1)/2}\dfrac{\sin(j\varphi)\sin[(n+1-i)\varphi]}{\sin\varphi\sin[(n+1)\varphi]} & (\alpha^2<4\delta)\\ & (j=1,\dots,n;\ i\geq j;\ \alpha>0)\end{cases} \tag{3.14}$$

Выражения для $i<j$ получаются перестановкой i и j, а также β и γ. Для симметричной матрицы $\delta=\beta^2$ и $0<r<1$.

Действительные симметричные тёплицевы матрицы со специальными возмущениями. В этом случае применимы формулы (3.3)–(3.6). Для некоторых механических систем с симметричной матрицей особый интерес представляет частный случай $\alpha_1=\alpha_n=\alpha+\beta$. В дальнейшем рассмотрим более общий случай

$$\alpha_1=\alpha_n=\alpha+\sigma_1\beta \quad (\sigma_1=+1 \text{ или } -1) \tag{3.15}$$

Элементы обратной матрицы A^{-1} могут быть даны в виде, подобном виду (3.14). Вследствие симметрии и персимметрии матрицы A выражения (3.8) имеют специальный вид

$$(A^{-1})_{ij}=(A^{-1})_{ji}=(-\beta)^{i-j}\frac{u_{j-1}u_{n-i}}{u_n} \quad (j=1,\dots,n;\ i\geqslant j) \tag{3.16}$$

Как и в предыдущем разделе, без потери общности предполагается $\alpha\geqslant 0$. Определяем $\sigma_\beta=\operatorname{sign}\beta$ и $\sigma=\sigma_1\sigma_\beta$.

Сначала рассмотрим (3.3) и (3.4) в случае действительных и комплексных корней $q_1\neq q_2$. Так как $q_1q_2=\beta^2$, имеем

$$\alpha_1-\alpha=\alpha_n-\alpha=\sigma_1\beta=\sigma|\beta|=\sigma\sqrt{q_1q_2}$$

Отсюда следует

$$u_i=\frac{q_1^{i+1}-q_2^{i+1}+\sigma\sqrt{q_1q_2}(q_1^i-q_2^i)}{q_1-q_2}=\frac{(q_1^{i+1/2}-\sigma q_2^{i+1/2})(\sqrt{q_1}+\sigma\sqrt{q_2})}{q_1-q_2}=$$

$$=\frac{q_1^{i+1/2}-\sigma q_2^{i+1/2}}{\sqrt{q_1}-\sigma\sqrt{q_2}} \quad (i=0,\dots,n-1)$$

$$u_n=\frac{q_1^{n-1}(q_1+\sigma\sqrt{q_1q_2})^2-q_2^{n-1}(q_2+\sigma\sqrt{q_1q_2})^2}{q_1-q_2}=\frac{\sqrt{q_1}+\sigma\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}-\sigma\sqrt{q_2}}(q_1^n-q_2^n)$$

1°. *Действительные корни $q_1\neq q_2$ положительны.* В этом случае параметр r, определенный равенством (3.9), находится в пределах $0<r<1$. Так как $q_1=|\beta|r^{-1/2}$, то

$$u_i=\left(\frac{|\beta|}{\sqrt{r}}\right)^i\frac{1-\sigma r^{i+1/2}}{1-\sigma r^{1/2}} \quad (i=0,\dots,n-1) \tag{3.17}$$

$$u_n=\left(\frac{|\beta|}{\sqrt{r}}\right)^i(1-r^n)\frac{1+\sigma r^{1/2}}{1-\sigma r^{1/2}} \tag{3.18}$$

2°. *Комплексные корни.* Снова применимо определение (3.12):

$$q_{1,2} = |\beta| e^{\pm i\varphi}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4\beta^2-\alpha^2}}{\alpha} \quad \left(0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

Тогда

$$u_i = \begin{cases} |\beta|^i \dfrac{\sin[(i+\frac12)\varphi]}{\sin(\varphi/2)} & (\sigma=+1) \\ |\beta|^i \dfrac{\cos[(i+\frac12)\varphi]}{\cos(\varphi/2)} & (\sigma=-1) \end{cases} \quad (i=0,\ldots,n-1) \tag{3.19}$$

$$u_n = \begin{cases} 2|\beta|^n \operatorname{ctg}(\varphi/2)\sin n\varphi & (\sigma=+1) \\ -2|\beta|^n \operatorname{tg}(\varphi/2)\sin n\varphi & (\sigma=-1) \end{cases} \tag{3.20}$$

3°. *Двойной корень.* Для двойного корня требуется $\alpha/2 = |\beta|$. Положим $A = (\alpha/2)A^*$ и рассмотрим матрицу A^*. Она имеет элементы $\alpha_i^* = 2$, $\alpha_1^* = \alpha_n^* = 2+\sigma$, $\beta^* = \sigma_\beta$ и двойной корень $q = 1$. Равенства (3.5) и (3.6) сводятся к

$$u_i^* = 1 + i(1+\sigma) \quad (i=0,\ldots,n-1), \qquad u_n^* = n(1+\sigma)^2 \tag{3.21}$$

При этом континуантами матрицы A являются $u_i = |\beta|^i\, u_i^*(i=1,\ldots,n)$.

Формулы (3.16) с учетом (3.17)–(3.21) дают окончательные выражения для элементов обратной матрицы:

$$(A^{-1})_{ij} = (A^{-1})_{ji} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{|\beta|}(-\sigma_\beta)^{i-j} r^{(i-j+1)/2} \dfrac{(1-\sigma r^{j-\frac12})(1-\sigma r^{n-i+\frac12})}{(1-r)(1-r^n)} & (\alpha^2 > 4\beta^2) \\ \left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{|\beta|}(-\sigma_\beta)^{i-j}\dfrac{(2j-1)[2(n-i)+1]}{4n} & (\sigma=+1) \\ \text{матрица } A \text{ сингулярна} & (\sigma=-1) \end{array}\right\} & (\alpha^2 = 4\beta^2) \\ \left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{|\beta|}(-\sigma_\beta)^{i-j}\dfrac{\sin[(j-\frac12)\varphi]\sin[(n-i+\frac12)\varphi]}{\sin\varphi\sin n\varphi} & (\sigma=+1) \\ \dfrac{1}{|\beta|}(-\sigma_\beta)^{i-j}\dfrac{\cos[(j-(\frac12))\varphi]\cos[(n-i+(\frac12))\varphi}{\sin\varphi\sin n\varphi} & (\sigma=-1) \end{array}\right\} & (\alpha^2 < 4\beta^2) \end{cases}$$

$$(j=1,\ldots,n,\ i \geqslant j;\ \alpha > 0) \tag{3.22}$$

4. Периодические трехдиагональные матрицы. Обращение p-периодических трехдиагональных матриц требует решения линейного разностного уравнения (2.2) с p-периодическими коэффициентами $\alpha_{i+p} \equiv \alpha_i$, $\delta_{i+p} \equiv \delta_i$. Согласно теореме Флоке, оно имеет по меньшей мере одно решение вида

$$u_i = \lambda_{i+1} q^i \quad (\lambda_{i+p} \equiv \lambda_i) \tag{4.1}$$

с p-периодическими коэффициентами. Подстановка в (2.2) приводит к уравнениям

$$-\frac{\delta_{i-1}}{q}\lambda_{i-1} + \alpha_i\lambda_i - q\lambda_{i+1} = 0 \quad (i=1,\ldots,\ p;\ \delta_0 = \delta_p) \tag{4.2}$$

представляющим собой задачу на собственные значения с собственными значениями q и компонентами собственного вектора $\lambda_0,\ldots,\lambda_{p-1}$.

Сначала решим задачу в частном случае $u_{p-1} = 0$. Из (2.2) следует $u_{p+1} = \alpha_1 u_p = u_1 u_p$, $u_{p+2} = \alpha_{p+2} u_p u_1 - \delta_{p+1} u_p = (\alpha_2 u_1 - \delta_1) u_p = u_2 u_p$ и т.д. Используя принцип индукции, легко видеть, что решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, может быть записанно в виде

$$u_{mp+i} = u_i u_p^m \quad (m = 0, 1, \ldots, ;\ i = 0, \ldots, p-1) \tag{4.3}$$

Это есть уравнение (4.1) с $q^p = u_p$ и $\lambda_{i+1} = u_i / q^i$ ($i = 0, \ldots, p-1$). Следовательно, u_p – один из корней квадратного уравнения. Другой корень не появляется в силу начальных условий. Континуанты не зависят от δ_p.

В общем случае $u_{p-1} \neq 0$ с $\lambda_p \neq 0$ можно выбрать $\lambda_p = 1$. Случай $p = 2$ с $\lambda_2 = 1$ должен быть рассмотрен отдельно. Уравнения (4.2) после исключения λ_1 из первого уравнения принимают вид

$$q^4 - (\alpha_1 \alpha_2 - \delta_1 - \delta_2) q^2 + \delta_1 \delta_2 = 0, \quad \lambda_1 = (q^2 + \delta_2) / (q \alpha_1) \tag{4.4}$$

Первое из этих уравнений есть характеристическое (квадратное по q^2) уравнение.

В общем случае $p > 2$ уравнения (4.2) записываются в виде

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & -q & & & & \\ -\delta_1 / q & \alpha_2 & -q & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -\delta_{p-3} / q & \alpha_{p-2} & -q \\ & & & & -\delta_{p-2} / q & \alpha_{p-1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_{p-1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \delta_p / q \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ q \end{Vmatrix} \tag{4.5}$$

$$-\frac{\delta_{p-1}}{q} \lambda_{p-1} + \alpha_p - q \lambda_1 = 0 \tag{4.6}$$

Обозначим через $\hat{A}$ несимметричную трехдиагональную матрицу коэффициентов уравнения (4.5). Матрицы $\hat{A}$ и A имеют одинаковые диагональные элементы α_i и произведения $\delta_i = \beta_i \gamma_i$ ($i = 1, \ldots, p-1$) внедиагональных элементов, и следовательно, также и одинаковые континуанты u_i ($i = 0, \ldots, p-1$). Определитель $u_{p-1} \neq 0$. Континуанты транспонированной относительно второй диагонали матрицы $\hat{A}$ обозначим $\hat{v}_i$ ($i = 1, \ldots, p-1$). Определим $\hat{v}_{-1} = 0$ и $\hat{v}_0 = 1$. С учетом уравнения (2.1) заключаем, что обращение матрицы $\hat{A}$ имеет элементы

$$(\hat{A}^{-1})_{ij} = \begin{cases} q^{j-i} \dfrac{u_{j-1} \hat{v}_{p-i-1}}{u_{p-1}} \prod_{k=j}^{i-1} \delta_k & (i \geq j) \\ q^{j-i} \dfrac{u_{i-1} \hat{v}_{p-j-1}}{u_{p-1}} & (i \leq j) \end{cases} \quad (j = 1, \ldots, p-1) \tag{4.7}$$

При этом уравнение (4.5) дает

$$\lambda_i = \frac{\delta_p}{q} (\hat{A}^{-1})_{i1} + q (\hat{A}^{-1})_{i,p-1} = f_i(q^p) \frac{q^{-i}}{u_{p-1}} \quad (i = 1, \ldots, p) \tag{4.8}$$

где

$$f_i(q^p) = u_{i-1} q^p + \hat{v}_{p-i-1} \prod_{j=0}^{i-1} \delta_j \quad (i = 1, \ldots, p) \tag{4.9}$$

Эта формула верна также для $i = p$, для которого она дает $\lambda_p = 1$. Собственное значение q находится из уравнения (4.6). Подстановка выражений для λ_1 и λ_{p-1} приводит после простых преобразований к характеристическому (квадратному по q^p) уравнению

$$q^{2p} - (u_p - \delta_p \hat{v}_{p-2}) q^p + \prod_{j=1}^{p} \delta_j = 0 \tag{4.10}$$

При выводе уравнений (4.8)–(4.10) предполагалось, что $p > 2$. Однако в случае $p = 2$ они идентичны уравнениям (4.4), поэтому они применимы для произвольных $p > 1$.

Коэффициент при q^p равен

$$u_p - \delta_p \hat{v}_{p-2} = \sum (-1)^{k_1 + \ldots + k_p} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \ldots \alpha_p^{j_p} \delta_1^{k_1} \delta_2^{k_2} \ldots \delta_p^{k_p}$$

Здесь суммирование ведется по $j_1, \ldots, j_p$, $k_1, \ldots, k_p$, причем $j_1 + \ldots + j_p + k_1 + \ldots + k_p = p$; j_l, $k_l = 0$ или 1 $(l = 1, \ldots, p)$, $j_l = j_{l+1(\mathrm{mod} p)} = k_{l+1(\mathrm{mod} p)} = 0$, если $k_l = 1$ $(l = 1, \ldots, p)$.

Этот коэффициент инвариантен по отношению к циклической перестановке α_i и δ_i $(i = 1, \ldots, p)$. Следствием этого является то, что континуанты матрицы, транспонированной относительно второй диагонали матрицы A, вычисляются по тем же корням q_1^p и q_2^p.

Далее рассмотрим случай $q_1^p \neq q_2^p$. Корни q_1^p и q_2^p определяют $2p$ величин q_k $(k = 1, \ldots, 2p)$. Для каждого q_k коэффициенты $\lambda_{ik} (i = 1, \ldots, p)$ определяются уравнениями (4.8). При этих q_k и λ_{ik} равенства (4.1) приводят к общему решению разностного уравнения

$$u_{mp+i} = \sum_{k=1}^{2p} C_k \lambda_{i+1,k} q_k^{mp+i} = \frac{1}{u_{p-1}} \sum_{k=1}^{p} \left[f_{i+1}(q_1^p) C_k q_k^{mp-1} + f_{i+1}(q_2^p) C_{p+k} q_{p+k}^{mp-1} \right] =$$

$$= f_{i+1}(q_1^p) q_1^{mp} \frac{1}{u_{p-1}} \sum_{k=1}^{p} C_k q_k^{-1} + f_{i+1}(q_2^p) q_2^{mp} \frac{1}{u_{p-1}} \sum_{k=p+1}^{2p} C_k q_k^{-1}$$

$(m = 0, 1, \ldots; i = 0, \ldots, p-1)$

Множители при q_1^{mp} и q_2^{mp} не зависят от m и i. Обозначим их через A_1 и A_2. Подстановка вместо $f_{i+1}(q^p)$ равенства (4.9) приводит к выражению

$$u_{mp+i} = A_1 \left(u_i q_1^p + \hat{v}_{p-i-2} \prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) q_1^{mp} + A_2 \left(u_i q_2^p + \hat{v}_{p-i-2} \prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) q_2^{mp}$$

$(m = 0, 1, \ldots; i = 0, \ldots, p-1)$

Постоянные A_1 и A_2 определяются из начальных условий (2.3). В результате $A_1 = -A_2 = 1/(q_1^p - q_2^p)$, и получаем окончательную формулу для континуантов

$$u_{mp+i} = \frac{u_i (q_1^{(m+1)p} - q_2^{(m+1)p}) + (q_1^{mp} - q_2^{mp}) \tilde{v}_{p-i-2} \prod_{j=0}^{i} \delta_j}{q_1^p - q_2^p} \tag{4.11}$$

$(m = 0, 1, \ldots; i = 0, \ldots, p-1)$

Вывод уравнений (4.10) и (4.11) был основан на несингулярности $(u_{p-1} \neq 0)$ матрицы $\hat{A}$. Можно показать, однако, что в сингулярном случае $(u_{p-1} = 0)$ уравнение

(4.10) имеет корни $q_1^p = u_p$ и $q_2^p = -\delta_p \hat{v}_{p-2}$, и что при таких корнях (4.11) идентично (4.3). Более того, формулы (4.10) и (4.11) сводятся к (3.2) и (3.7) соответственно, если подставить $p = 1$. Таким образом, формулы (4.10) и (4.11) справедливы для произвольного $p \geqslant 1$, если $q_1^p \neq q_2^p$.

Далее находится решение для континуантов в случае $q_1^p = q_2^p$. Нуждается в рассмотрении только случай $u_{p-1} \neq 0$, так как случай $u_{p-1} = 0$ уже изучен. Согласно теореме Флоке общее решение уравнений (2.2) может быть записано в виде

$$u_i = [C_1 \lambda_{i+1} + C_2 (i\lambda_{i+1} + \rho_{i+1})] q^i \quad (i = 0, \dots, n) \tag{4.12}$$

Здесь q^p – двойной корень уравнения (4.10) и через λ_{i+1} ($i = 0, ..., p - 1$) обозначены периодические коэффициенты, определенные из (4.8) и (4.9). Величины ρ_{i+1}($i = 0, ..., p - 1$) обозначают неизвестные p-периодические коэффициенты. Они определяются подстановкой выражения $u_i = (i\lambda_{i+1} + \rho_{i+1}) q^i$ в разностные уравнения (2.2), что приводит к уравнениям

$$-\delta_{i-1}\rho_{i-1} + \alpha_i q \rho_i - q^2 \rho_{i+1} + i[-\delta_{i-1}\lambda_{i-1} + \alpha_i q \lambda_i - q^2 \lambda_{i+1}] =$$

$$= \alpha_i q \lambda_i - 2\delta_{i-1}\lambda_{i-1} \quad (i = 1, \dots, p)$$

Согласно (4.2) выражение в квадратных скобках равно нулю. Это позволяет преобразовать правые части полученных уравнений. После деления на q уравнения принимают вид

$$-\frac{\delta_{i-1}}{q}\rho_{i-1} + \alpha_i \rho_i - q\rho_{i+1} = -\frac{\delta_{i-1}}{q}\lambda_{i-1} + q\lambda_{i+1} \quad (i = 1, \dots, p) \tag{4.13}$$

Матрица коэффициентов та же, что и в (4.2). Она сингулярна, так как q – собственное значение. Ее ранг равен $p - 1$, так как $((p - 1) \times (p - 1))$-подматрица $\hat{A}$, фигурирующая в уравнениях (4.5), имеет определитель $u_{p-1} \neq 0$. Отсюда следует, что существуют только $p - 1$ линейно независимое уравнение, и можно выбрать $\rho_p = 1$.

Постоянные C_1 и C_2 в уравнениях (4.12) вычисляются из начальных условий (2.3). Решение для C_1 есть

$$C_1 = \frac{\alpha_1 \rho_1 - q(\rho_2 + \lambda_2)}{q[\lambda_2 \rho_1 - \lambda_1(\rho_2 + \lambda_2)]}$$

Это выражение равно нулю, как видно из уравнения (4.13) для $i = 1$. Отсюда следует, что $C_2 = 1/\rho_1$, и наконец,

$$u_i = \frac{1}{\rho_1}(i\lambda_{i+1} + \rho_{i+1}) q^i \quad (i = 0, \dots, n) \tag{4.14}$$

Эта формула справедлива также в случае $p = 1$, для которого она идентична (3.7). Таким образом, формулы (4.10), (4.11) и (4.14) представляют полное решение для континуантов матрицы A в случае $p \geqslant 1$. Эти же формулы представляют континуанты транспонированной относительно второй диагонали матрицы A. Элементы матрицы A^{-1} получаются подстановкой в (2.1) только что полученных формул для u_i, v_i ($i = 0, ..., n$).

Приближенное обращение симметричных матриц с действительными корнями. Во многих практических приложениях матрица A симметрична и, кроме того, корни

q_1^p и q_2^p характеристического уравнения (4.10) действительны. Их произведение равно свободному члену этого уравнения, который положителен для симметричной матрицы. Следовательно, корни имеют одинаковые знаки. Пусть они таковы, что $q_2^p / q_1^p < 1$. В правой части (4.11) можно пренебречь членами с q_2 в числителе для всех $m > m_0$ при некотором достаточно большом m_0. Чем меньше q_2^p / q_1^p, тем меньше m_0. Тогда получим

$$u_{mp+i} \approx \frac{1}{q_1^p - q_2^p}(u_i q_1^p + \hat{v}_{p-i-2} \prod_{j=0}^{i} \delta_j) q_1^{mp} \quad (m > m_0;\ i = 0, \ldots, p-1)$$

Поэтому

$$u_{j-p} / u_j \approx q_1^{-p} (j - p > m_0 p) \tag{4.15}$$

Из формул (2.1) следует

$$\frac{(A^{-1})_{i,j-p}}{(A^{-1})_{ij}} = (-1)^p \frac{u_{j-1-p}}{u_{j-1}} \prod_{k=1}^{p} \beta_k \, (i \geqslant j) \tag{4.16}$$

Подставив сюда выражение (4.15), получим

$$(A^{-1})_{i,j-p} / (A^{-1})_{ij} \approx \hat{q} \;\; (i \geqslant j; j - p > m_0 p + 1) \tag{4.17}$$

$$\hat{q} = (-1)^p q_1^{-p} \prod_{k=1}^{p} \beta_k = (-1)^p \operatorname{sign}\left(q_1^p \prod_{k=1}^{p} \beta_k\right) \sqrt{\frac{q_2^p}{q_1^p}} \;\; (|\hat{q}| < 1) \tag{4.18}$$

Здесь снова использовано, что величина $q_1^p q_2^p$ равна свободному члену уравнения (4.10). Заменяя в (4.17) p на mp, получаем, наконец, приближенное равенство

$$(A^{-1})_{i,j-mp} \approx \hat{q}^m (A^{-1})_{i,j} \;\; (i \geqslant j;\ j - mp > m_0 p + 1) \tag{4.19}$$

Таким же образом получаем

$$(A^{-1})_{i,j+mp} \approx \hat{q}^m (A^{-1})_{i,j} \;\; (i \leqslant j;\ j + mp < n - m_0 p) \tag{4.20}$$

Эти приближения являются геометрическими прогрессиями, умноженными на p-периодические функции, определяемые p элементами $(A^{-1})_{i,i-k}$ и $(A^{-1})_{i,i+k}$ соответственно ($k = 0, \ldots, p-1$).

5. Матрицы с подматрицами различных периодов. В этом разделе определяются континуанты трехдиагональной матрицы, имеющей трехдиагональные подматрицы различных периодов. Достаточно решить следующую задачу. Для некоторого ν ($\nu > 1$) вычислены континуанты $u_1, \ldots, u_\nu$ по данным выше формулам и начинающаяся с α_ν, β_ν, γ_ν матрица A является p-периодичной с $p \geqslant 1$. Найти явные выражения для континуантов u_i ($i > \nu$), удовлетворяющих разностным уравнениям

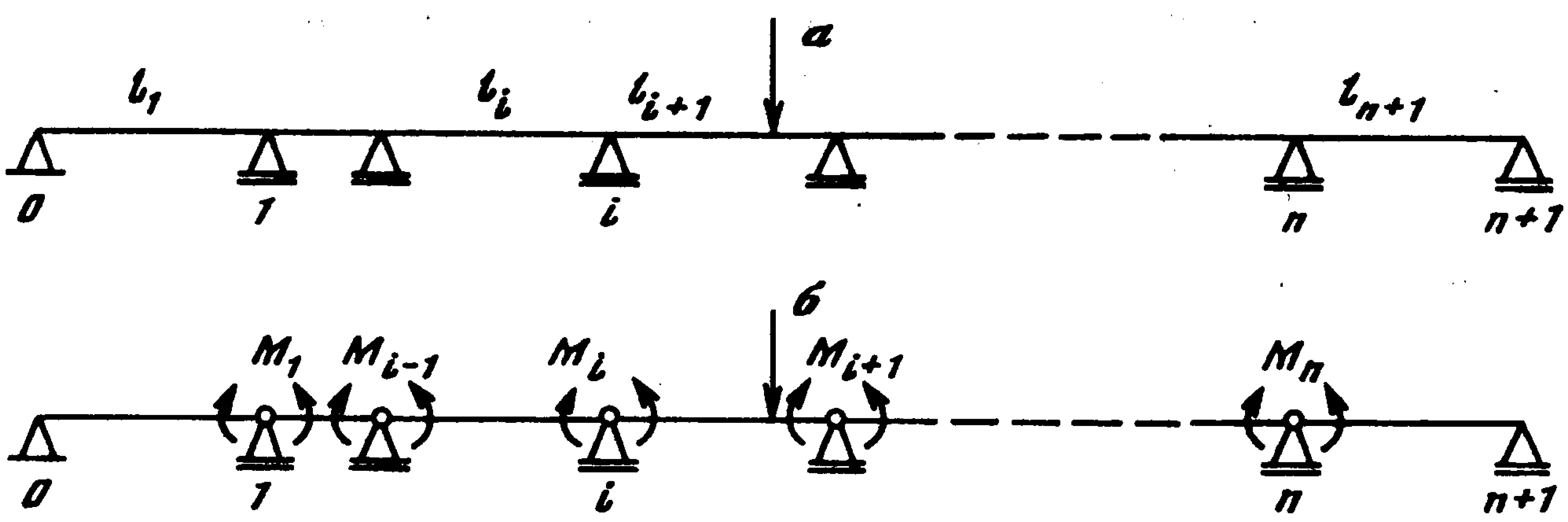
$$u_i = \alpha_i u_{i-1} - \delta_{i-1} u_{i-2} \;\; (i = \nu + 2, \ldots) \tag{5.1}$$

и данным начальным условиям $u_{\nu-1}$ и u_ν.

Пусть U_i и V_i – линейно-независимые решения уравнения (5.1) с начальными условиями $U_{\nu-1} = 1$, $U_\nu = 0$ и $V_{\nu-1} = 0$, $V_\nu = 1$ соответственно. Тогда

$$u_i = u_{\nu-1} U_i + u_\nu V_i \;\; (i = \nu - 1, \ldots) \tag{5.2}$$

– решение, удовлетворяющее начальным условиям со значениями $u_{\nu-1}$ и u_ν. Из урав-



Фиг. 1

нения (5.1) и начальных условий следуют равенства

$$U_{\nu+1} = -\delta_\nu, \quad U_{\nu+2} = -\delta_\nu \alpha_{\nu+2}, \quad U_{\nu+3} = -\delta_\nu(\alpha_{\nu+3}\alpha_{\nu+2} - \delta_{\nu+2}),$$

$$V_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1}, \quad V_{\nu+2} = \alpha_{\nu+2}\alpha_{\nu+1} - \delta_{\nu+1}, \ldots$$

Общими формулами являются

$$U_{\nu+i} = -\delta_\nu u_{i-1}^{**}, \quad V_{\nu+i} = u_{i-1}^{*} \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{5.3}$$

Здесь, u_j^* – j-й континуант матрицы A^*, остающейся после вычеркивания из A строк и столбцов 1, ...,ν, и u_j^{**} – j-й континуант матрицы A^{**}, остающейсяпосле вычеркивания из A строк и столбцов 1, ..., ν + 1. Матрицы A^* и A^{**} – p-периодические и обе имеют одни и те же характеристические корни q_1^p и q_2^p. Их континуанты даны формулами (4.3), (4.11) или (4.14), в зависимости от того, какой из трех случаев рассматривается. Уравнения (5.3) и (5.2) дают желаемую формулу

$$u_{\nu+i} = u_\nu u_i^* - u_{\nu-1}\delta_\nu u_{i-1}^{**} \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{5.4}$$

6. Применения к механическим системам. *Трехмоментные уравнения для многопролетных балок.* На фиг. 1, *а* изображена неразрезная балка на опорах 0, ..., n + 1 с пролетами 1, ..., n + 1 ($n > 2$). Система n раз статически неопределима. На фиг. 1, *б* показана соответствующая статически определенная система с шарнирами в опорах 1, ..., n и с неизвестными моментами M_1, ..., M_n. Эти две системы эквивалентны, если моменты таковы, что производные dw/dx прогиба $w(x)$ непрерывны в опорах. Это условие выражается так называемыми трехмоментными уравнениями

$$\frac{l_i}{I_i} M_{i-1} + 2\left(\frac{l_i}{I_i} + \frac{l_{i+1}}{I_{i+1}}\right) M_i + \frac{l_{i+1}}{I_{i+1}} M_{i+1} = Q_{i,i+1} \tag{6.1}$$

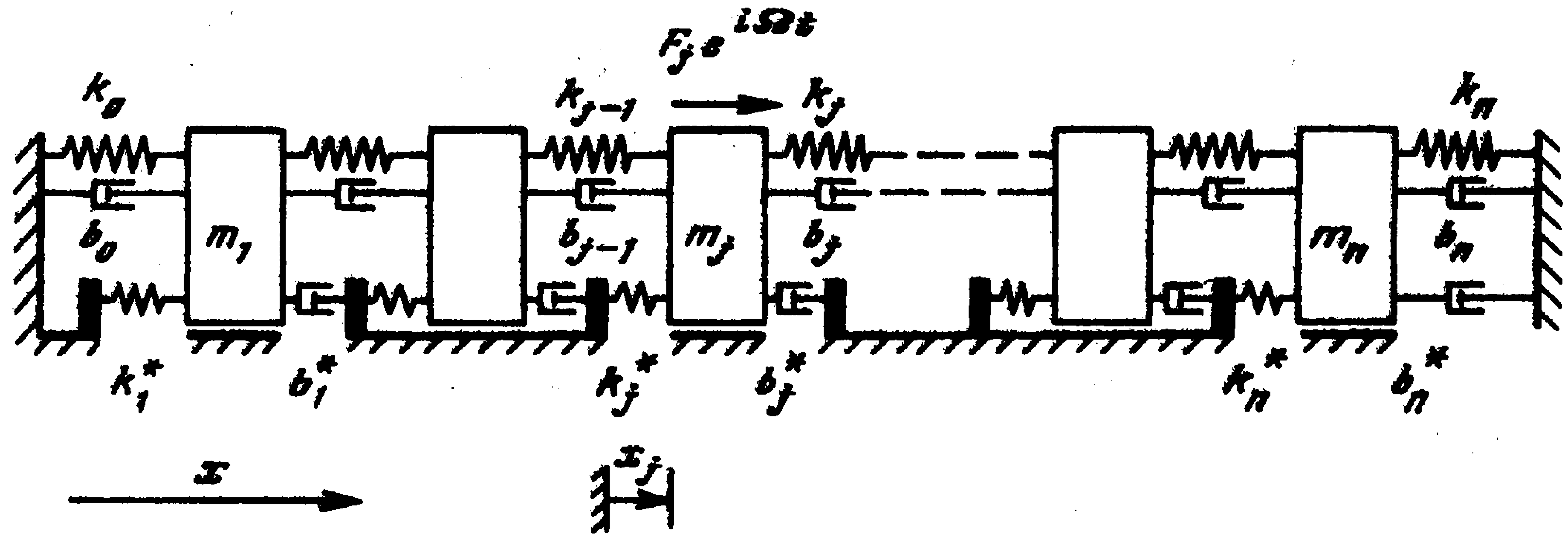
$$(i = 1, \ldots, n; \; M_0 = M_{n+1} = 0)$$

Здесь l_i – длина i-го пролета, I_i – момент инерции его поперечного сечения, $Q_{i,i+1}$ – величина, зависящая от нагрузок на пролеты i и i + 1.

В частном случае одинаковых пролетов с $l_i/I_i \equiv l/I$ уравнения имеют вид

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = Q_{i,i+1} I / l \quad (i = 1, \ldots, n; \; M_0 = M_{n+1} = 0)$$

Матрица коэффициентов есть симметричная тёплицева матрица. Квадратное уравнение (3.2) имеет действительные корни $q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Элементы обратной матрицы



Фиг. 2

даны первой строкой формулы (3.14) при $\delta = \beta = 1$:

$$(A^{-1})_{ij} = (A^{-1})_{ji} = (-\sqrt{r})^{i-j} \frac{\sqrt{r}}{1-r} \frac{(1-r^j)(1-r^{n+1-i})}{1-r^{n+1}} \quad (i \geqslant j)$$

$$r = (2-\sqrt{3})^2 \approx 0,268^2$$

Все элементы матрицы, за исключением элементов в строках 1 и n и в столбцах 1 и n, имеют хорошее приближение

$$(A^{-1})_{ij} = (A^{-1})_{ji} \approx 0,289(-0,268)^{i-j} \quad (i \geqslant j;\ i, j \neq 1, n)$$

Элементы $(1, n)$ и $(n, 1)$ матрицы имеют поправочный множитель $(1-r)^2 \approx 0{,}86$, все другие элементы строк 1 и n и столбцов 1 и n имеют поправочный множитель $(1-r) \approx 0{,}93$.

В качестве другого примера рассмотрим балку постоянного поперечного сечения с тремя периодически повторяющимися длинами пролетов $l_1 = l$, $l_2 = al$ и $l_3 = bl$. После умножения уравнений (6.1) на l/l матрица коэффициентов будет симметричной и периодической с периодом $p = 3$ и с параметрами

$$\alpha_1 = 2(1+a),\ \alpha_2 = 2(a+b),\ \alpha_3 = 2(b+1);\ \beta_1 = a,\ \beta_2 = b,\ \beta_3 = 1$$

Характеристическое уравнение (4.10) имеет вид

$$q^6 - 2[3(a+b)(1+a+b+ab)+2ab]q^3 + a^2b^2 = 0$$

Его корни q_1^3 и q_2^3 действительны, положительны и различны. Это следует из положительности их суммы и произведения, а также дискриминанта характеристического уравнения. Континуанты вычисляются по формулам (4.11), в правой части которых

$$u_i = \begin{cases} 1 & (i=0) \\ \alpha_1 & (i=1) \\ \alpha_1\alpha_2 - \beta_1^2 & (i=2) \end{cases}, \quad \vartheta_{p-i-2} \prod_{j=0}^{i} \delta_j = \begin{cases} \alpha_2\beta_3^2 & (i=0) \\ \beta_1^2\beta_3^2 & (i=1) \\ 0 & (i=2) \end{cases}$$

Вынужденные колебания цепочек тел. На фиг. 2 изображена цепочка n тел с массами $m_1, ..., m_n$, вынужденных двигаться вдоль горизонтальной опоры.

Тела и опора взаимосвязаны двумя группами пружин и двумя группами демпферов. Одна группа пружин имеет жесткости $k_0, \ldots, k_n$, другая – жесткости $k_1^*, \ldots, k_n^*$. Постоянные демпферов равны $b_0, ..., b_n$ и $b_1^*, \ldots, b_n^*$ соответственно. Когда система находится в равновесии в отсутствие внешних сил, пружины могут быть напряжены. Пусть x_j – горизонтальное смещение тела j от его положения равновесия. Тела подвержены гармоническим возмущающим силам $F_j e^{i\Omega t}$ с общей для всех частотой Ω и с произвольными действительными амплитудами $F_j (j = 1, ..., n)$. Стационарный отклик $x_j(t) = X_j e^{i\Omega t} (j = 1,\dots,n)$, где X_j – комплексная амплитуда тела j. Вычислим эти амплитуды.

Пусть m_0 и k_0 – эталонные масса и жесткость пружины, соответственно. Введем безразмерные величины

$$\omega_0^2 = \frac{k_0}{m_0},\quad \tau = \omega_0 t,\quad \mu_j = \frac{m_j}{m_0},\quad c_j = \frac{k_j}{k_0},\quad c_j^* = \frac{k_j^*}{k_0}$$

$$2D_j = \frac{b_j}{\sqrt{m_0 k_0}},\quad 2D_j^* = \frac{b_j^*}{\sqrt{m_0 k_0}},\quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

Тогда уравнения движения запишутся в виде (штрих означает производную по τ)

$$\mu_j x_j'' - 2D_{j-1}x_{j-1}' + 2(D_j^* + D_{j-1} + D_j)x_j' - 2D_j x_{j+1}' -$$

$$-c_{j-1}x_{j-1} + (c_j^* + c_{j-1} + c_j)x_j - c_j x_{j+1} = (1/k_0)F_j e^{i\eta\tau}$$

$$(j = 1,\dots,n;\ x_0 = x_{n+1} \equiv 0)$$

Подстановка $x_j(\tau) = X_j e^{i\eta\tau} (j = 1,\dots,n)$ приводит к системе линейных уравнений для искомых стационарных амплитуд. Их матричная форма есть $AX = (1/k_0)F$ с симметричной, трехдиагональной матрицей коэффициентов A, имеющей комплексные параметры

$$\alpha_j = -\mu_j\eta^2 + (c_j^* + c_{j-1} + c_{j+1}) + i2\eta(D_j^* + D_{j-1} + D_{j+1})\ (j = 1,\dots,n)$$

$$\beta_j = -c_j - i2D_j\eta,\quad \delta_j = \beta_j^2\quad (j = 1,\dots,n-1)$$

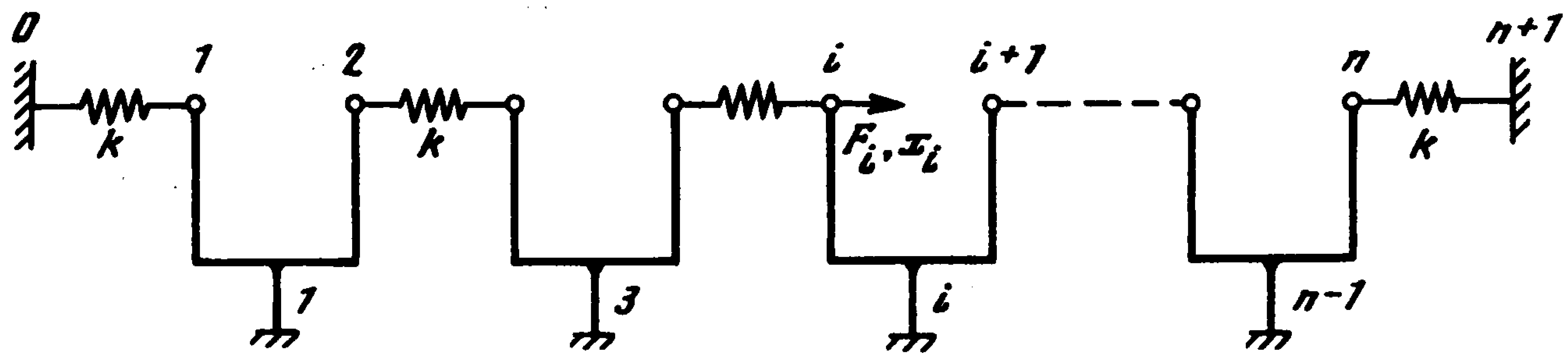
Они будут p-периодическими ($p \geqslant 1$), если массы, жесткости пружин и/или постоянные демпферов являются p-периодическими. Точные результаты для элементов обратной матрицы даются только для недемпфированной системы с одинаковыми массами ($m_j \equiv m$), с $k_0 = k_n = 0$ и с двумя группами одинаковых постоянных $k_j \equiv k$ ($j = 2, ..., n - 1$), $k_j^* \equiv k^*$ $(j = 1,\dots,n)$. Полагая $m_0 = m$ и $k_0 = k^*$, получаем $\mu_j \equiv 1$, $c_j \equiv k/k^* = c$, $c_j^* \equiv 1$ ($j = 1, ..., n$), при этом матрица A будет симметричной тёплицевой матрицей с возмущениями. Ее параметрами будут $\alpha = 1 - \eta^2 + 2c$, $\beta = \gamma = -c$ и $\alpha_1 = \alpha_n = \alpha + \beta$. Это случай (3.15) с $\sigma_1 = 1$. Параметры r и φ определяются формулами (3.9) и (3.12):

$$r(\eta, c) = \frac{1-\zeta_+}{1+\zeta_+},\quad \varphi(\eta, c) = \operatorname{arctg}\zeta_-\quad (0 < \varphi \leqslant \pi/2) \tag{6.2}$$

$$\zeta_\pm = \sqrt{\pm(1-\eta^2)(1-\eta^2+4c)}/|1-\eta^2+2c|$$

Элементы обратной матрицы даются формулами (3.22):

$$(A^{-1})_{ij} = (A^{-1})_{ji} =$$



Фиг. 3

$$
= \begin{cases}
\dfrac{1}{c}(\sqrt{r})^{i-j+1} \dfrac{(1+r^{j-1/2})(1+r^{n-i+1/2})}{(1-r)(1-r^n)} & (\eta^2 < 1) \\
\text{матрица } A \text{ сингулярна} & (\eta^2 = 1) \\
\dfrac{1}{c} \dfrac{\cos[(j-1/2)\varphi]\cos[(n-i+1/2)\varphi]}{\sin\varphi \sin n\varphi} & (1 < \eta^2 < 1+2c) \\
\dfrac{1}{c}(-1)^{i-j+1} \dfrac{\sin[(j-1/2)\varphi]\sin[(n-i+1/2)\varphi]}{\sin\varphi \sin n\varphi} & (1+2c < \eta^2 < 1+4c) \\
\dfrac{-1}{c} \dfrac{(2j-1)[2(n-i)+1]}{4n} & (\eta^2 = 1+4c) \\
\dfrac{1}{c}(-\sqrt{r})^{i-j+1} \dfrac{(1-r^{j-1/2})(1-r^{n-i+1/2})}{(1-r)(1-r^n)} & (\eta^2 > 1+4c)
\end{cases}
$$

$(j = 1, \ldots, n, \ i \geqslant j)$

Система имеет n собственных частот, определяемых условием $\eta = 1$ и корнями η уравнения $\sin n\varphi(\eta, c) = 0$.

Решение интересно также в статическом случае, т.е. для $\eta = 0$. Тогда массы тел и демпферы не играют роли и в уравнениях полагаются равными нулю. Пружины могут быть произвольными упругими структурами. Формула (6.2) принимает вид

$$r = \left(\frac{\sqrt{1+4c} - 1}{\sqrt{1+4c} + 1} \right)^2$$

откуда следует, что $1/c = (1-\sqrt{r})^2 / \sqrt{r}$. При этом элементы обратной матрицы будут функциями только от r, i и j.

Периодическая упругая система под действием статических сил. Рассмотрим систему, состоящую из одинаковых упругих тел 1, 3, ..., $n-1$ и одинаковых пружин (жесткости k) с точками крепления 0, 1, ..., $n+1$ (фиг. 3). Внешние силы F_i, приложенные в точках $i = 1, 2, \ldots, n$, вызывают статические смещения x_i этих точек. Эти смещения должны быть вычислены. Тела могут иметь другие формы, отличные от изображенных на фиг. 3. Для индивидуального тела задана матрица жесткости K. Она связывает смещения x_i и x_{i+1} с силами R_i и R_{i+1}, действующими на те же самые точки:

$$\begin{Vmatrix} K_{11} K_{12} \\ K_{12} K_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} R_i \\ R_{i+1} \end{Vmatrix} \tag{6.3}$$

Элемент K_{12} отрицателен, равен нулю или положителен в зависимости от формы тела. Далее предполагается, что $K_{12} \neq 0$, так как в противном случае тела не соединены.

Действующие на тело $i(i = 1, 3,..., n - 1)$ силы $R_i = F_i - k(x_i - x_{i-1})$ в точке i и $R_{i+1} = F_{i+1} + k(x_{i+2} - x_{i+1})$ в точке $i + 1$ подставляем в уравнение (6.3):

$$\begin{Vmatrix} -k & k+K_{11} & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{12} & k+K_{22} & -k \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_{i-1} \\ x_i \\ x_{i+1} \\ x_{i+2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_i \\ F_{i+1} \end{Vmatrix}$$

$$(i = 1, 3, \ldots, n-1; \quad x_0 = x_{n+1} = 0)$$

После деления на k все пары уравнений комбинируем в уравнение $Ax = (1/k)F$. Симметричная матрица A имеет период $p = 2$ и параметры $\alpha_1 = 1 + K_{11}/k > 0$, $\alpha_2 = 1 + K_{22}/k > 0$, $\beta_1 = K_{12}/k$ (< 0 или > 0) и $\beta_2 = -1$. Характеристическое уравнение (4.4) принимает вид

$$q^4 - [(K_{11} + K_{22})/k + (K_{11}K_{22} - K_{12}^2)/k^2]q^2 + (K_{12}/k)^2 = 0$$

Его корни q_1^2 и q_2^2 действительны, положительны и различны. Следовательно, применимы приближения (4.19) и (4.20). Уравнение (4.11) дает положительные континуанты

$$u_{2m+i} = \begin{cases} [(1+q_1^2)q_1^{2m} - (1+q_2^2)q_2^{2m}]/(q_1^2 - q_2^2) & (i=0) \\ \alpha_1[q_1^{2(m+1)} - q_2^{2(m+1)}]/(q_1^2 - q_2^2) & (i=1) \end{cases} \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

Континуанты v_{2m+i} имеют такие же выражения, но с α_2 вместо α_1.

Элементы обратной матрицы даются формулой (2.1), в которую подставлены эти величины. Если $K_{12} < 0$, то все элементы матрицы A^{-1} положительны. Если $K_{12} > 0$, то все диагональные элементы матрицы A^{-1} также положительны, а в каждой строке и в каждом столбце распределение знаков есть [... + + − − + + − − ...], что имеет простое физическое объяснение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Muir Th.* A Treatise on the Theory of Determinants. N.Y.: Dover, 1960. 766 p.
2. *Meschkowski H.* Differenzengleichungen. Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1959. 243 S.
3. *Berg L.* Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen. Berlin: Deutsch. Verl. Wiss., 1979. 131 S.
4. *Ильин В.П., Кузнецов Ю.И.* Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985. 207 с.
5. *Rozsa P.* On the inverse of band matrices // Integr. Equat. and Oper. Theory. 1987. V. 10. № 1. P. 82–95.
6. *Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987. 320 с.
7. *Rozsa P., Bevilacqua R., Favati P., Romani P.* On the inverse of block tridiagonal matrices with applications to the inverses of band matrices and block band matrices // Operator theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäuser, 1989. V. 90. P. 447–469.
8. *Wittenburg J.* Explizite Lösungen für Probleme der Elastostatik mit tridiagonalen Koeffizientenmatrizen // ZAMM. 1993. Bd. 73. H. 7/8. S. T834-T836.

Карлсруэ

Поступила в редакцию
29.I.1998