УДК 62–50

© 1998 г. Г.Е. Иванов

ГАРАНТИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ

Рассматривается класс антагонистических линейных дифференциальных игр (ДИ) на фиксированном отрезке времени с эллипсоидальным функционалом платы. Этот класс ДИ охватывает задачи, предполагающие как жесткие ограничения на управления игроков, так и требования по минимизации расходов на управления. Известные классы дифференциальных игр, такие как линейные ДИ с квадратичным критерием качества и линейные ДИ с эллипсоидами в качестве терминального множества и допустимых множеств управлений игроков, рассматриваемые в методе эллипсоидов А.Б. Куржанского, являются предельными случаями ДИ данного класса. Вводится понятие u-стратегической функции, которое выражает свойство u-стабильности для эллипсоидальных функций. Приведен эффективный алгоритм вычисления u-стратегической функции, основанный на методе эллипсоидов А.Б. Куржанского. Основной результат работы состоит в том, что гарантированная позиционная стратегия игрока **u** определяется некоторой явной формулой через u-стратегическую функцию. Приведено доказательство указанного результата, основанное на теореме выживания для дифференциальных уравнений.

1. Дифференциальная игра с эллипсоидальной платой. Через PD^n будем обозначать класс симметрических положительно определенных $(n\times n)$-матриц, через Ω^n – следующее множество наборов, состоящих из матрицы и двух чисел:

$$\Omega^n = \{(K,\theta,\sigma) | K \in \mathrm{PD}^n, \quad \theta > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}\}$$

Для любого набора $\omega = (K, \theta, \sigma) \in \Omega^n$ определим функцию $\varphi(\cdot; \omega)$ векторной переменной $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi(x;\omega) = \begin{cases} -\sigma - \theta\sqrt{1 - x^T K^{-1} x}, & x^T K^{-1} x \leqslant 1 \\ +\infty, & x^T K^{-1} x > 1 \end{cases}$$

Графиком функции $\varphi(\cdot; \omega)$ является часть поверхности эллипсоида в $\mathbb{R}^{n+1}$, поэтому функции $\varphi(\cdot; \omega)$ будем называть эллипсоидальными.

Сопряженной к функции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, будем называть [1] функцию

$$f^*(\psi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\psi^T x - f(x)\right)$$

Лемма 1.1. Для любого набора $\omega = (K, \theta, \sigma) \in \Omega^n$ функция $\varphi(\cdot; \omega)$ выпукла и полунепрерывна снизу, а сопряженная к ней функция имеет вид

$$\varphi^*(\psi;\omega) = \sigma + \sqrt{\theta^2 + \psi^T K \psi}$$

Классами эллипсоидальных функций Φ^n и сопряженных эллипсоидальных функций Φ^{n*} будем называть следующие классы функций:

$$\Phi^n = \left\{\varphi(\cdot;\omega) \,\middle|\, \omega \in \Omega^n\right\}, \quad \Phi^{n*} = \left\{\varphi^*(\cdot;\omega) \,\middle|\, \omega \in \Omega^n\right\}$$

Рассмотрим дифференциальную игру (ДИ)

$$\dot{x}(t) = v(t) - u(t), \quad t \in [T_0, T] \tag{1.1}$$

с функционалом платы

$$J = \alpha(x(T)) + \int\limits_{T_0}^{T} \big(\beta(t, u(t)) - \gamma(t, v(t))\big) dt \tag{1.2}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $u(t)$, $v(t) \in \mathbb{R}^n$ – управление игроков.

Функцию $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ будем называть терминальной, а β, $\gamma\colon [T_0, T] \times \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – штрафными функциями. Цель игрока **u** состоит в минимизации значения функционала J, цель игрока v – противоположная.

Известно, что ДИ с линейной динамикой

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) - B(t)u(t) + C(t)v(t)$$

преобразованием координат сводится к игре с динамикой (1.1).

Будем говорить, что функционал платы (1.2) является эллипсоидальным, если терминальная и штрафные функции эллипсоидальны относительно фазового вектора:

$$\alpha, \beta(t, \cdot), \gamma(t, \cdot) \in \Phi^n \ \forall t \in [T_0, T] \tag{1.3}$$

Это означает, что существуют наборы ω_α, $\omega_\beta(t)$, $\omega_\gamma(t) \in \Omega^n$:

$$\alpha(x) = \varphi(x; \omega_\alpha), \quad \beta(t, u) = \varphi(u; \omega_\beta(t))$$

$$\gamma(t, v) = \varphi(v; \omega_\gamma(t)), \quad \omega_\alpha = (K_\alpha, \theta_\alpha, \sigma_\alpha)$$

$$\omega_\beta(t) = \big(K_\beta(t), \theta_\beta(t), \sigma_\beta(t)\big), \quad \omega_\gamma(t) = \big(K_\gamma(t), \theta_\gamma(t), \sigma_\gamma(t)\big)$$

Далее всегда будем полагать, что функции ω_β, ω_γ: $[T_0, T] \to \Omega^n$ непрерывны.

Через $\delta(\cdot; M)$ будем обозначать индикаторную функцию множества $M \subset \mathbb{R}^n$:

$$\delta(x; M) = \begin{cases} 0, & x \in M \\ +\infty, & x \notin M \end{cases}$$

В предельном случае, когда $\theta_\alpha = \theta_\beta(t) = \theta_\gamma(t) = 0$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta(t) = \sigma_\gamma(t) = 0$, терминальная и штрафные функции являются индикаторными функциями некоторых эллипсоидов M, $P(t)$, $Q(t)$:

$$\alpha(x) = \delta(x; M), \quad \beta(t, x) = \delta(x; P(t)), \quad \gamma(t, x) = \delta(x; Q(t))$$

При этом рассматриваемая ДИ становится игрой с терминальным множеством M и ограничениями на управления

$$u(t) \in P(t), \quad v(t) \in Q(t) \tag{1.4}$$

Во многих приложениях игроку **u** важно не только попасть на заданный терминальный эллипсоид M, но, кроме того, желательно попасть как можно ближе к его центру. Данные требования можно формализовать, рассмотрев ДИ (1.1), (1.2) с ограничениями (1.4) и терминальной функцией $\alpha \in \Phi^n$: $\alpha(x) = \varphi\big(x; (K_\alpha, \theta_\alpha, \sigma_\alpha)\big)$, где K_α –

матрица терминального эллипсоида $M = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| x^T K_\alpha^{-1} x \leq 1\right\}$, θ_α – масштабный коэффициент.

В реальных задачах могут быть заданы не только жесткие ограничения на управления игроков, но, кроме того, часто требуется минимизировать затраты на эти управления. Будем полагать, что множеством допустимых векторов управлений каждого игрока в каждый момент времени является эллипсоид. Затраты на управление игрока минимальны, если вектор управления совпадает с центром эллипсоида. Данные требования могут быть формализованы путем введения штрафных функций $\beta(t, \cdot), \gamma(t, \cdot) \in \Phi^n$.

Предельные соотношения

$$\frac{1}{2} x^T K x = \lim_{\theta \to +\infty} \varphi\left(x; \left(\theta K^{-1}, \theta, -\theta\right)\right) = \lim_{\theta \to +\infty} \varphi^*\left(x; \left(\theta K^{-1}, \theta, -\theta\right)\right)$$

показывают, что ДИ с квадратичным критерием качества являются предельным случаем дифференциальных игр (1.1)–(1.3).

2. Стратегическая функция. Как известно из теории ДИ [2], гарантированная стратегия игрока **u** строится с помощью *u*-стабильной функции. В данной работе *u*-стабильная функция ищется в классе эллипсоидальных функций $\varphi(\cdot; \omega)$, $\omega \in \Omega^n$. В связи с этим вместо понятия *u*-стабильности функции $\varphi(x; \omega(t))$ будет удобнее определить следующее понятие *u*-стратегической функции.

Определение 2.1. Будем говорить, что непрерывно-дифференцируемая функция ω: $[T_0, T] \to \Omega^n$ является *u*-стратегической в ДИ (1.1), (1.2), если $\omega(T) = \omega_\alpha$ и при всех $t \in [T_0, T]$, $\psi \in \mathbb{R}^n$

$$\partial \varphi^*(\psi; \omega(t)) / \partial t \geq \gamma^*(t, \psi) - \beta^*(t, \psi) \tag{2.1}$$

где $\beta^*(t, \cdot)$, $\gamma^*(t, \cdot)$ – функции, сопряженные к $\beta(t, \cdot)$, $\gamma(t, \cdot)$.

Используя аппроксимации эллипсоидов, предложенные ранее [3, 4], получим эффективный метод вычисления *u*-стратегической функции.

Лемма 2.1. Пусть числовая $\lambda(t)$ и матричная $S(t)$ функции непрерывны на отрезке $[T_0, T]$, $\lambda(t) > 0$, $S(t)$ – невырожденная $(n \times n)$-матрица. Пусть непрерывно-дифференцируемая функция $\omega(t) = (K(t), \theta(t), \sigma(t)) \in \Omega^n$ определяется из решений следующих задач Коши:

$$\dot\sigma(t) = \sigma_\gamma(t) - \sigma_\beta(t), \quad \sigma(T) = \sigma_\alpha$$

$$\dot\theta(t) = \frac{\theta_\gamma^2(t)}{2\lambda(t)\theta(t)} + \frac{\lambda(t)\theta(t)}{2} - \theta_\beta(t), \quad \theta(T) = \theta_\alpha$$

$$\dot K(t) = \frac{K_\gamma(t)}{\lambda(t)} + \lambda(t) K(t) - \left(S^{-1}\right)^T(t)\left(K_1(t) + K_1^T(t)\right) S^{-1}(t)$$

$$K_1(t) = \left(S^T(t) K(t) S(t)\right)^{1/2} \left(S^T(t) K_\beta(t) S(t)\right)^{1/2}, \quad K(T) = K_\alpha$$

Тогда функция $\omega(t)$ является *u*-стратегической.

3. Теорема о гарантированном управлении. Через $\operatorname{dom} f$ будем обозначать эффективное множество функции f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\operatorname{dom} f = \left\{x \,\middle|\, f(x) < +\infty\right\}$$

Определение 3.1. Позиционной стратегией игрока **u** будем называть функцию $u_{pos}(t, x)$, непрерывную по t, удовлетворяющую условию Липшица по x и такую, что $u_{pos}(t, x) \in \operatorname{dom} \beta(t, \cdot)$ при $t \in [T_0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 3.2. Функция W: $[T_0, T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ называется гарантированным результатом для позиционной стратегии u_{pos} в игре (1.1), (1.2), если для любых $(t_0, x_0) \in \operatorname{dom} W$ и любой абсолютно интегрируемой функции v: $[T_0, T] \to \mathbb{R}^n$, $v(t) \in \operatorname{dom} \gamma(t, \cdot)$ имеет место неравенство

$$\alpha(x(T))+\int_{t_0}^{T}\Big(\beta\big(t,u_{\text{pos}}(t,x(t))\big)-\gamma(t,v(t))\Big)dt \leqslant W\big(t_0,x_0\big) \tag{3.1}$$

где $x(t)$ – решение уравнения $\dot{x}(t)=u_{\text{pos}}(t,x(t))-v(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$. При этом стратегия u_{pos} называется гарантированным управлением для результата $W(t, x)$.

Пусть заданы $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega, \omega_\beta \in \Omega^n$, $\omega = (K, \theta, \sigma)$, $\omega_\beta = (K_\beta, \theta_\beta, \sigma_\beta)$. Определим

$$u_0(x,\omega,\omega_\beta)=\begin{cases}\dfrac{\theta K_\beta K^{-1}x}{\sqrt{\theta_\beta^2(1-x^TK^{-1}x)+\theta^2x^TK^{-1}K_\beta K^{-1}x}}, & x^TK^{-1}x\leqslant 1\\[2ex] \dfrac{K_\beta K^{-1}x}{\sqrt{x^TK^{-1}K_\beta K^{-1}x}}, & x^TK^{-1}x\geqslant 1\end{cases} \tag{3.2}$$

Теорема о гарантированном управлении. Пусть функция $\omega(t)$ является u-стратегической. Тогда функция

$$u_{\text{pos}}(t, x) = u_0(x, \omega(t), \omega_\beta(t)) \tag{3.3}$$

является позиционной стратегией игрока $\mathbf{u}$. А функция

$$W(t, x) = \varphi(x; \omega(t)) \tag{3.4}$$

является гарантированным результатом для этой стратегии.

Замечание. Аналогично можно построить позиционную стратегию и функцию гарантированного результата для игрока $\mathbf{v}$.

4. Лемма о нижней производной. Через $\|K\|$ будем обозначать максимальный модуль собственных чисел матрицы $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Пусть $\omega = (K, \theta, \sigma) \in \mathbb{R}^{n\times n}\times \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Обозначим

$$\|\omega\|=\|K\|+|\theta|+|\sigma| \tag{4.1}$$

Определим расстояние между элементами ω_1, ω_2 множества Ω^n как $\|\omega_1-\omega_2\|$.

Из формулы (3.2) можно получить следующую лемму.

Лемма 4.1. Для любых компактов $\Omega,\Omega_\beta \subset\Omega^n$ функция $u_0(x, \omega, \omega_\beta)$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $\mathbb{R}^n\times\Omega\times\Omega_\beta$.

Пусть заданы $\psi_0 \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{R}^n$, $(\psi_0, \psi) \neq (0, 0)$, $\omega = (K, \theta, \sigma) \in \Omega^n$. Определим

$$q\big(\psi_0,\psi,\omega\big)=\frac{K\psi}{\sqrt{\theta^2\psi_0^2+\psi^TK\psi}} \tag{4.2}$$

Для заданных $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega = (K, \theta, \sigma) \in \Omega^n$ определим

$$\psi_0(x,\omega)=\begin{cases}\sqrt{1-x^TK^{-1}x}, & x^TK^{-1}x\leqslant 1\\ 0, & x^TK^{-1}x>1\end{cases},\quad \psi(x,\omega)=\theta K^{-1}x$$

Непосредственно из определений вытекают следующие свойства.

Свойство 4.1. Для любых $\omega \in \Omega^n$, $x \in \operatorname{dom} \varphi(\cdot;\omega)$ вектор $(\psi(x,\omega), \psi_0(x,\omega)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ является внешней нормалью выпуклого множества $\operatorname{epi} \varphi(\cdot;\omega) = \{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} | \varphi(x;\omega) \geq \lambda\}$ в точке $(x, \varphi(x;\omega)) \in \operatorname{epi} \varphi(\cdot;\omega)$.

Свойство 4.2. Для любых $\omega \in \Omega^n$, $\psi_0 \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{R}^n$, где $(\psi_0, \psi) \neq (0, 0)$, вектор $q(\psi_0, \psi, \omega)$ является единственным решением задачи минимизации

$$\min_{x \in \operatorname{dom} \varphi(\cdot;\omega)} \left(\psi_0 \varphi(x;\omega) - \psi^T x\right)$$

Свойство 4.3. Для любых $x \in I\,\mathbb{R}^n$, ω, $\omega_\beta \in \Omega^n$ справедливо равенство $u_0(x, \omega, \omega_\beta) = q(\psi_0(x,\omega), \psi(x,\omega), \omega_\beta)$.

Из леммы 4.1, а также из свойств 4.2, 4.3 следует, что функция $u_{pos}(t, x)$ (3.3) является позиционной стратегией в смысле определения 3.1.

Используя свойства 4.1–4.3, можно доказать следующую лемму.

Лемма 4.2. Для любых компактов $\Omega, \Omega_\beta \subset \Omega^n$ существуют числа $\delta_0 > 0$, $C_u \in \mathbb{R}$, такие, что для любых $\delta \in (0, \delta_0)$, $z \in \operatorname{dom} \varphi(\cdot;\omega) + \delta \operatorname{dom} \varphi(\cdot;\omega_\beta)$

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} \left(\varphi(z - \delta u;\omega) + \delta\varphi(u;\omega_\beta)\right)$$

достигается на единственном векторе u_δ, причем

$$\left|u_\delta - u_0\left(z, \omega, \omega_\beta\right)\right| \leq C_u \delta$$

Из леммы 1.1 и формулы (4.1) получаем следующую лемму.

Лемма 4.3. Для любого компакта $\Omega \subset \Omega^n$ существует число C_Ω такое, что для любых $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\left|\varphi^*(\psi;\omega_1) - \varphi^*(\psi;\omega_2)\right| \leq C_\Omega \|\omega_1 - \omega_2\| (1 + |\psi|)$$

Непосредственно из определения сопряженной функции вытекает следующая лемма.

Лемма 4.4. 1°. Пусть заданы функции $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и

$$f(x) = \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \left(f_1(x - z) + f_2(z)\right)$$

Тогда $f^*(\psi) = f_1^*(\psi) + f_2^*(\psi)$.

2°. Пусть заданы функции $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и пусть $f^*(\psi) < +\infty \, \forall \psi \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\left(g - f^*\right)^*(x) = \sup_{y \in \operatorname{dom} f} \left(g^*(x + y) - f(y)\right)$$

3°. Если даны функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и число $\delta > 0$, то $(\delta g)^*(x) = \delta g^*(x/\delta)$.

Из леммы 4.4 можно получить следующую лемму.

Лемма 4.5. Пусть заданы выпуклые полунепрерывные снизу функции $g_0, g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и число $\delta > 0$. Тогда

$$\left(g_0 + \delta\left(g_1 + g_2 - g_3\right)\right)^*(x) = \sup_{v \in \operatorname{dom} g_3^*} \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \inf_{u \in \mathbb{R}^n} \left(g_0^*(x + \delta(v - y - u)) + \right.$$

$$\left. + \delta(g_1^*(u) + g_2^*(y) - g_3^*(v))\right)$$

Для любого вектора $l \in \mathbb{R}^n$ определим нижнюю производную [5] функции W:

$[T_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ по направлению $(1, l)$ в точке $(t, x) \in \operatorname{dom} W$:

$$\partial^-_{(1,l)} W(t,x) = \liminf_{\substack{s \to l \\ \delta \to +0}} \frac{W(t+\delta, x+\delta s) - W(t,x)}{\delta}$$

Лемма 4.6. Пусть $\omega(t)$ – u-стратегическая функция, функции $u_{\text{pos}}(t, x)$, $W(t, x)$ определены формулами (3.3), (3.4). Пусть $(t, x) \in \operatorname{dom} W$, $v \in \operatorname{dom} \gamma(t, \cdot)$. Тогда

$$\partial^-_{(1,l)} W(t,x) + \beta\big(t, u_{\text{pos}}(t,x)\big) - \gamma(t,v) \leqslant 0, \quad \text{где} \quad l = v - u_{\text{pos}}(t,x)$$

Доказательство. Через $W^*(t, \cdot)$ обозначим функцию, сопряженную к $W(t, \cdot)$. В силу определения 2.1 и формулы (3.4) при достаточно малых $\delta > 0$ имеем

$$W^*(t,\psi) - W^*(t+\delta,\psi) \leqslant \int_t^{t+\delta} \big(\beta^*(\tau,\psi) - \gamma^*(\tau,\psi)\big) d\tau$$

Из непрерывности $\omega_\beta(t)$, $\omega_\gamma(t)$ и леммы 4.3 следует существование функции $\varepsilon_1(\delta) \to 0$ $(\delta \to +0)$, такой, что

$$W^*(t,\psi) - W^*(t+\delta,\psi) \leqslant \delta\big(\beta^*(t,\psi) - \gamma^*(t,\psi)\big) + \delta\varepsilon_1(\delta)\big(1 + |\psi|\big)$$

Применим лемму 4.5 для функций

$$g_0(\psi) = W^*(t+\delta,\psi), \quad g_1(\psi) = \beta^*(t,\psi)$$
$$g_2(\psi) = \varepsilon_1(\delta)|\psi|, \quad g_3(\psi) = \gamma^*(t,\psi)$$

Тогда $g_2^*(y) = 0$ при $|y| \leqslant \varepsilon_1(\delta)$, $g_2^*(y) = +\infty$ при $|y| > \varepsilon_1(\delta)$ и

$$W(t,x) = W^{**}(t,x) \geqslant \big(g_0 + \delta(g_1 + g_2 - g_3)\big)^*(x) - \delta\varepsilon_1(\delta) =$$
$$= \sup_{v \in \operatorname{dom}\gamma(t,\cdot)} \inf_{|y| \leqslant \varepsilon_1(\delta)} \inf_{u \in \mathbb{R}^n} \big(W(t+\delta, x + \delta(v - y - u)) + \delta\beta(t,u) - \delta\gamma(t,v)\big) - \delta\varepsilon_1(\delta)$$

Зафиксируем произвольное $v \in \operatorname{dom} \gamma(t, \cdot)$.

Так как $W(t, x) < +\infty$, то

$$\inf_{|y| \leqslant \varepsilon_1(\delta)} \inf_{u \in \mathbb{R}^n} \big(W(t+\delta, x + \delta(v - y - u)) + \delta\beta(t,u)\big) < +\infty$$

и, в силу выпуклости и полунепрерывности снизу функций $W(t + \delta, \cdot)$, $\beta(t, \cdot)$, инфимумы достигаются на некоторых векторах y_δ, u_δ. Применим лемму 4.2 для $\omega = \omega(t + \delta)$, $\omega_\beta = \omega_\beta(t)$, $z = x + \delta(v - y_\delta)$. Тогда

$$\Big|u_\delta - u_0\big(x + \delta(v - y_\delta), \omega(t+\delta), \omega_\beta(t)\big)\Big| \leqslant C_u\delta$$

Обозначим $u_0 = u_0(x, \omega(t), \omega_\beta(t)) = u_{\text{pos}}(t, x)$. В силу леммы 4.1 и непрерывности $\omega(t)$ существует функция $\varepsilon_2(\delta) \to 0$ $(\delta \to +0)$, не зависящая от v и такая, что

$$|u_\delta - u_0| \leqslant \varepsilon_2(\delta)$$

Так как u_δ, $u_0 \in \operatorname{dom} \beta(t, \cdot)$, то в силу непрерывности функции $\beta(t, \cdot)$ на своем эффективном множестве существует функция $\varepsilon_3(\delta) \to 0$ $(\delta \to +0)$, такая, что

$$|\beta(t,u_\delta) - \beta(t,u_0)| \leqslant \varepsilon_3(\delta)$$

Поэтому

$$W(t,x) \geqslant W(t+\delta, x+\delta(v-y_\delta-u_\delta))+\delta\beta(t,u_0)-\delta\gamma(t,v)-\delta(\varepsilon_1(\delta)+\varepsilon_3(\delta))$$

Выберем какую-либо последовательность $\delta_k \to +0$ и определим $l_k = v-u_{\delta_k}-y_{\delta_k}$, тогда

$$|l_k - l| = \left|u_0 - u_{\delta_k} - y_{\delta_k}\right| \leqslant \varepsilon_1(\delta_k)+\varepsilon_2(\delta_k) \to 0$$

$$\left(W(t+\delta_k, x+\delta_k l_k)-W(t,x)\right)/\delta_k + \beta(t,u_0)-\gamma(t,v) \leqslant \varepsilon_1(\delta_k)+\varepsilon_3(\delta_k) \to 0$$

что завершает доказательство леммы.

5. Доказательство теоремы о гарантированном управлении. Определим касательный конус к множеству $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $z \in M$:

$$T_M(z) = \left\{ f \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \liminf_{\delta\to+0} \frac{\operatorname{dist}(z+\delta f; M)}{\delta} = 0 \right\} \tag{5.1}$$

где $\operatorname{dist}(x;M) = \inf\limits_{y\in M} |x-y|$ – расстояние от точки x до множества M.

Далее понадобится следующая теорема выживания [6, 7].

Теорема выживания. Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ замкнутое множество; f: $M \to \mathbb{R}^m$ – непрерывная функция. Пусть справедливо условие

$$f(z) \in T_M(z)\ \forall z \in M \tag{5.2}$$

Тогда для любого $z_0 \in M$ существует число $\tau_0 > 0$, такое, что на отрезке $[0, \tau_0]$ существует решение уравнения $\dot z(\tau) = f(z(\tau))$ с начальным условием $z(0) = z_0$, причем $z(\tau) \in M$ для любого $\tau \in [0, \tau_0]$.

Лемма 5.1. Пусть функции $u_{\text{pos}}(t, x)$, $W(t, x)$ определены формулами (3.3), (3.4). Пусть задано число $t_0 \in [T_0, T)$ и вектор $x_0 \in \operatorname{dom} W(t_0, \cdot)$. Тогда для любой непрерывной функции v: $[t_0, T] \to \mathbb{R}^n$, такой, что $\gamma(t, v(t)) < +\infty$ $\forall t \in [t_0, T]$, и для любого числа $t_1 \in [t_0, T]$ справедливо неравенство

$$W(t_1, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \left(\beta(t, u_{\text{pos}}(t, x(t))) - \gamma(t, v(t))\right)dt \leqslant W(t_0, x_0) \tag{5.3}$$

где $x(t)$ –решение дифференциального уравнения $\dot x(t) = v(t) - u_{\text{pos}}(t, x(t))$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные функции $v(t)$, $x(t)$, удовлетворяющие условиям леммы. Обозначим через $t_1^{\max}$ максимальное среди $t_1^* \in [t_0, T]$, таких, что при любом $t_1 \in [t_0, t_1^*]$ справедливо неравенство (5.3). Поскольку функция $W(t, x)$ полунепрерывна снизу, указанный максимум существует. Предположим, что $t_1^{\max} < T$. Определим множество

$$M = \left\{ z = (t,x,y) \middle| t \in [t_0, T], x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}, W(t,x)+y \leqslant W(t_0,x_0) \right\}$$

и функцию f: $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$f(t,x,y) = \left(T-t, (T-t)(v(t)-u_{\text{pos}}(t,x)),\ \ (T-t)\left(\beta(t,u_{\text{pos}}(t,x))-\gamma(t,v(t))\right)\right)$$

Покажем, что справедливо условие (5.2).

Пусть $z = (t, x, y) \in M$. Если $t = T$, то $f(z) = 0 \in T_M(z)$. Рассмотрим случай $t < T$.

Обозначим $g = \beta(t, u_{\text{pos}}(t, x)) - \gamma(t, v(t))$. В силу леммы 4.6 существуют последовательности чисел $\delta_k \to +0$ и векторов $l_k \to l = v(t) - u_{\text{pos}}(t, x)$, такие, что

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{W(t+\delta_k, x+\delta_k l_k) - W(t,x)}{\delta_k} + g \leqslant 0$$

Определим

$$\Delta_k = \delta_k / (T-t), \quad t_k = t+\delta_k, \quad x_k = x+\delta_k l_k$$

$$y_k = y + \min\left\{W(t,x) - W(t_k, x_k), \delta_k g\right\}, \quad z_k = (t_k, x_k, y_k)$$

Тогда $W(t_k,x_k) + y_k \le W(t,x) + y \le W(t_0,x_0)$, следовательно, при достаточно больших k, при которых $t + \delta_k < T$, справедливо включение $z_k \in M$. Из соотношений

$$\liminf_{k\to\infty} \left|z + \Delta_k f(z) - z_k\right| / \Delta_k \le \liminf_{k\to\infty} \left((T-t)|l - l_k| + \left|\delta_k g - \min\left\{W(t,x) - W(t_k,x_k), \delta_k g\right\}\right| / \Delta_k\right) =$$

$$= (T-t) \liminf_{k\to\infty} \left(\max\left\{\left(W(t_k,x_k) - W(t,x)\right)/\delta_k + g, 0\right\}\right) = 0$$

по определению (5.1) получаем условие (5.2).

Определим функции

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\beta\left(\xi, u_{\text{pos}}(\xi, x(\xi))\right) - \gamma(\xi, v(\xi))\right) d\xi, \quad t(\tau) = T - \left(T - t_1^{\max}\right) e^{-\tau}$$

Заметим, что $\dot t(\tau) = T - t(\tau)$ и функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица. Отсюда следует, что функция $z(\tau) = (t(\tau), x(t(\tau)), y(t(\tau)))$ является единственным решением уравнения $\dot z(\tau) = f(z(\tau))$ с начальным условием $z(0) = \left(t_1^{\max}, x\left(t_1^{\max}\right), y\left(t_1^{\max}\right)\right)$. В силу теоремы выживания существует $\tau_0 > 0$: $z(\tau) \in M$ при $\tau \in [0, \tau_0]$, т.е. для любого $t_1 \in \left[t_1^{\max}, t(\tau_0)\right]$ выполнено неравенство (5.3), что противоречит определению $t_1^{\max}$. Полученное противоречие показывает, что предположение $t_1^{\max} < T$ несправедливо; следовательно, $t_1^{\max} = T$, что завершает доказательство леммы.

Для завершения доказательства теоремы о гарантированном управлении достаточно показать, что лемма 5.1 остается верной, если требование непрерывности функции $v(t)$ заменить на требование абсолютной интегрируемости этой функции.

Пусть даны точки τ_0, τ_1, $T_0 \le \tau_0 < \tau_1 \le T$ и вектор $\bar v \in \mathbb{R}^n$. Определим

$$\bar\gamma(\bar v, \tau_0, \tau_1) = \inf_{v(\cdot)} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \gamma(t, v(t))\,dt \tag{5.4}$$

где инфимум берется по абсолютно интегрируемым функциям v: $[\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$, таким, что

$$\gamma(t, v(t)) < +\infty \quad \forall t \in [\tau_0, \tau_1], \quad \int_{\tau_0}^{\tau_1} v(t)\,dt = \bar v$$

Легко видеть, что функция $\bar\gamma(\cdot, \tau_0, \tau_1)$ выпукла. Применяя теорему отделимости к ее надграфику, получим следующую лемму.

Лемма 5.2. Пусть даны точки τ_0, τ_1, $T_0 \le \tau_0 < \tau_1 \le T$ и вектор $\bar v_0 \in \mathbb{R}^n$, такие, что $\bar\gamma(\bar v_0, \tau_0, \tau_1) < +\infty$. Тогда существует число $\psi_0 \ge 0$ и вектор $\psi \in \mathbb{R}^n$, $(\psi_0, \psi) \ne (0, 0)$, такие, что для любого $\bar v \in \bar\gamma(\cdot, \tau_0, \tau_1)$ выполнено неравенство

$$\psi_0 \bar\gamma(\bar v_0, \tau_0, \tau_1) - \psi^T \bar v_0 \le \psi_0 \bar\gamma(\bar v_0, \tau_0, \tau_1) - \psi^T \bar v$$

Лемма 5.3. Пусть $T_0 \le \tau_0 < \tau_1 \le T$ и на отрезке $[\tau_0, \tau_1]$ задана абсолютно интегрируемая функция $v_1(t)$, причем $\gamma(t, v_1(t)) < +\infty$ при $t \in [\tau_0, \tau_1]$. Тогда существует непрерывная функция v_2: $[\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$, такая, что

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} v_2(t)dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} v_1(t)dt, \quad \int_{\tau_0}^{\tau_1} \gamma(t,v_2(t))dt \leqslant \int_{\tau_0}^{\tau_1} \gamma(t,v_1(t))dt \tag{5.5}$$

Доказательство. Определим

$$\bar{v}_0 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} v_1(t)dt \tag{5.6}$$

Так как $\gamma(t, v(t)) \leqslant C < +\infty$, то $\bar{\gamma}(\bar{v}_0, \tau_0, \tau_1) < +\infty$ и по лемме 5.2 существует вектор $(\psi_0, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus (0,0)$, такой, что

$$\psi_0 \bar{\gamma}(\bar{v}_0, \tau_0, \tau_1) - \psi^T \bar{v}_0 = \inf_{\bar{v} \in \operatorname{dom} \bar{\gamma}(\cdot, \tau_0, \tau_1)} (\psi_0 \bar{\gamma}(\bar{v}, \tau_0, \tau_1) - \psi^T \bar{v}) =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\inf_{v \in \operatorname{dom} \gamma(t, \cdot)} (\psi_0 \gamma(t, v) - \psi^T v) \right) dt \tag{5.7}$$

Было показано (например, [8], с. 259), что инфимум в выражении (5.4) достигается. Обозначим через $v_0(t)$ абсолютно интегрируемую функцию, на которой достигается минимум в выражении (5.4) при ограничениях

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} v(t)dt = \bar{v}_0, \quad \gamma(t, v(t)) < +\infty$$

Обозначим $v_2(t) = q(\psi_0, \psi, \omega_\gamma(t))$, где функция $q(\psi_0, \psi, \omega)$ определена формулой (4.2). Если $v_0(t) \neq v_2(t)$ на множестве ненулевой меры, то в силу свойства 4.2:

$$\psi_0 \gamma(t, v_2(t)) - \psi^T v_2(t) < \psi_0 \gamma(t, v_0(t)) - \psi^T v_0(t)$$

на этом множестве. Тогда

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\psi_0 \gamma(t, v_2(t)) - \psi^T v_2(t) \right) dt < \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\psi_0 \gamma(t, v_0(t)) - \psi^T v_0(t) \right) dt = \psi_0 \bar{\gamma}(\bar{v}_0, \tau_0, \tau_1) - \psi^T \bar{v}_0$$

что противоречит (5.7). Следовательно, $v_0(t) = v_2(t)$ почти всюду. Учитывая (5.6) и определение функции $v_0(t)$, получаем соотношения (5.5).

Лемма 5.4. Пусть $t_0 \in [T_0, T)$ и задана абсолютно интегрируемая функция v: $[t_0, T] \to \mathbb{R}^n$, такая, что $\gamma(t, v(t)) < +\infty$ для любого $t \in [t_0, T]$. Тогда существует последовательность кусочно-непрерывных функций v_k: $[t_0, T] \to \mathbb{R}^n$, таких, что

$$\int_{t_0}^{T} \gamma(t, v_k(t))dt \leqslant \int_{t_0}^{T} \gamma(t, v(t))dt \tag{5.8}$$

и решения $x(t)$ и $x_k(t)$ уравнений $\dot{x}(t) = v(t) - u_{\text{pos}}(t, x(t))$, $\dot{x}_k(t) = v_k(t) - u_{\text{pos}}(t, x_k(t))$ с начальными условиями $x(t_0) = x_k(t_0) = x_0$ удовлетворяют соотношению

$$\max_{t \in [t_0, T]} |x_k(t) - x(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{5.9}$$

Доказательство. Введем разбиение отрезка $[t_0, T]$ на k равных частей точками $t_i = t_0 + i(T - t_0)/k$.

В силу леммы 5.3, примененной к отрезку $[\tau_0, \tau_1] = [t_i, t_{i+1}]$, существует непрерывная функция v_k: $[t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}^n$, такая, что

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} v_k(t)dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t)dt, \quad \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma(t, v_k(t))dt \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma(t, v(t))dt$$

Применив лемму 5.3 ко всем отрезкам $[t_i, t_{i+1}]$ ($i = 0, ..., k-1$), получим функцию $v_k(t)$, определенную на $[t_0, T]$ и удовлетворяющую неравенству (5.8).

Пусть $x(t)$, $x_k(t)$ – функции, определенные в условии леммы. Пользуясь тем, что функция $u_{\mathrm{pos}}(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по x, несложно получить соотношение (5.9).

Окончание доказательства теоремы о гарантированном управлении.

Зафиксируем точку $t_0 \in [T_0, T)$, вектор $x_0 \in \mathrm{dom}\, W(t_0, \cdot)$ и абсолютно интегрируемую функцию v: $[t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ такую, что $\gamma(t, v(t)) < +\infty$ при всех $t \in [t_0, T]$.

Применяя лемму 5.4, получим последовательность кусочно-непрерывных функций v_k: $[t_0, T] \to \mathbb{R}^n$, для которых выполняются соотношения (5.8), (5.9).

Для каждого $k = 1, 2, ...$, применяя лемму 5.1 на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ непрерывности функции $v_k(t)$, получим неравенства

$$W(t_{i+1}, x_k(t_{i+1})) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\beta\left(t, u_{\mathrm{pos}}(t, x_k(t))\right) - \gamma\left(t, v_k(t)\right)\right)dt \leq W(t_i, x_k(t_i))\Big)$$

что при учете условия $W(T, x) = \alpha(x)$ (см. (3.4)) дает

$$\alpha\left(x_k(T)\right) + \int_{t_0}^{T} \left(\beta\left(t, u_{\mathrm{pos}}(t, x_k(t))\right) - \gamma(t, v_k(t))\right)dt \leq W(t_0, x_0)$$

Отсюда в силу соотношений (5.8), (5.9), полунепрерывности снизу функции α и равномерной непрерывности функции $\beta(t, u_{\mathrm{pos}}(t, \cdot))$ получаем неравенство (3.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
3. *Kurzhanskii A.B., Vályi I.* Set valued solutions to control problems and their approximations // Lecture Notes in Control and Information Sciences: Analysis and Optimization of Systems / Eds A. Bensoussan, J.L. Lions. Berlin etc.: Springer, 1988. V. 111. P. 775–786.
4. *Kurzhanskii A.B., Vályi I.* The problem of control synthesis for uncertain systems: Ellipsoidal Techniques // Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty: Progr. in Systems and Control Theory / Eds G.B. Di Masi et all. Boston: Birkhauser, 1991. V. 10. P. 260–282.
5. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнение Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
6. *Nagumo M.L.* Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen // Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 1942. V. 24. N 3. P. 551–559.
7. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential inclusions. Berlin etc.: Springer, 1984. 342 p.
8. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.II.1997