

УДК 532.51:532.135

© 1998 г. А.Г. Петров

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ВЫДАВЛИВАНИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

В безынерционном приближении тонкого слоя [1] при произвольных значениях коэффициента вязкости и предельного напряжения сдвига, в рамках модели Бингама дается решение задачи о плоскопараллельном течении вязкопластичной среды между двумя параллельными пластинами при их сближении (разведении) с заданной скоростью. Получены аналитические выражения для поля скорости и давления. Определена граница ядра течения, где касательное напряжение на площадках параллельных плоскости пластин меньше предельного напряжения сдвига, а компонента скорости, параллельная пластинам, не меняется в поперечном направлении. Указан единственный параметр подобия, определяющий кинематические и динамические характеристики течения. При заданном законе движения пластин получено общее выражение для силы, действующей на пластины конечного размера, через безразмерную функцию единственного безразмерного параметра. Найден закон сближения (разведения) пластин под действием постоянной силы.

Решение задачи о вытеснении вязкой среды между сближающимися параллельными пластинами было получено в приближении тонкого слоя гидродинамической теории смазки [1]. Прандтлем построено точное решение для вытеснения чисто пластической среды [2]. Была получена малая поправка к решению Прандтля, когда вязкие напряжения малы по сравнению с пластичными [3]. Это решение отличается от решения Прандтля наличием тонкого пристеночного пограничного слоя, в котором деформации отличны от нуля.

Ниже сформулирована краевая задача о вытеснении вязкопластичной среды двумя параллельными пластинами в приближении тонкого слоя (при малом отношении расстояния между пластинами к длине пластин), дана ее вариационная формулировка и доказана теорема существования и единственности.

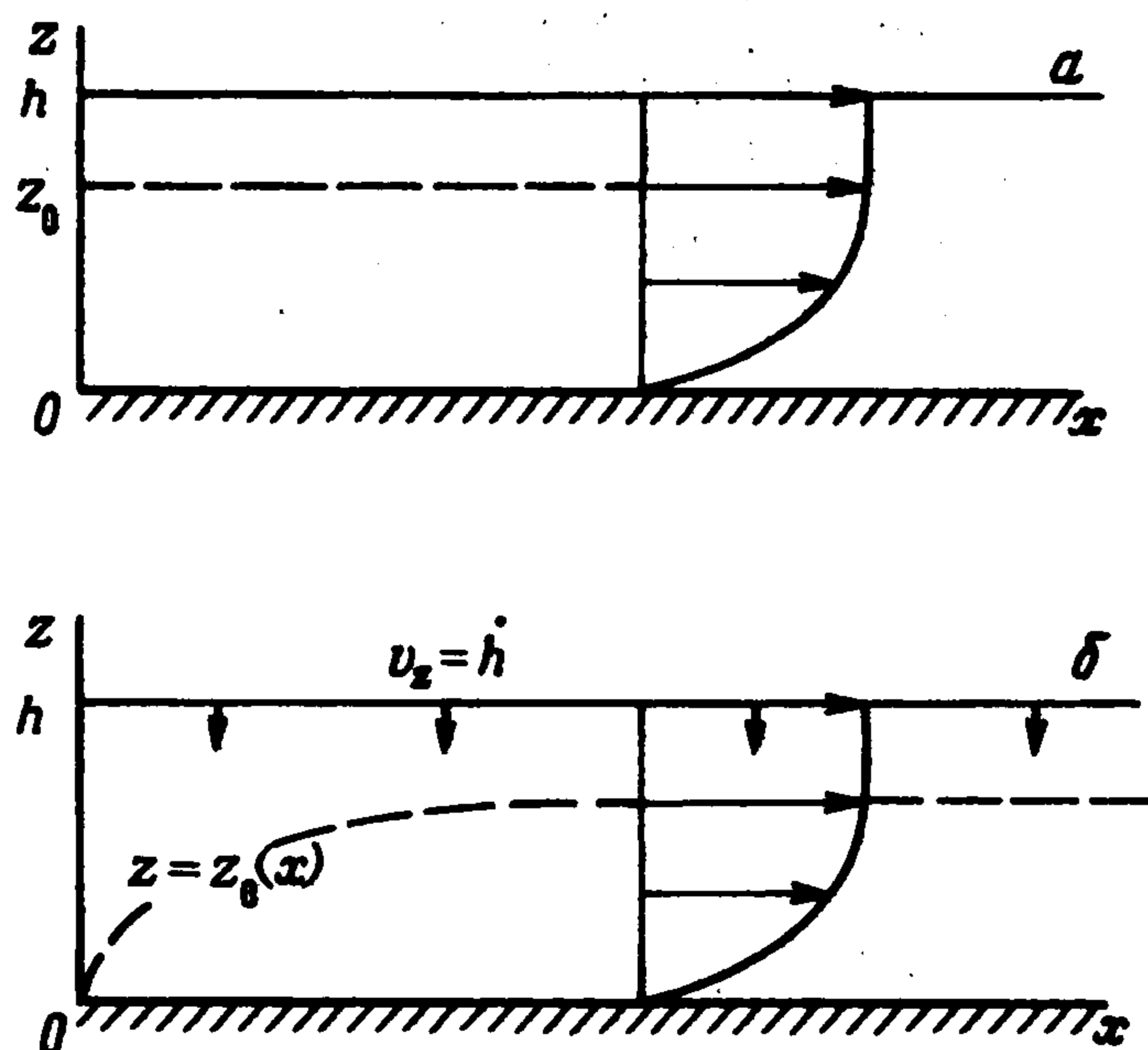
В этом приближении построено решение краевой задачи, справедливое при любых соотношениях между пластичностью и вязкостью. Оно основано на точном решении задачи вязкопластичного течения между двумя неподвижными пластинами под действием градиента давления [4]. Результат обобщает решения для вязкой среды [1], чисто пластичной среды [2] и вязкопластичной среды с малым коэффициентом вязкости [3] соответственно при нулевом, бесконечно большом и большом числах Сен-Венана.

1. Течение между двумя неподвижными пластинами. Для вязкопластичной среды связь между тензором напряжений p_{ij} и тензором скоростей деформации e_{ij} имеет вид [5]

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}; \quad \tau_{ij} = 2(\mu + \tau_0 / H)e_{ij} \quad (1.1)$$

$$H = (2e_{ij}e_{ij})^{1/2} > 0; \quad i, j = 1, 2, 3$$

где p – давление, μ – коэффициент динамической вязкости, τ_0 – предел текучести, по повторяющимся индексам i, j подразумевается суммирование.



Фиг. 1

Известно простое точное решение задачи о течении несжимаемой вязкопластичной среды является плоское течение между двумя неподвижными параллельными пластинами под действием градиента давления [4], его можно представить следующим образом (фиг. 1, а).

Девизор напряжений τ_{ij} имеет только две отличные от нуля компоненты $\tau_{13} = \tau_{31} = \tau_{xz}$ – касательное напряжение для площадок параллельных пластинам. Функция тока ψ зависит от безразмерного расстояния $Z = z/h$ от одной из пластин ($2h$ – расстояние между пластинами, Q – расход):

$$\psi = \frac{h^2 \tau_0 \text{sign} Q}{6\mu} \Psi(Z, Z_0) \quad (1.2)$$

$$\Psi = \frac{1}{1-Z_0} \times \begin{cases} Z^2(3Z_0 - Z), & 0 \leq Z \leq Z_0 \\ Z_0^2(3Z - Z_0), & Z_0 \leq Z \leq 1 \end{cases}$$

Компоненты скорости выражаются через функцию тока:

$$v_x = \partial\psi / \partial z; \quad v_z = -\partial\psi / \partial x = 0 \quad (1.3)$$

При $Z > 1$ скорость продолжается по симметрии.

Из (1.2) следует, что параболический профиль скорости при $Z \in [0, Z_0]$ гладко сопрягается с прямолинейным профилем при $Z \in [Z_0, 1]$. Граница $Z = Z_0$ отделяет область вязкого течения от области поступательного движения среды без деформации. Величина Z_0 , градиент давления и касательное напряжение связаны соотношениями

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\text{sign} Q \tau_0}{h(1-Z_0)}, \quad \tau_{xz} = (z-h) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.4)$$

Расход $Q = 2(\psi(1) - \psi(0))$ находится из (1.2) и выражается соотношением

$$a = \frac{\mu |Q|}{\tau_0 h^2} = \frac{Z_0^2 (1 - \frac{1}{3} Z_0)}{1 - Z_0} \quad (1.5)$$

Таким образом, при заданном градиенте давления по формуле (1.4) определится величина Z_0 , а поле скорости и расход – по формулам (1.2) и (1.5).

Приведенному решению можно придать иную трактовку, которая будет затем использована и для решения задачи о вытеснении вязкопластичной среды. Пусть

расход Q известен и нужно определить, какой для этого следует приложить градиент давления, найти поле скорости и величину Z_0 . Для решения этой задачи необходимо найти функцию $Z_0(a)$ из уравнения (1.5), а затем по формуле (1.4) – градиент давления и с помощью (1.1) – поле скорости. Уравнение (1.5) – кубическое относительно Z_0 , и его единственный в интервале $Z_0 \in [0, 1)$, корень можно представить рядами

$$Z_0 = 1 - 3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)b_m}{(3m+1)(a+1)^{3m+1}} \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{1-Z_0} = \frac{3}{2}(a+1) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(a+1)^{3m+2}}$$

$$b_0 = \frac{2}{9}, \quad b_1 = \frac{2^4}{3^5}, \dots, \quad b_m = \frac{2^{2m+1}(3m+1)!}{3^{3m+2}(2m+1)!(m+1)!}$$

Ряды (1.6) сходятся при всех $a \geq 0$. Для вычислений функций Z_0 и $1 - Z_0$ при $0 \leq a \leq a_0$ удобнее пользоваться разложениями

$$Z_0 = a^{1/2} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{18}a^{3/2} + \frac{1}{27}a^2 + \dots \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{1-Z_0} = 1 + a^{1/2} + \frac{2}{3}a + \frac{5}{18}a^{3/2} + \frac{1}{27}a^2 + \dots$$

(Значения параметра a_0 и соответствующие наилучшие приближения указаны в разд. 7.)

Ниже будет показано, как эти результаты распространить на решение задачи о вытеснении вязкопластичной среды двумя сближающимися параллельными пластинами.

2. Постановка общей задачи. Теоремы существования и единственности. Рассмотрим задачу о течении несжимаемой вязкопластичной среды между двумя параллельными пластинами, которые сближаются (расходятся) в направлении, перпендикулярном плоскости пластин (фиг. 1, б).

При размерах пластин l , существенно превышающих расстояние $2h$ между ними, используем приближение тонкого слоя для вязкой жидкости [1, 6]. Уравнения в напряжениях можно распространить и на вязкопластичную среду

$$\partial \tau_{xz} / \partial z = \partial p / \partial x, \quad \partial p / \partial z = 0 \quad (2.1)$$

Добавим к (2.1) решение уравнения неразрывности, выразив компоненты скорости через функцию тока (формулы (1.3)) и реологическое соотношение (1.1). В тонком слое следует учесть, что $\partial / \partial x \ll \partial / \partial z$, и всеми компонентами тензора напряжений можно пренебречь, кроме компонент $\tau_{13} = \tau_{31} = \tau_{xz}$. Тогда (1.1) примет вид

$$\tau_{xz} = \mu \partial^2 \psi / \partial z^2 + \tau_0 \operatorname{sign}(\partial^2 \psi / \partial z^2), \quad |\tau_{xz}| > \tau_0 \quad (2.2)$$

$$\partial^2 \psi / \partial z^2 = 0, \quad |\tau_{xz}| \leq \tau_0$$

Наконец, в системе координат, связанной с одной из пластин, из условий прилипания на пластинах $z = 0$ и $z = 2h$ вытекают следующие граничные условия для функции тока:

$$z = 0: \quad \partial \psi / \partial z = 0, \quad \partial \psi / \partial x = 0 \quad (2.3)$$

$$z = 2h: \quad \partial \psi / \partial z = 0, \quad -\partial \psi / \partial x = 2\dot{h}$$

где $2\dot{h}$ – скорость изменения расстояния между пластинами.

Начало координат $x = 0$ поместим на ось симметрии течения, тогда на концах отрезка $(0, l)$ следует поставить условия для функции тока и давления

$$\psi(0, z) = 0, \quad p(l, z) = p_l \quad (2.4)$$

Функции τ_{xz} и v_x должны быть непрерывно-дифференцируемыми по z , и, следовательно, функция тока должна иметь две непрерывные производные по z .

Задача (2.1)–(2.4) имеет единственное решение для функции тока, а следовательно, и для поля скорости.

Для доказательства воспользуемся вариационной формулировкой задачи для функции тока, которую нетрудно получить исходя из общих принципов для вязкопластичных сред [7, 8].

Функция тока ψ , удовлетворяющая всем условиям и уравнениям (2.1)–(2.4), реализует абсолютный минимум функционала I :

$$I = \int_0^l dx \int_0^{2h} D dz, \quad D = \frac{1}{2} \mu (\psi'')^2 + \tau_0 |\psi''| \quad (2.5)$$

среди всех дважды непрерывно-дифференцируемых функций ($\psi(x, z) \in C_2$), удовлетворяющих условиям на границе

$$\psi(0, z) = \psi(x, 0) = \psi'(x, 0) = \psi'(x, 2h) = 0, \quad \psi(x, 2h) = -2hx = Q(x) \quad (2.6)$$

где $Q(x)$ – расход через сечение с координатой x . Штрихом обозначена частная производная по z .

Диссипативный потенциал обладает следующими свойствами: строгая выпуклость, ограниченность снизу ($D \geq 0$). Отсюда следует строгая выпуклость, ограниченность снизу функционала I и существование у него единственного минимизирующего элемента. Производная D по ψ'' соответствует касательному напряжению τ_{xz} , определенному по (2.2), т.е.

$$\partial D / \partial \psi'' = \tau_{xz}(\psi'') \quad (2.7)$$

(Для определения производной от негладкой функции в (2.7) следует использовать понятие субдифференцируемости, которое обобщает обычное дифференцирование [9], с. 30–37.)

Пользуясь свойством (2.7), можно показать, что минимизирующий элемент вариационной задачи (2.5), (2.6) удовлетворяет всем уравнениям и условиям (2.1)–(2.4).

Действительно, для вариации D имеет тождество

$$\delta D = \frac{\partial D}{\partial \psi''} \delta \psi'' = \tau_{xz}(\psi'') \delta \psi'' = \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau_{xz} \delta \psi' - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \delta \psi \right) + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} \delta \psi \quad (2.8)$$

В силу (2.6) на границах $z = 0$ и $z = 2h$ вариации ψ и ее производной равны нулю: $\delta \psi = \delta \psi' = 0$. Поэтому для вариации функционала (2.5) из (2.8) получим

$$\delta I = \int_0^l dx \int_0^{2h} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} \delta \psi dz$$

Из необходимого условия экстремума $\delta I = 0$ получим уравнение для минимизирующего элемента

$$\partial^2 \tau_{xz} / \partial z^2 = 0 \quad (2.9)$$

Видно, что уравнение (2.9) для функции $\tau_{xz}(\psi'')$, определенной по (2.2), и краевые условия (2.6) эквивалентны уравнениям и условиям для ψ , вытекающим из (2.1)–(2.4).

Таким образом, доказана эквивалентность задачи (2.1)–(2.4), для функции тока и вариационной задачи (2.5)–(2.6) и тем самым доказана теорема существования и единственности функции тока ψ .

3. Решение краевой задачи. Если заменить в последнем условии (2.6) функцию $Q(x)$ на постоянную величину Q , то уравнения (2.9), (2.2) с условиями (2.6) представляют точную краевую задачу для функции тока установившегося течения вязкопластичной среды между двумя параллельными неподвижными пластинами. Точное ее решение дается формулами (1.2)–(1.4), в чем можно убедиться проверкой. Заметим, что переменная x входит в задачу (2.9), (2.2), (2.6) как параметр и поэтому ее решение для функции тока представляется формулами (1.2) и (1.4), где Q и a – функции координаты x , соответствующие последнему условию (2.6), т.е.

$$Q = -2hx, \quad a = \left| \frac{2\mu h}{\tau_0 h^2} x \right| \quad (3.1)$$

Для функции $Z_0(a)$ сохраняются все полученные в разд. 1 результаты, а именно: $Z_0(a) \in [0, 1)$ – единственный корень кубического уравнения (1.5) с параметром a ; функции $Z_0(a)$ и $(1 - Z_0(a))^{-1}$ определяются рядами (1.6), сходящимися при всех значениях аргумента a , или асимптотическими при $a \ll 1$ разложениями (1.7).

Таким образом, получено решение задачи о течении вязкопластичной среды между двумя пластинами при их сближении или удалении. Течение в произвольном сечении полностью определяется единственным безразмерным параметром a , который по своему смыслу является местным обратным числом Сен-Венана. В рассматриваемой задаче имеется единственный параметр подобия a [10]. При сближении пластин течение в сечении с параметром подобия a будет подобно течению между двумя неподвижными параллельными пластинами с расходом, соответствующим тому же значению a (фиг. 1, а, б). Компоненты скорости определяются из (1.2) и (1.3)

$$v_x = -\frac{h\tau_0 \operatorname{sign} h}{6\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{h}{3} \frac{\partial \Psi}{\partial Z_0} \frac{dZ_0}{da} \quad (3.2)$$

Производная dZ_0/da в (3.2) находится дифференцированием первого ряда (1.6) или первого разложения (1.7).

Оценки погрешности. Приближение тонкого слоя предполагает малость силы инерции $\rho(\partial v_x / \partial t + v_x \partial v_x / \partial x) \sim \rho v_x^2 / l$ по сравнению с силой вязкого сопротивления $\partial \tau_{xz} / \partial z \sim \mu v_x / (h^2 Z_0^2)$. Скорость оценивается величиной $v_x \sim hl / h$. Возникающая при отбрасывании сил инерции погрешность по порядку величины равна отношению сил инерции и вязкого сопротивления, т.е. числу Рейнольдса:

$$\operatorname{Re} = \rho v_x h^2 Z_0^2 / (\mu l) = \rho h Z_0^2 / \mu$$

Таким образом, полученное решение применимо при условии $\operatorname{Re} \ll 1$ и $h/l \ll 1$. Для чисто пластичного решения ($Z_0 = 0$) первое условие всегда выполнено и достаточно только условия $h/l \ll 1$.

Анализ решения. Точные выражения для напряжений в задаче о вытеснении чисто пластичной среды получены Прандтлем [2]

$$p = p_0 - \tau_0 \left(x/h + 2\sqrt{1 - (z-h)^2 / h^2} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_0 (z-h) / h$$

Проведем сравнение асимптотического решения (1.2)–(1.7), (3.1) с известными решениями в различных предельных случаях.

Давление для чисто пластичного течения находится из полученного решения (1.3) при $Z_0 = 0$ и равно $p = p_0 - \tau_0 x/h$. Оно отличается от точного на малую величину порядка h/l . Касательное напряжение по (1.3) совпадает с решением Прандтля [2].

Учет вязких сил при большом числе Сен-Венана [7] соответствует приближению

$a \ll 1$. Из (1.4) следует, что $Z_0 \approx \sqrt{a}$. Подставляя эту асимптотику в (1.2) и (1.3), получим двухчленное разложение, соответствующее полученному ранее решению [7].

Для чисто вязкого течения решение в точности соответствует решению (1.2)–(1.3), (3.1), если подставить в него предельное значение $Z_0 = 1$.

Таким образом, представленное решение для напряжений (1.4)–(1.7), (3.1) и для скоростей (1.2), (1.3) справедливо во всем диапазоне чисел Сен-Венана и включает в себя все известные до сих пор решения, если расстояние между пластинами мало по сравнению с их размером.

4. Сила. Силу, действующую на единицу ширины пластины можно вычислить, интегрируя давление по его поверхности и преобразуя соответствующий интеграл по частям, а затем используя первое соотношение (1.4)

$$F = 2 \int_0^l (p - p_l) dx = -2 \int_0^l x \frac{\partial p}{\partial x} dx = -\text{sign } \dot{h} \frac{\tau_0 l^2}{h} \frac{2f(a_l)}{a_l^2} = F_0 \frac{2f(a_l)}{a_l^3} = F_\infty \frac{2f(a_l)}{a_l^2} \quad (4.1)$$

$$F_0 = -2 \left(\frac{l}{h} \right)^3 \mu \dot{h}, \quad F_\infty = -\frac{\tau_0 l^2}{h} \text{sign } \dot{h}, \quad f(a) = \int_0^a \frac{ada}{1 - Z_0(a)}, \quad a_l = \frac{2\mu | \dot{h} | l}{\tau_0 h^2} \quad (4.2)$$

где p_l – давление на границе пластины при $x = l$, a_l – обратное число Сен-Венана; F_0 и F_∞ соответственно силы для случаев чисто вязкой ($\tau_0 = 0$, $a_l = \infty$) и чисто пластичной ($\mu = 0$, $a_l = 0$) сред.

Подставляя второй ряд (1.6) или второе разложение (1.7) в интеграл (4.2), найдем

$$f(a) = \frac{1}{2} a^3 + \frac{3}{4} a^2 - \frac{2}{9} \ln(a+1) + \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{3m(a+1)^{3m}} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(3m+1)(a+1)^{3m+1}} \quad (4.3)$$

$$\alpha = \frac{2}{9} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{3m(3m+1)} = 0,21546$$

$$f(a) = \frac{1}{2} a^2 + \frac{2}{5} a^{5/2} + \frac{2}{9} a^3 + \frac{5}{63} a^{7/2} + \frac{1}{4 \cdot 27} a^4 + \dots, \quad a < 1 \quad (4.4)$$

Ряд (4.3) сходится для всех $a \geq 0$. Для $a < 1$ удобнее пользоваться разложением (4.4).

Из полученного результата следует, что сила определяется единственным параметром подобия a_l .

При больших числах Сен-Венана ($a_l \ll 1$) из (4.1), (4.2), (4.4) и (4.6) получим асимптотическое разложение, найденное ранее [3]

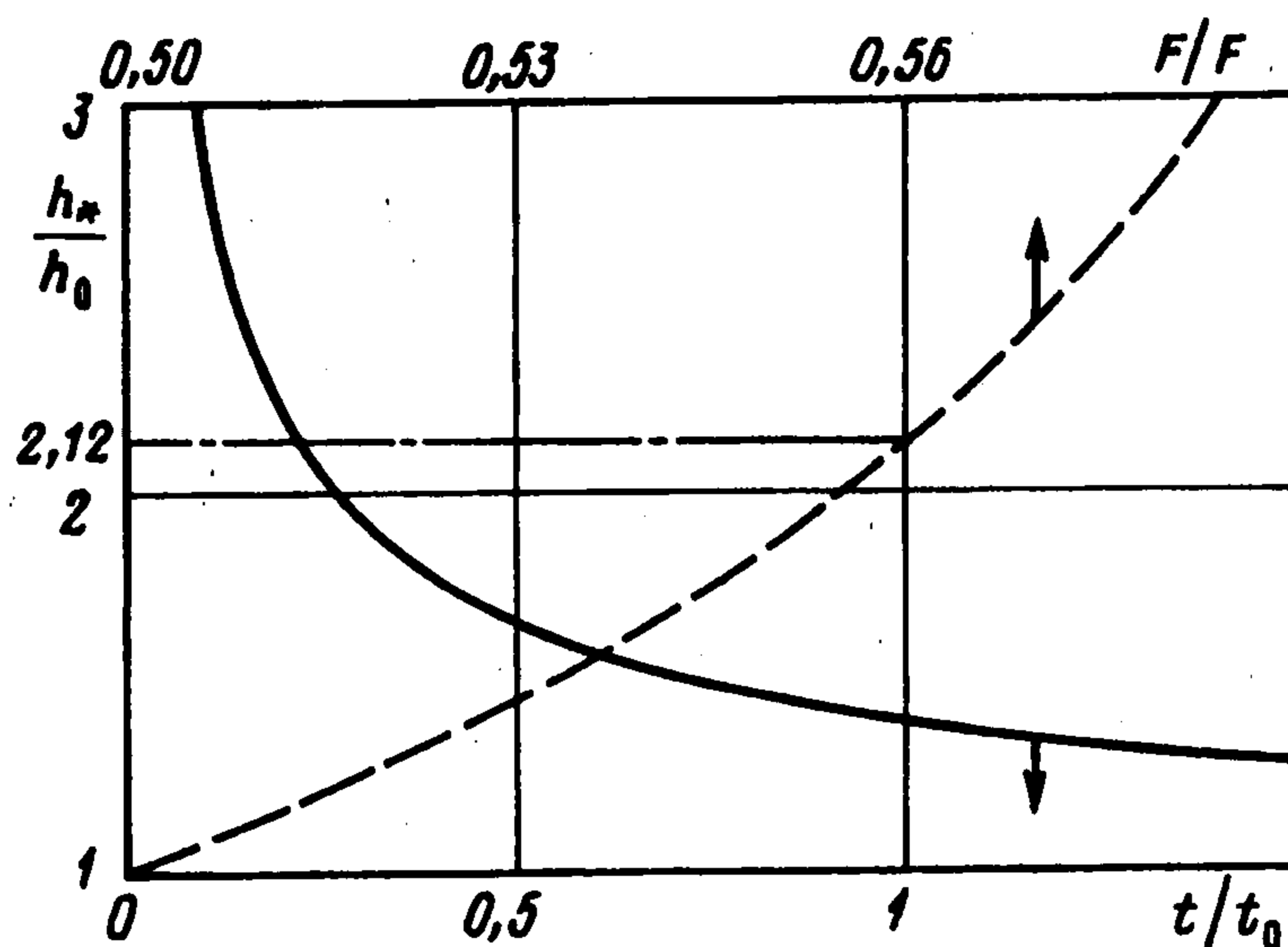
$$F = F_\infty \left(1 + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2l\mu |\dot{h}|}{\tau_0 h^2}} \right)$$

5. Движение пластин под действием постоянной силы. При заданной постоянной силе F выражения (4.1), (4.2) превращаются в дифференциальное уравнение относительно $h(t)$. Действительно, выражение (4.1) можно привести к виду

$$\frac{h}{h_0} = \frac{2f(a_l)}{a_l^2}, \quad h_0 = \frac{\tau_0 l^2}{|F|} \quad (5.1)$$

В силу неравенства $2f(a_l)/a_l^2 > 1$ заключаем, что $h > h_0$, т.е. h_0 – наименьшее расстояние, на которое могут сблизиться пластины под действием силы F . Переменную a_l , исходя из ее определения (4.2), можно представить через производную по времени следующим образом:

$$a_l = \left| \frac{d}{dt} \frac{h_0 t_0}{h} \right|, \quad h_0 t_0 = \frac{\mu l}{\tau_0}, \quad t_0 = \frac{\mu |F|}{\tau_0^2 l} \quad (5.2)$$



Фиг. 2

Тогда, подставляя (5.2) в соотношение (5.1), получим дифференциальное уравнение для безразмерной функции h_0/h от безразмерного времени t/t_0 . Можно убедиться проверкой, что решение этого уравнения представимо в следующем параметрическом виде:

$$\frac{h_0}{h} = \Phi(a_1), \quad \frac{t}{t_0} = \text{sign } h \int_{a_1}^{\infty} \frac{\Phi'(a) da}{a}, \quad \left(\Phi(a) = \frac{a^2}{2f(a)} \right) \quad (5.3)$$

Можно получить асимптотические разложения при достаточно малых a :

$$\Phi(a) = 1 - \frac{4}{5} a^{1/2} + \frac{44}{225} a + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n a^{1+n/2} \quad (5.4)$$

$$\frac{t}{t_0} = \frac{4}{5} a^{-1/2} + \frac{44}{225} \ln a + b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} + 1 \right) \Phi_n a^{n/2}$$

$$b = -\frac{91}{225} - \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n a^{-1+n/2} \right) da - \int_1^{\infty} \frac{\Phi(a)}{a^2} da = -0,7328$$

Укажем значения первых семи коэффициентов Φ_n , входящих в разложения (5.4): 0,0404; -0,0107; -0,0112; -0,0013; 0,0027; 0,0014; -0,0003.

При $a < 1,4$ с погрешностью менее 1% функцию $t(a)$ можно вычислять по формуле (5.4). При $a \geq 2$ вычисления с той же погрешностью можно проводить по следующей асимптотической формуле

$$t/t_0 = a/(2f(a)) + \frac{4}{9} \ln(1 + 3/(2a)) - 2/(3a)$$

Таким образом, установлено, что движение пластин при любых значениях силы, коэффициента вязкости, предельного напряжения сдвига и геометрических характеристик определяется одной универсальной зависимостью h/h_0 от t/t_0 . Вид этой зависимости изображен на фиг. 2 сплошной линией.

6. Условие безотрывного разведения пластин. Разведение пластин под действием постоянной силы происходит по той же траектории $h(t)$, что и сближение, но в обратном направлении. Однако на некоторых участках траектории в силу понижения давления до нуля на поверхности пластин может образоваться каверна (отрыв течения). С помощью (1.4) и (2.4) условие безотрывного движения можно записать так:

$$p(0) = p_l - \int_0^l \frac{\tau_0}{h} \frac{dx}{1 - Z_0} > 0 \Rightarrow h \geq \frac{\tau_0 l}{p_l} \frac{P(a_1)}{a_1}, \quad P(a_1) = \int_0^{a_1} \frac{da}{1 - Z_0(a)} \quad (6.1)$$

(использована замена $dx = l da/a_1$).

Подставляя в приведенное неравенство вместо h закон движения (5.1), получим условие безотрывного разведения пластин

$$G(a_l) = \frac{a_l}{f(a_l)} P(a_l) \leq \frac{F_l}{F}, \quad F_l = 2lp_l \quad (6.2)$$

Подставляя в интеграл (6.1) второй ряд (1.6) или второе разложение (1.7), получим ряд и разложения для интеграла, входящего в (6.1)

$$P(a) = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a - \beta + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(3m+1)(a+1)^{3m+1}} \quad (6.3)$$

$$\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{3m+1} = 0,2496$$

$$P(a) = a + \frac{2}{3}a^{3/2} + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{9}a^{5/2} + \frac{1}{81}a^3 + \dots \quad (a < 1) \quad (6.4)$$

Полученные разложения (6.3) и (6.4) для $P(a)$ и разложения (4.3) и (4.4) для $f(a)$ дают исчерпывающую информацию относительно функции $G(a)$. При изменении аргумента $0 \leq a < \infty$ функция $G(a)$ монотонно убывает от значения $G(0) = 2$ до значения $G(\infty) = 3/2$. Отсюда следует, что при $F \leq F_l/2$ разведение пластин будет всегда безотрывным. При $F \geq 2F_l/3$, наоборот, произвести разведение безотрывно невозможно. В промежуточном случае $F_l/2 \leq F \leq 2F_l/3$ разведение пластин будет безотрывным при $h \geq h_*$. Критическое значение h_* определяется из совместного решения уравнения (5.1) и уравнения, вытекающего из (6.1), т.е.:

$$\frac{h_*}{h_0} = \frac{2f(a_l)}{a_l^2}, \quad \frac{f(a_l)}{a_l P(a_l)} = \frac{F}{F_l}$$

На фиг. 2 штриховой линией изображена зависимость h_*/h_0 от F/F_l . Масштаб переменной $1/2 \leq F/F_l \leq 2/3$ показан на верхней горизонтали. (Например, при $F/F_l = 0,56$ течение будет безотрывным на части траектории $h_*/h_0 > 2,12$.)

7. О корнях уравнения (1.5). Функция $a(Z_0)$, заданная формулой (1.5), монотонно возрастает на интервале $[0, 1)$ и принимает любое неотрицательное значение ровно один раз. Для нее существует обратная функция $Z_0(a) \in [0, 1)$ и определяет единственный корень уравнения (1.5) из интервала $[0, 1)$ при любом $a \geq 0$.

Для построения рядов (1.6), соответствующих корню уравнения (1.5) из интервала $Z_0(a) \in [0, 1)$, преобразуем уравнение (1.5) к виду

$$3(a+1) = \frac{(1-Z_0)^3 + 2}{1-Z_0} \quad (7.1)$$

и воспользуемся теоремой Лагранжа ([11], с. 507–511) об обращении рядов.

Пусть имеется уравнение относительно y вида

$$y = A + x\Phi(y) \quad (7.2)$$

где x – переменная, A – постоянная величина, $\Phi(y)$ – функция аналитическая в точке $y = A$. Тогда существует окрестность $x \in (-\epsilon, \epsilon)$, в которой корень уравнения (7.2) представляется рядом

$$e = A + x\Phi(A) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dA^{n-1}} [\Phi^n(A)] \quad (7.3)$$

Чтобы получить ряды (1.6), достаточно преобразовать уравнение (7.1) к виду (7.2), а затем вычислить коэффициенты, входящие в ряд Лагранжа (7.3).

С помощью замен

$$x = \frac{1}{3(a+1)}, \quad y = 1 - Z_0, \quad \Phi(y) = y^3 + 2, \quad A = 0 \quad (7.4)$$

n	Z ₀		(1 - Z ₀) ⁻¹	
	a ₀	r ₊ = r ₋	a ₀	r ₊ = r ₋
2	0,50	0,0200	0,070	0,0460
3	0,37	0,0050	0,130	0,0130
4	0,33	0,0015	0,237	0,0021

уравнение (7.1) приводится к виду (7.2).

Производные от $\Phi^n(A)$ в (7.2) в точке $A = 0$ выражаются через биномиальные коэффициенты C_{3m+1}^m . Подставляя их выражения в ряд Лагранжа (7.3), получим первый ряд (1.6).

Вторая замена переменных уравнения (7.1)

$$x = \frac{-4}{27(a+1)^3}, \quad y = \frac{2}{3(a+1)(1-Z_0)}, \quad \Phi(y) = y^{-2}, \quad A = 1 \quad (7.5)$$

также приводит его к виду (7.2). Подставляя (7.5) в ряд Лагранжа (7.2) и вычисляя производные функции $\Phi^n(A) = A^{-2n}$ в точке $A = 1$, получим второй ряд (1.6).

Покажем как строить наилучшие приближения с помощью частичных сумм рядов (1.6) и разложений (1.7) на примере четырехчленных разложений

$$Z_0 = 1 - \frac{2}{3(a+1)} - \frac{8}{81(a+1)^4} - \frac{32}{3^6(a+1)^7}, \quad a > a_0 \quad (7.6)$$

$$Z_0 = a^{1/2} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{18}a^{3/2} + \frac{1}{27}a^2, \quad a < a_0$$

Задача заключается в определении граничной точки a_0 , при которой формулы (7.6) определяют функцию $Z_0(a)$ с наименьшей погрешностью. Погрешность приближения (7.6) при $a > a_0$ и при $a < a_0$ оценивается величинами

$$r_+ \approx \frac{-2^9}{3^9(a+1)^{10}}, \quad r_- \approx \frac{5}{216a^{5/2}}$$

Наилучшее приближение и наибольшая погрешность находятся из уравнения $|r_+(a)| = |r_-(a)|$. Отсюда получим $a_0 = 0,33$; наибольшая ошибка $|r_+| = |r_-| = 0,0015$.

Аналогично можно построить наилучшее трехчленное приближение. Для него получим наибольшую ошибку $|r_+| = |r_-| = 0,005$ при $a_0 = 0,366$.

Точно так же находим наилучшее двух-, трех-, и четырехчленные приближения для функции $1/(1 - Z_0)$. Результаты приведены в таблице. В верхней строке указан вид функции. В первой колонке указано число слагаемых в частичных суммах рядов (1.6) и разложений (1.7). В последующих колонках указаны значения a_0 и наибольшей ошибки r_{\pm} . Учет каждого последующего члена уменьшает погрешность примерно в 4 раза.

Автор благодарит Д.М. Климова, А.В. Гноевого и В.М. Чеснокова за обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01862).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гидродинамическая теория смазки. Л.: Гостехиздат, 1934. 574 с.
2. Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 452 с.
3. Мясников В.П. О сдавливании вязко-пластического слоя жесткими плитами // Изв. АН СССР. Механика и Машиностроение. 1963. № 4. С. 92-96.

4. *Воларович М.П., Гуткин А.М.* Течение пластично-вязкого тела между двумя параллельными плоскими стенками и кольцевом пространстве между коаксиальными трубками // Журн. техн. физики. 1946. Т. 16. Вып. 3. С. 321–328.
5. *Качанов Л.М.* Механика пластических сред. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 215 с.
6. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
7. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы в теории течений жестко-вязко-пластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1971. 114 с.
8. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жестко-пластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
9. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы М.: Мир, 1979. 399 с.
10. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
11. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 807 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.IX.1997