УДК 62–50

© 1998 г. Н.Ю. Лукоянов, Т.Н. Решетова

ЗАДАЧИ КОНФЛИКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Для системы с последействием рассматривается задача минимаксного управления при показателе качества, представляющем собой сумму двух слагаемых, первое из которых – евклидова норма совокупности отклонений движения системы в заданные моменты времени от заданных целей, а второе – интегрально-квадратичный штраф, накладываемый на реализации управляющих воздействий. Задача включается в дифференциальную игру. При этом информационным образом для стратегий служит история движения. Дана функциональная трактовка рассматриваемого процесса управления, основанная на своеобразном прогнозе движений. На базе этой трактовки и конструкции выпуклых сверху оболочек вспомогательных функций из метода стохастического программного синтеза получена удобная для численной реализации процедура вычисления цены игры и построения оптимальных минимаксной и максиминной стратегий управления. Приводятся результаты численного эксперимента.

Работа примыкает к исследованиям [1–9].

1. Постановка задачи. Пусть система с последействием описывается уравнением

$$dx(t)/dt = A(t)x(t) + A_h(t)x(t-h) + B(t)u + C(t)v, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.1}$$

Здесь x – n-мерный фазовый вектор, u – r-мерный вектор управления (или действие первого игрока), v – s-мерный вектор помехи (или действие второго игрока); $A(t)$, $A_h(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ – непрерывные матрицы-функции; запаздывание $h = \text{const} > 0$; t_0 и ϑ – фиксированные моменты времени ($t_0 < \vartheta$). В момент t_0 известно начальное состояние $x_0[t_0 - h[\cdot]t_0] = \{x_0[\tau], t_0 - h \leqslant \tau \leqslant t_0\}$ системы (1.1), где $x_0[\tau]$ – кусочно-непрерывная вектор-функция (т.е. $x_0[\tau]$ может иметь конечное число точек разрыва первого рода, при этом в этих точках она непрерывна справа). Допустимы измеримые по Борелю конечные реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta) = \{u[t], t_0 \leqslant t < \vartheta\}$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta) = \{v[t], t_0 \leqslant t < \vartheta\}$. Из начального состояния $x_0[t_0 - h[\cdot]t_0]$ такие реализации единственным образом ([10], с. 19) порождают движение $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta] = \{x[t], t_0 - h \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ системы (1.1) ($x[t]$ – абсолютно непрерывная при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ вектор-функция, удовлетворяющая условию $x[t] = x_0[t]$ при $t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0$ и равенству (1.1) при почти всех t и $u = u[t]$, $v = v[t]$).

Заданы натуральное число $N \geqslant 1$; моменты времени $t^{(i)} \in [t_0, \vartheta]$ ($t^{(i)} < t^{(i+1)}$, $i = 1, \ldots, N-1$, $t^{(N)} = \vartheta$); постоянные ($p^{(i)} \times n$)-матрицы $D^{(i)}$, где $1 \leqslant p^{(i)} \leqslant n$, и n-мерные векторы $g^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, N$).

Требуется найти управление (или помеху), нацеленное минимизировать (нацеленную максимизировать) показатель качества

$$\gamma = \gamma(x[t_0[\cdot]\vartheta],\ u[t_0[\cdot]\vartheta),\ v[t_0[\cdot]\vartheta)) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} |D^{(i)}(x[t^{(i)}] - g^{(i)})|^2 \right)^{1/2} + \int_{t_0}^{\vartheta} [\langle u[t],\ \Phi(t)u[t]\rangle - \langle v[t],\ \Psi(t)v[t]\rangle]dt \qquad (1.2)$$

Здесь и ниже $|\cdot|$ – евклидова норма; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов; $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ – симметричные непрерывные матрицы-функции, квадратичные формы $\langle u, \Phi(t)u\rangle$ и $\langle v, \Psi(t)v\rangle$ – определенно положительные при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$[1].

Замечание. Показатель γ из (1.2) может быть дан изначально или такой функционал вводится как аппроксимирующий для исходного показателя качества

$$\gamma_* = \left(\int_{t_0}^{\vartheta} |D(t)(x[t] - g(t))|^2\, dt \right)^{1/2} + \int_{t_0}^{\vartheta} [\langle u[\tau],\ \Phi(\tau)u[\tau]\rangle - \langle v[\tau],\ \Psi(\tau)v[\tau]\rangle]d\tau$$

где $D(t)$ – известная кусочно-постоянная матрица-функция, $g(t)$ – заданная кусочно-непрерывная вектор-функция.

Эти две задачи объединяются в дифференциальную игру двух лиц. Пусть к моменту времени t под действием допустимых реализаций $u[t_0[\cdot]t) = \{u[\tau], t_0 \leqslant \tau < t\}$ и $v[t_0[\cdot]t) = \{v[\tau], t_0 \leqslant \tau < t\}$ сложилась история движения $x[t_0 - h[\cdot]t] = \{x[\tau], t_0 - h \leqslant \tau \leqslant t\}$. Тройку $\{x[t_0 - h[\cdot]t], u[t_0[\cdot]t), v[t_0[\cdot]t)\}$ назовем реализацией процесса управления к моменту t. Следуя концепции [1–6], будем говорить, что функционал $\rho^0(x[t_0 - h[\cdot]t_*],\ u[t_0[\cdot]t_*),\ v[t_0[\cdot]t_*))$, где t_* – исходный момент времени ($t_0 \leqslant t_* < \vartheta$), является ценой, а пара стратегий – вектор-функций от истории движения $u^0(x[t_0 - h[\cdot]t)], \varepsilon)$ и $v^0(x[t_0 - h[\cdot]t)], \varepsilon)$, где t – текущий момент времени($t_* \leqslant t < \vartheta$), ε – параметр точности (см. например [5], с. 68), образует седловую точку в игре для системы (1.1) с показателем качества γ из (1.2), если, какова бы ни случилась исходная реализация процесса $\{x[t_0 - h[\cdot]t_*],\ u[t_0[\cdot]t_*),\ v[t_0[\cdot]t_*)\}$, для любого числа $\zeta > 0$ найдутся число $\varepsilon_* > 0$ и функция $\delta(\varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$, такие, что, с одной стороны, при каких угодно числе $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*$, разбиении $\Delta = \Delta_k\{t_j\} = \{t_j : t_1 = t_*,\ t_j < t_{j+1},\ j = 1,\dots,k,\ t_{k+1} = \vartheta\}$ с шагом $\delta_k = \max_{j=1,\dots,k}(t_{j+1} - t_j) \leqslant \delta(\varepsilon)$ и допустимой реализации помехи $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ для движения $x^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$, являющегося решением пошагового уравнения

$$dx^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t]/dt = A(t)x^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t] + A_h(t)x^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t-h] + B(t)u^0(x^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t_0 - h[\cdot]t_j], \varepsilon) + C(t)v[t] \qquad (1.3)$$

$$t_j \leqslant t < t_{j+1},\quad j = 1,\dots,k,\quad x^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[\tau] = x[\tau],\quad t_0 - h \leqslant \tau \leqslant t_1 = t_*$$

будет справедливо неравенство

$$\gamma(x^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t_0[\cdot]\vartheta],\ u^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t_0[\cdot]\vartheta),\ v[t_0[\cdot]\vartheta)) \leqslant \rho^0(x[t_0 - h[\cdot]t_*],\ u[t_0[\cdot]t_*),\ v[t_0[\cdot]t_*)) + \zeta \qquad (1.4)$$

где $u^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t_0[\cdot]\vartheta) = \{u^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t] = u[t],\ t_0 \leqslant t < t_*,\ u^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t] = u^0(x^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t_0 - h[\cdot]t_j], \varepsilon),\ t_j \leqslant t < t_{j+1},\ j = 1, \dots, k\}$; а с другой стороны, при каких угодно числе $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*$, разбиении $\Delta = \Delta_k\{t_j\}$ с шагом $\delta_k \leqslant \delta(\varepsilon)$ и допустимой реализации управления $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ для движения $x^{\varepsilon}_{\Delta,v^0}[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$, являющегося решением пошагового уравнения (1.3), где

[1] При $N = 1$ такая задача рассматривалась в работах: *Стихина Т.К.* К теории позиционного управления в системах с запаздыванием. Свердловск, 1984. 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 06.04.84, № 2051; *Стихина Т.К.* Задачи позиционного управления и моделирования в динамических системах; Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Свердловск, 1985. 150 с.

соответственно следует заменить $x^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t]$ на $x^{\varepsilon}_{\Delta,\nu^0}[t]$, $u^0(x^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t_0-h[\cdot]t_j],\varepsilon)$ на $u[t]$, а $v[t]$ на $\upsilon^0(x^{\varepsilon}_{\Delta\nu^0}[t_0-h[\cdot]t_j],\varepsilon)$, будет справедливо неравенство

$$\gamma(x^{\varepsilon}_{\Delta\nu^0}[t_0[\cdot]\vartheta),\ u[t_0[\cdot]\vartheta),\ \upsilon^{\varepsilon}_{\Delta\nu^0}[t_0[\cdot]\vartheta))\geqslant\rho^0(x[t_0-h[\cdot]t_*],\ u[t_0[\cdot]t_*),\ \upsilon[t_0[\cdot]t_*))-\zeta \qquad (1.5)$$

где $\upsilon^{\varepsilon}_{\Delta\nu^0}[t_0[\cdot]\vartheta)=\{\upsilon^{\varepsilon}_{\Delta\nu^0}[t]=\upsilon[t],\ t_0\leqslant t<t_*,\ \upsilon^{\varepsilon}_{\Delta\nu^0}[t]=\upsilon^0(x^{\varepsilon}_{\Delta\nu^0}[t_0-h[\cdot]t_j],\varepsilon),\ t_j\leqslant t<$ $<t_{j+1}, j=1,\ldots,k\}$.

Стратегии $u^0(\cdot)$ и $\upsilon^0(\cdot)$ называют оптимальными минимаксной и максиминной соответственно. Проводя рассуждения по схеме из [1, 5, 6] учитывая при этом результаты из [2–4], можно убедиться, что в рассматриваемой игре цена $\rho^0(x[t_0-h[\cdot]t_*],\ u[t_0[\cdot]t_*),\ \upsilon[t_0[\cdot]t_*))$ и оптимальные стратегии $u^0(x[t_0-h[\cdot]t],\varepsilon)$ и $\upsilon^0(x[t_0-h[\cdot]t],\varepsilon)$ существуют. При этом воздействия $u^0(x^{\varepsilon}_{\Delta,u^0}[t_0-h[\cdot]t_j],\varepsilon)$ и $\upsilon^0(x^{\varepsilon}_{\Delta\nu^0}[t_0-h[\cdot]t_j],\varepsilon)$ из (1.3)–(1.5) формируются по функционалу цены $\rho^0(\cdot)$ методом экстремального сдвига (см. например [6], с. 150) на подходящие сопутствующие движения.

Подчеркнем, что оптимальные стратегии $u^0(\cdot)$ и $\upsilon^0(\cdot)$ используют только информацию об истории движения.

Вычисление цены $\rho^0(\cdot)$ и построение оптимальных стратегий $u^0(\cdot)$ и $\upsilon^0(\cdot)$ в дифференциальной игре (1.1), (1.2) составляют основное содержание настоящей статьи.

В следующем разделе дана функциональная трактовка рассматриваемого процесса управления, которая сводит исходную задачу об управлении системой с запаздыванием (1.1) на минимакс (максимин) показателя качества (1.2) к вспомогательной задаче о минимаксном (максиминном) управлении системой без запаздывания с терминальным показателем качества, правда, в пространстве фазовых состояний, вообще говоря, много большей размерности, чем размерность n вектора x. Данная функциональная интерпретация исходит из конструкций, предложенных в ([11], с. 150) при исследовании задач об устойчивости движения в системах с последействием и применявшихся в частности в [9] для задач управления обыкновенными дифференциальными системами с функциональной платой. Указанное сведéние позволяет использовать результаты и трансформировать конструкции, предложенные в [5–9] для задач игрового управления системами без запаздывания, применительно к рассматриваемой здесь задаче.

2. Функциональная трактовка. Пусть $F(\xi,\tau)$ – $(n\times n)$-матрица, удовлетворяющая следующим условиям: $F(\xi,\tau)=0$ при $\xi<\tau$; $F(\tau,\tau)=E^{[n]}$, где $E^{[n]}$ – n-мерная единичная матрица; $dF(\xi,\tau)/d\xi=A(\xi)F(\xi,\tau)+A_h(\xi)F(\xi-h,\tau)$ при $\xi>\tau$. Тогда ([10], с. 64) движение $x[t_0-h[\cdot]\vartheta]$, продолжающее исходную историю $x_*[t_0-h[\cdot]t_*]$, $t_0\leqslant t_*<\vartheta$ в силу уравнения (1.1) под действием допустимых реализаций $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $\upsilon[t_*[\cdot]\vartheta)$, можно записать по формуле Коши

$$\begin{aligned}
&x[\tau]=x_*[\tau],\qquad t_0-h\leqslant\tau<t_*\\
&x[t]=F(t,t_*)x_*[t_*]+\int_{t_*}^{t_*+h}F(t,\tau)A_h(\tau)x_*[\tau-h]d\tau+\\
&+\int_{t_*}^{t}F(t,\tau)(B(\tau)u[\tau]+C(\tau)\upsilon[\tau])d\tau,\qquad t_*\leqslant t\leqslant\vartheta
\end{aligned} \qquad (2.1)$$

Пусть к моменту $t\in[t_0,\vartheta]$ реализовалась история $x[t_0-h[\cdot]t]$ системы (1.1). Назовем информационным образом, который отвечает этой истории, p-мерный вектор

$$\mathbf{y}(x[t_0-h[\cdot]t])=\{y^{(1)}[t],\ldots,y^{(N)}[t]\},\qquad p=p^{(1)}+\ldots+p^{(N)} \qquad (2.2)$$

где

$$
y^{(i)}[t] = \begin{cases} D^{(i)}(x[t^{(i)}] - g^{(i)}), & t^{(i)} \leqslant t \\ D^{(i)}\left(F(t^{(i)}, t)x[t] + \int\limits_t^{t+h} F(t^{(i)}, \tau)A_h(\tau)x[\tau - h]d\tau - g^{(i)} \right), & t < t^{(i)} \end{cases}
$$

Запись (2.2) означает, что первые $p^{(1)}$ компонент вектора $\mathbf{y}(x[t_0 - h[\cdot]t])$ совпадают с компонентами $p^{(1)}$-мерного вектора $y^{(1)}[t]$, следующие $p^{(2)}$ компонент совпадают с компонентами $p^{(2)}$-мерного вектора $y^{(2)}[t]$ и т.д., последние $p^{(N)}$ компонент $\mathbf{y}(x[t_0 - h[\cdot]t])$ совпадают с компонентами вектора $y^{(N)}[t]$. Причем, если $N = 1$, то $\mathbf{y}(x[t_0 - h[\cdot]t]) = y^{(N)}[t], \ p = p^{(N)}$.

Обозначим

$$
y^*[t] = y^*(u[t_0[\cdot]t), \ v[t_0[\cdot]t)) = \int\limits_{t_0}^{t} [\langle u[\tau], \ \Phi(\tau)u[\tau]\rangle - \langle v[\tau], \ \Psi(\tau)v[\tau]\rangle]d\tau \tag{2.3}
$$

Теперь показатель качества γ из (1.2) можно записать в виде

$$
\gamma = |\,\mathbf{y}(x[t_0 - h[\cdot]\vartheta])\,| + y^*[\vartheta] \tag{2.4}
$$

Обозначим далее

$$
B_*^{(i)}(t) = D^{(i)}F(t^{(i)}, t)B(t), \quad C_*^{(i)}(t) = D^{(i)}F(t^{(i)}, t)C(t), \quad i = 1, \ldots, N
$$

Из $(p^{(i)} \times r)$-матриц $B_*^{(i)}(t)$ $(i = 1, \ldots, N)$ составим $(p \times r)$-матрицу $\mathbf{B}_*(t)$ так, что первые $p^{(1)}$ строк матрицы $\mathbf{B}_*(t)$ совпадают со строками матрицы $B_*^{(1)}(t)$, следующие $p^{(2)}$ строк – со строками $B_*^{(2)}(t)$ и т.д., последние $p^{(N)}$ строк матрицы $\mathbf{B}_*(t)$ совпадают со строками матрицы $B_*^{(N)}(t)$. По такому же правилу из $(p^{(i)} \times s)$-матриц $C_*^{(i)}(t)$ составим $(p \times s)$-матрицу $\mathbf{C}_*(t)$.

Введем вспомогательную $\mathbf{w}$-систему. Пусть $\mathbf{w}$ – p-мерный фазовый вектор этой системы, а ее эволюция подчинена уравнению без запаздывания

$$
d\mathbf{w} / dt = \mathbf{B}_*(t)u + \mathbf{C}_*(t)v, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{2.5}
$$

При заданном в момент t_0 начальном состоянии $\mathbf{w}[t_0]$ допустимые реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ порождают абсолютно непрерывное движение $\mathbf{w}[t_0[\cdot]\vartheta] = \{\mathbf{w}[t], t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ $\mathbf{w}$-системы (2.5). Будем оценивать качество этого движения показателем

$$
\gamma_{\mathbf{w}} = |\mathbf{w}[\vartheta]| + y^*[\vartheta] \tag{2.6}
$$

где $y^*[\vartheta]$ из (2.3) при $t = \vartheta$.

Имеет место следующая лемма, которая устанавливает связь между эволюцией, в силу системы (1.1), информационного образа $\mathbf{y}(x[t_0 - h[\cdot]t)$ из (2.2) и эволюцией $\mathbf{w}$-системы (2.5).

Лемма 1. Каковы бы ни были исходная история $x[t_0 - h[\cdot]t_*]$ системы (1.1) $(t_0 \leqslant t_* < \vartheta)$, момент $t^* \in (t_*, \vartheta]$ и допустимые реализации $u[t_*[\cdot]t^*) = \{u[t], \ t_* \leqslant t < t^*\}$ управления и $v[t_*[\cdot]t^*) = \{v[t], \ t_* \leqslant t < t^*\}$ помехи, для истории $x[t_0 - h[\cdot]t^*]$, реализующейся к моменту t^* при движении системы (1.1) из состояния $x[t_* - h[\cdot]t_*]$ под действием этих управлений $u[t_*[\cdot]t^*)$ и $v[t_*[\cdot]t^*)$, и для состояния $\mathbf{w}[t^*]$, реализующегося к моменту t^* при движении $\mathbf{w}$-системы (2.5) из состояния $\mathbf{w}[t_*]=\mathbf{y}(x[t_0-h[\cdot]t_*])$ (см. (2.2) при $t=t_*$) под действием тех же самых управлений, будет справедливо равенство

$$\mathbf{w}[t^*]=\mathbf{y}(x[t_0-h[\cdot]t^*])$$

где $\mathbf{y}(x[t_0-h[\cdot]t^*])$ – информационный образ (2.2), отвечающий истории $x[t_0-h[\cdot]t^*]$.

Справедливость леммы 1 можно проверить непосредственно, опираясь на формулу Коши (2.1) и свойства матрицы $F(\xi,\tau)$.

Для $\mathbf{w}$-системы (2.5) и показателя качества $\gamma_\mathbf{w}$ из (2.6) рассмотрим дифференциальную игру двух лиц (действия u первого игрока нацелены минимизировать $\gamma_\mathbf{w}$, действия v второго – максимизировать $\gamma_\mathbf{w}$).

Известно [5, 6], что такая игра имеет цену $\rho^0_\mathbf{w}(t,\mathbf{w},y^*)$ и седловую точку, складывающуюся из оптимальных минимаксной $u^0_\mathbf{w}(t,\mathbf{w},\varepsilon)$ и максиминной $v^0_\mathbf{w}(t,\mathbf{w},\varepsilon)$ стратегий. Это означает, что какова бы ни была исходная позиция $\{t_*,\mathbf{w}_*=\mathbf{w}[t_*],\ y^*_*=y^*[t_*]\}$ $(t_0\leqslant t_*<\vartheta)$, для любого наперед заданного числа $\zeta>0$ пошаговый закон управления, формирующий воздействия

$$u[t]=u^0_\mathbf{w}(t_j,\mathbf{w}[t_j],\varepsilon),\quad t_j\leqslant t<t_{j+1},\quad j=1,\ldots,k,\quad t_1=t_*,\quad t_{k+1}=\vartheta \tag{2.7}$$

вне зависимости от реализующейся помехи гарантирует неравенство

$$\gamma_\mathbf{w}\leqslant\rho^0_\mathbf{w}(t_*,\mathbf{w}_*,y^*_*)+\zeta \tag{2.8}$$

если значения параметра $\varepsilon>0$ и шага $\delta_k=\max_{j=1,\ldots,k}(t_{j+1}-t_j)$ подобраны достаточно малыми; с другой стороны, пошаговый закон, назначающий воздействия помехи

$$v[t]=v^0_\mathbf{w}(t_j,\mathbf{w}[t_j],\varepsilon),\quad t_j\leqslant t<t_{j+1},\quad j=1,\ldots,k,\quad t_1=t_*,\quad t_{k+1}=\vartheta \tag{2.9}$$

вне зависимости от реализующегося управления обеспечивает неравенство

$$\gamma_\mathbf{w}\geqslant\rho^0_\mathbf{w}(t_*,\mathbf{w}_*,y^*_*)-\zeta \tag{2.10}$$

при условии, что $\varepsilon>0$ и $\delta_k=\max_{j=1,\ldots,k}(t_{j+1}-t_j)$ достаточно малы.

Оптимальные стратегии $u^0_\mathbf{w}(t,\mathbf{w},\varepsilon)$ и $v^0_\mathbf{w}(t,\mathbf{w},\varepsilon)$ строятся как экстремальные к функции цены $\rho^0_\mathbf{w}(\cdot)$ (см. [5], с. 210, 220).

Из свойств (2.7)–(2.10) цены $\rho^0_\mathbf{w}(\cdot)$ и оптимальных стратегий $u^0_\mathbf{w}(\cdot)$ и $v^0_\mathbf{w}(\cdot)$ вспомогательной игры (2.5), (2.6), если учесть обозначение (2.3), представление (2.4) и лемму 1, вытекает, что функционал $\rho^0_\mathbf{w}(t_*,\mathbf{y}(x[t_0-h[\cdot]t_*]),\ y^*[t_*])$ и вектор-функции $u^0_\mathbf{w}(t,\mathbf{y}(x[t_0-h[\cdot]t]),\varepsilon)$ и $v^0_\mathbf{w}(t,\mathbf{y}(x[t_0-h[\cdot]t]),\varepsilon)$ будут удовлетворять требованиям (1.3)–(1.5) из раздела 1. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Какова бы ни была возможная реализация $\{x[t_0-h[\cdot]t_*],\ u[t_0[\cdot]t_*),\ v[t_0[\cdot]t_*)\}$ процесса управления (1.1), (1.2) к моменту $t_*\in[t_0,\vartheta]$, для цены игры (1.1), (1.2) справедливо равенство

$$\rho^0(x[t_0-h[\cdot]t_*],\ u[t_0[\cdot]t_*),\ v[t_0[\cdot]t_*))=\rho^0_\mathbf{w}(t_*,\mathbf{y}(x[t_0-h[\cdot]t_*]),\ y^*[t_*])$$

При этом стратегии $u^0(x[t_0-h[\cdot]t],\varepsilon)=u^0_\mathbf{w}(t,\mathbf{y}(x[t_0-h[\cdot]t]),\varepsilon)$ и $v^0(x[t_0-h[\cdot]t],\varepsilon)=$ $=v^0_\mathbf{w}(t,\mathbf{y}(x[t_0-h[\cdot]t]),\varepsilon)$, $t_*\leqslant t<\vartheta$ образуют седловую точку в игре (1.1), (1.2).

Замечание. Поскольку, как было указано выше, функция $\rho^0_{\mathrm{w}}(\cdot)$ и стратегии $u^0_{\mathrm{w}}(\cdot)$ и $v^0_{\mathrm{w}}(\cdot)$ существуют, то теорема 1 независимо устанавливает существование цены $\rho^0(\cdot)$ и оптимальных стратегий $u^0(\cdot)$ и $v^0(\cdot)$ в рассматриваемой дифференциальной игре (1.1), (1.2).

3. Вычисление цены игры. По теореме 1, чтобы определить функционал $\rho^0(\cdot)$ цены исходной дифференциальной игры (1.1), (1.2) достаточно построить функцию $\rho^0_{\mathrm{w}}(\cdot)$ цены вспомогательной дифференциальной игры (2.5), (2.6). Для этого воспользуемся методом выпуклых сверху оболочек от детерминированных функций [6–9], возникающих в конструкции стохастического программного синтеза [5].

Пусть случилась какая-то позиция $\{t_*, \mathbf{w}_* = \mathbf{w}[t_*],\ y^*_* = y^*[t_*]\}$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$. Назначим разбиение

$$\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\} = \{\tau_j:\ \tau_1 = t_*,\ \tau_j < \tau_{j+1},\ j = 1,\ldots,k,\ \tau_{k+1} = \vartheta\} \tag{3.1}$$

отрезка времени $[t_*, \vartheta]$. Пусть $\mathbf{l} = \{l_1,\ldots,l_p\}$ – p-мерный вектор. Обозначим

$$\Delta\psi_j(t_*,\mathbf{l}) = \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \max_{v \in R^s} \min_{u \in R^r}[\langle \mathbf{l}, (\mathbf{B}_*(\tau)u + \mathbf{C}_*(\tau)v)\rangle + \langle u, \Phi(\tau)u\rangle - \langle v, \Psi(\tau)v\rangle]d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \langle \mathbf{l}, \mathbf{M}(\tau)\mathbf{l}\rangle d\tau \tag{3.2}$$

где

$$\mathbf{M}(\tau) = \frac{1}{4}[\mathbf{C}_*(\tau)\Psi^{-1}(\tau)\mathbf{C}^T_*(\tau) - \mathbf{B}_*(\tau)\Phi^{-1}(\tau)\mathbf{B}^T_*(\tau)] \tag{3.3}$$

Верхний индекс T означает транспонирование. Последнее равенство в (3.2) следует из непосредственного вычисления максимина. В (3.3) $\Phi^{-1}(\tau)$ и $\Psi^{-1}(\tau)$ – обратные матрицы для $\Phi(\tau)$ и $\Psi(\tau)$ соответственно.

Запишем величину программного экстремума

$$e_{\mathrm{w}}(t_*, \mathbf{w}_*, y^*_*;\ \Delta_k) = \max_{\|\mathbf{l}\| \leqslant 1}[\langle \mathbf{l}, \mathbf{w}_*\rangle + \varphi_1(t_*, \mathbf{l})] + y^*_* \tag{3.4}$$

Функция $\varphi_1(t_*,\mathbf{l})$ определяется из последовательности функций $\varphi_j(t_*,\mathbf{l})$, которые удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\varphi_{k+1}(t_*,\mathbf{l}) \equiv 0, \qquad \psi_j(t_*,\mathbf{l}) = \Delta\psi_j(t_*,\mathbf{l}) + \varphi_{j+1}(t_*,\mathbf{l}) \tag{3.5}$$

$$\varphi_j(t_*,\mathbf{l}) = \{\psi_j(t_*,\cdot)\}^*, \qquad j = 1,\ldots,k \tag{3.6}$$

В (3.6) символ $\{\psi(\cdot)\}^*$ означает выпуклую сверху оболочку функции $\psi(\mathbf{l})$ в области $\{\mathbf{l}: |\,\mathbf{l}\,| \leqslant 1\}$, т.е. функцию, минимальную из всех вогнутых функций, которые мажорируют $\psi(\mathbf{l})$, $|\,\mathbf{l}\,| \leqslant 1$.

Для любой последовательности разбиений $\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\}$ (3.1), удовлетворяющей условию $\delta_k = \max_{j=1,\ldots,k}(\tau_{j+1} - \tau_j) \to 0$ при $k \to \infty$, справедливо [7] равенство

$$\rho^0_{\mathrm{w}}(t_*, \mathbf{w}_*, y^*_*) = \lim_{k\to\infty} e_{\mathrm{w}}(t_*, \mathbf{w}_*, y^*_*;\ \Delta_k) \tag{3.7}$$

Следуя [8], построим функции $\varphi_j(t_*,\mathbf{l})$, $\|\mathbf{l}\| \leqslant 1$, $j = 1,\ldots,k$.

Обозначим

$$\mathbf{K}(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\vartheta} \mathbf{M}(\xi)d\xi, \qquad t_* \leqslant \tau \leqslant \vartheta \tag{3.8}$$

Ввиду (3.3), $\mathbf{K}(\tau)$ – симметричная $(p\times p)$-матрица-функция. Для каждого $j = 1, \ldots, k$ найдется ортонормированный базис $\{\mathbf{l}_q^{[j]},\ q=1,\ldots,p\}$ евклидово p-мерного пространства, составленный из собственных векторов матрицы $\mathbf{K}(\tau_j)$. Из векторов-столбцов $\mathbf{l}_q^{[j]}$ $(q=1,\ldots,p)$ составим квадратные $(p\times p)$-матрицы $\mathbf{Q}_j$ $(\mathbf{Q}_j^{-1}=\mathbf{Q}_j^T)$ $(j = 1, \ldots, k)$. Эти матрицы задают ортогональные преобразования переменных

$$\mathbf{l}=\mathbf{Q}_j\tilde{\mathbf{l}},\quad |\mathbf{l}|=|\mathbf{Q}_j\tilde{\mathbf{l}}|=|\tilde{\mathbf{l}}| \tag{3.9}$$

приводящие квадратичные формы $\langle \mathbf{l},\mathbf{K}(\tau_j)\mathbf{l}\rangle$ к каноническому виду

$$\langle \mathbf{l},\mathbf{K}(\tau_j)\mathbf{l}\rangle=\langle \mathbf{Q}_j\tilde{\mathbf{l}},\mathbf{K}(\tau_j)\mathbf{Q}_j\tilde{\mathbf{l}}\rangle=\lambda_1^{[j]}\tilde{l}_1^2+\ \ldots\ +\lambda_p^{[j]}\tilde{l}_p^2 \tag{3.10}$$

где действительные числа $\lambda_q^{[j]}$ $(q=1,\ldots,p)$ суть собственные числа матрицы $\mathbf{K}(\tau_j)$, которым отвечают собственные векторы $\mathbf{l}_q^{[j]}$.

Обозначим

$$\lambda_j^*=\max\left\{0,\ \max_{m=j,\ldots,k}\ \max_{q=1,\ldots,p}\lambda_q^{[m]}\right\},\quad j=1,\ldots,k \tag{3.11}$$

При $j = k$ в согласии с (3.2), (3.5) и (3.8) получаем

$$\psi_k(t_*,\mathbf{l})=\langle \mathbf{l},\mathbf{K}(\tau_k)\mathbf{l}\rangle \tag{3.12}$$

Из (3.10) и (3.12) вытекает равенство

$$\psi_k(t_*,\mathbf{l})=\psi_k(t_*,\mathbf{Q}_k\tilde{\mathbf{l}})=\lambda_1^{[k]}\tilde{l}_1^2+\ \ldots\ +\lambda_p^{[k]}\tilde{l}_p^2 \tag{3.13}$$

Обозначим

$$\lambda^*=\max_{q=1,\ldots,p}\lambda_q^{[k]} \tag{3.14}$$

Если $\lambda^*\leqslant 0$, то функция $\psi_k(t_*,\mathbf{l})$ является знакопостоянной отрицательной квадратичной формой, следовательно, функцией вогнутой, и справедливо равенство

$$\varphi_k(t_*,\mathbf{l})=\{\psi_k(t_*,\cdot)\}^*=\psi_k(t_*,\mathbf{l}),\quad |\mathbf{l}|\leqslant 1 \tag{3.15}$$

Пусть $\lambda^*>0$. В базисе $\{\mathbf{l}_q^{[k]},\ q=1,\ldots,p\}$ найдется вектор, отвечающий числу λ^*. Обозначим его $\mathbf{l}^*$. Нумеруя должным образом собственные числа $\lambda^{[k]}$, полагаем $\lambda^*=\lambda_p^{[k]}$, $\mathbf{l}^*=\mathbf{l}_p^{[k]}$. Построим функцию

$$\varphi^*(\mathbf{l})=\varphi^*(\mathbf{Q}_k\tilde{\mathbf{l}})=\lambda_1^{[k]}\tilde{l}_1^2+\ \ldots\ +\lambda_{p-1}^{[k]}\tilde{l}_{p-1}^2+\lambda^*(1-\tilde{l}_1^2-\ \ldots\ -\tilde{l}_{p-1}^2)=$$

$$=\psi_k(t_*,\mathbf{Q}_k\tilde{\mathbf{l}})-\lambda^*|\tilde{\mathbf{l}}|^2+\lambda^*=\psi_k(t_*,\mathbf{l})-\lambda^*|\mathbf{l}|^2+\lambda^* \tag{3.16}$$

Можно проверить [8], что при $\lambda^*>0$ функция $\varphi^*(\mathbf{l})$ является искомой выпуклой сверху оболочкой функции $\psi_k(t_*,\mathbf{l})$.

Таким образом, при $\lambda^*>0$ справедливо равенство

$$\varphi_k(t_*,\mathbf{l})=\{\psi_k(t_*,\cdot)\}^*=\varphi^*(\mathbf{l}),\quad |\mathbf{l}|\leqslant 1 \tag{3.17}$$

Учитывая (3.11)–(3.14) получаем, что функция $\varphi_k(t_*,\mathbf{l})$, как в случае $\lambda^*\leqslant 0$ (см. (3.15)), так и при $\lambda^*>0$ (см. (3.16), (3.17)), определяется выражением

$$\varphi_k(t_*,\mathbf{l})=\langle \mathbf{l},\mathbf{K}(\tau_k)\mathbf{l}\rangle-\lambda_k^*|\mathbf{l}|^2+\lambda_k^* \tag{3.18}$$

Рассмотрим индукцию по j от $j = k$ до $j = 1$.

Предположим, что на $(j+1)$-м шаге искомая оболочка $\varphi_{j+1}(t_*,\mathbf{l})$ уже построена и имеет вид

$$\varphi_{j+1}(t_*,\mathbf{l}) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{K}(\tau_{j+1})\mathbf{l}\rangle - \lambda^*_{j+1}|\mathbf{l}|^2 + \lambda^*_{j+1} \tag{3.19}$$

Равенство (3.19) во всяком случае справедливо при $j+1=k$, что следует из (3.18). Тогда для функции $\varphi_j(t_*,\mathbf{l})$ из (3.5), (3.6) имеет место равенство

$$\varphi_j(t_*,\mathbf{l}) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{K}(\tau_j)\mathbf{l}\rangle - \lambda^*_j|\mathbf{l}|^2 + \lambda^*_j \tag{3.20}$$

Для доказательства равенства (3.20), при учете (3.8), (3.19), в соответствии с (3.2), (3.5) вычисляем

$$\psi_j(t_*,\mathbf{l}) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{K}(\tau_j)\mathbf{l}\rangle - \lambda^*_{j+1}|\mathbf{l}|^2 + \lambda^*_{j+1} \tag{3.21}$$

Принимая во внимание (3.9) и (3.10) имеем

$$\psi_j(t_*,\mathbf{l}) = \psi_j(t_*,\mathbf{Q}_j\tilde{\mathbf{l}}) = \lambda_1^{[j]}\tilde{l}_1^2 + \ldots + \lambda_p^{[j]}\tilde{l}_p^2 - \lambda^*_{j+1}|\tilde{\mathbf{l}}|^2 + \lambda^*_{j+1} \tag{3.22}$$

Обозначим

$$\lambda^* = \max_{q=1,\ldots,p}\lambda_q^{[j]} \tag{3.23}$$

При $\lambda^* \leqslant \lambda^*_{j+1}$ (см. (3.11)) функция $\psi_j(t_*,\mathbf{l})$ из (3.21), (3.22) оказывается вогнутой; следовательно, справедливо соотношение

$$\varphi_j(t_*,\mathbf{l}) = \{\psi_j(t_*,\cdot)\}^* = \psi_j(t_*,\mathbf{l}), \quad \|\mathbf{l}\| \leqslant 1 \tag{3.24}$$

В случае $\lambda^* > \lambda^*_{j+1}$ полагаем

$$\varphi_j(t_*,\mathbf{l}) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{K}(\tau_j)\mathbf{l}\rangle - \lambda^*|\mathbf{l}|^2 + \lambda^* \tag{3.25}$$

Так же как и для $j=k$, можно непосредственно проверить, что функция $\varphi_j(t_*,\mathbf{l})$ из (3.25) действительно является искомой выпуклой сверху оболочкой функции $\psi_j(t_*,\mathbf{l})$ из (3.21) при $\lambda^* > \lambda^*_{j+1}$.

Из (3.11), (3.21) и (3.23) заключаем, что в обоих случаях выражения (3.24) и (3.25) можно записать одной формулой (3.20).

В силу индукции равенство (3.20) справедливо для любого $j=1,\ldots,k$. Это завершает построение последовательности функций $\varphi_j(t_*,\mathbf{l})$, $\|\mathbf{l}\| \leqslant 1$, $j=1,\ldots,k$.

Из (3.4) и (3.20), учитывая, что $\tau_1 = t_*$, выводим

$$e_{\mathbf{w}}(t_*,\mathbf{w}_*,y_*^*;\ \Delta_k) = \max_{\|\mathbf{l}\|\leqslant 1}[\langle \mathbf{l},\mathbf{w}_*\rangle + \langle \mathbf{l}, \mathbf{K}(t_*)\mathbf{l}\rangle - \lambda_1^*\|\mathbf{l}\|^2] + \lambda_1^* + y_*^* \tag{3.26}$$

Рассмотрим теперь матрицу $\mathbf{K}(\tau)$ из (3.8). Пусть $\lambda[\tau]$ – ее максимальное собственное число. Обозначим

$$\lambda^*_{t_*} = \max_{t_*\leqslant\tau\leqslant\vartheta}\lambda[\tau] = \lambda[\tilde{\tau}] \tag{3.27}$$

Будем полагать, что число $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(t_*)$ было включено в совокупность точек τ_j разбиения Δ_k (см. (3.1)) отрезка $[t_*,\vartheta]$. Тогда из (3.26) при учете (3.11) и (3.27) вытекает, что величина $e_{\mathbf{w}}(t_*,\mathbf{w}_*,y_*^*;\ \Delta_k)$ не зависит от выбора k, $k \geqslant 2$, и для ее вычисления достаточно взять разбиение $\Delta_2\{\tau_j\} = \{\tau_1 = t_*, \tau_2 = \tilde{\tau}, \tau_3 = \vartheta\}$. Стало быть, согласно (3.7), имеет место равенство

$$\rho^0_{\mathbf{w}}(t_*, \mathbf{w}_*, y^*_*) = \max_{\|\mathbf{l}\|\leqslant 1}[\langle \mathbf{l}, \mathbf{w}_*\rangle + \langle \mathbf{l}, \mathbf{K}(t_*)\mathbf{l}\rangle - \lambda^*_{t_*}|\mathbf{l}|^2] + \lambda^*_{t_*} + y^*_* \tag{3.28}$$

которое справедливо для любой возможной позиции $\{t_*, \mathbf{w}_*, y^*_*\}$.

В силу теоремы 1, при $\mathbf{w}_* = \mathbf{y}(x[t_0 - h[\cdot]t_*])$ (см. (2.2) при $t = t_*$), если учесть обозначение (2.3), выражение (3.28) дает формулу для вычисления цены $\rho^0(x[t_0 - h[\cdot]t_*],\ u[t_0[\cdot]t_*), v[t_0[\cdot]t_*))$ исходной дифференциальной игры (1.1), (1.2).

4. Оптимальные стратегии. Чтобы определить оптимальные стратегии $u^0(x[t_0 - h[\cdot]t], \varepsilon)$ и $v^0(x[t_0 - h[\cdot]t], \varepsilon)$ для исходной игры (1.1), (1.2), следуя изложенному выше материалу, построим стратегии $u^0_{\mathbf{w}}(t, \mathbf{w}, \varepsilon)$ и $v^0_{\mathbf{w}}(t, \mathbf{w}, \varepsilon)$, оптимальные для вспомогательной игры (2.5), (2.6).

Пусть случилась позиция $\{t, \mathbf{w} = \mathbf{w}[t], y^* = y^*[t]\}$ и было выбрано значение параметра $\varepsilon > 0$. Оптимальные воздействия $u^0_{\mathbf{w}}(t, \mathbf{w}, \varepsilon)$ и $v^0_{\mathbf{w}}(t, \mathbf{w}, \varepsilon)$ формируются методом экстремального сдвига на сопутствующие точки, определяемые по функции $\rho^0_{\mathbf{w}}(\cdot)$ из (3.28) (см. в деталях [5], с. 416). Приведем результирующие формулы

$$\begin{aligned} u^0_{\mathbf{w}}(t, \mathbf{w}, \varepsilon) &= -\frac{1}{2}\Phi^{-1}(t)\mathbf{B}^T_*(t)\mathbf{l}^0_u(t, \mathbf{w}, \varepsilon) \\ v^0_{\mathbf{w}}(t, \mathbf{w}, \varepsilon) &= \frac{1}{2}\Psi^{-1}(t)\mathbf{C}^T_*(t)\mathbf{l}^0_v(t, \mathbf{w}, \varepsilon) \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\mathbf{l}^0_u = \mathbf{l}^0_u(t, \mathbf{w}, \varepsilon)$ и $\mathbf{l}^0_v = \mathbf{l}^0_v(t, \mathbf{w}, \varepsilon)$ – максимизирующие векторы:

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{l}^0_u, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{l}^0_u, \mathbf{K}(t)\mathbf{l}^0_u\rangle - \lambda^*_t|\mathbf{l}^0_u|^2 - [(1+|\mathbf{l}^0_u|^2)\ (\varepsilon(t - t_0) + \varepsilon)]^{1/2} = \max_{\|\mathbf{l}\|\leqslant 1}[\mathbf{Idem}(\mathbf{l}^0_u \to \mathbf{l})] \\ &\langle \mathbf{l}^0_v, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{l}^0_v, \mathbf{K}(t)\mathbf{l}^0_v\rangle - \lambda^*_t|\mathbf{l}^0_v|^2 + [(1+|\mathbf{l}^0_v|^2)\ (\varepsilon(t - t_0) + \varepsilon)]^{1/2} = \max_{\|\mathbf{l}\|\leqslant 1}[\mathbf{Idem}(\mathbf{l}^0_v \to \mathbf{l})] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь **Idem** в правой части равенства означает выражение, совпадающее с левой частью этого равенства при указанной в скобках замене символов.

Отметим, что воздействия $u^0_{\mathbf{w}}(\cdot)$ и $v^0_{\mathbf{w}}(\cdot)$ из (4.1) ограничены.

Подставляя в (4.1), (4.2) $\mathbf{w} = \mathbf{y}(x[t_0 - h[\cdot]t])$ (см. (2.2)), в согласии с теоремой 1 получаем формулы, определяющие оптимальные в дифференциальной игре (1.1), (1.2) стратегии $u^0(x[t_0 - h[\cdot]t], \varepsilon)$ и $v^0(x[t_0 - h[\cdot]t], \varepsilon)$.

5. Пример. Рассмотрим систему с последействием

$$\begin{aligned} &\ddot{r}_1(t) = -2r_1(t) - 0{,}4\dot{r}_1(t) + 0{,}02r_2(t) - r_1(t-1) - \\ &- 0{,}4\dot{r}_1(t-1) + 0{,}4r_2(t-1) - \dot{r}_2(t-1) + (5-t)u_1 + 2v_1 \\ &\ddot{r}_2(t) = 0{,}01r_1(t) - r_2(t) - 0{,}1\dot{r}_2(t) - 0{,}3r_1(t-1) + \\ &+ 0{,}7\dot{r}_1(t-1) - 0{,}4r_2(t-1) + 0{,}5\dot{r}_2(t-1) + (4 - 0{,}5t)u_2 + 3v_2 \\ &0 \leqslant t \leqslant 4, \quad r_1(\tau) = \sin\tau, \quad r_2(\tau) = \cos\tau, \quad -1 \leqslant \tau \leqslant 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

где точка над символом означает производную по времени t.

Пусть показатель качества процесса управления имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma = (&r_1^2[0{,}5] + r_2^2[0{,}5] + \dot{r}_1^2[0{,}5] + \dot{r}_2^2[0{,}5] + r_1^2[1] + r_2^2[1] + r_1^2[1{,}5] + \\ &+ \dot{r}_1^2[2] + \dot{r}_2^2[2{,}5] + r_2^2[3] + \dot{r}_1^2[3{,}5] + \dot{r}_2^2[3{,}5] + r_1^2[4] + r_2^2[4] + \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$+\dot{r}_1^2[4]+\dot{r}_2^2[4])^{1/2}+\int\limits_0^4(u_1^2[t]+u_2^2[t])dt-\int\limits_0^4(v_1^2[t]+v_2^2[t])dt$$

После замены $x_1=r_1$, $x_2=\dot{r}_1$, $x_3=r_2$, $x_4=\dot{r}_2$ система (5.1) переписывается в виде (1.1), где соответственно следует подставить

$$x=\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Vmatrix},\quad A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\-2&-0{,}4&0{,}02&0\\0&0&0&1\\0{,}01&0&-1&-0{,}1\end{Vmatrix},\quad A_h=\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\-1&-0{,}4&0{,}4&-1\\0&0&0&0\\-0{,}3&0{,}7&-0{,}4&0{,}5\end{Vmatrix}$$

$$B(t)=\begin{Vmatrix}0&0\\5-t&0\\0&0\\0&4-0{,}5t\end{Vmatrix},\quad C(t)=\begin{Vmatrix}0&0\\2&0\\0&0\\0&3\end{Vmatrix},\quad u=\begin{Vmatrix}u_1\\u_2\end{Vmatrix},\quad v=\begin{Vmatrix}v_1\\v_2\end{Vmatrix}$$

$h=1,\quad t_0=0,\quad \vartheta=4$

При этом показатель качества (5.2) переписывается в виде (1.2) при подстановке

$N=8,\quad t^{(i)}=0{,}5i,\quad g^{(i)}=0,\quad i=1,\ldots,8,\quad D^{(1)}=D^{(8)}=E^{[4]}$

$$D^{(2)}=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{Vmatrix},\quad D^{(3)}=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\end{Vmatrix},\quad D^{(4)}=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\end{Vmatrix}$$

$$D^{(5)}=\begin{Vmatrix}0&0&0&1\end{Vmatrix},\quad D^{(6)}=\begin{Vmatrix}0&0&1&0\end{Vmatrix},\quad D^{(7)}=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\end{Vmatrix}$$

$\Phi(t)=\Psi(t)=E^{[2]}$

Задача игрового управления для системы (5.1) при показателе качества (5.2) решалась на основе описанных выше конструкций. В данном случае размерность информационного образа $y(\cdot)$, а стало быть, и вспомогательной задачи управления **w**-системой, $p=16$.

Приведем результаты моделирования процесса управления (5.1), (5.2) на ЭВМ. (При вычислениях в схеме (1.3)–(1.5) были выбраны $k=4000$, $\delta_k=4/4000=0{,}001$, $\varepsilon=0{,}01$.) Априорно подсчитанная цена игры

$$\rho^0(x_0[-1[\cdot]0],\ u[0[\cdot]0),\ v[0[\cdot]0))=\rho^0(\{\sin\tau,\cos\tau,\cos\tau,-\sin\tau,-1\leqslant\tau\leqslant0\})=\rho^0\approx 2{,}741$$

На фиг. 1 изображено движение системы (5.1), реализовавшееся при совместном действии оптимальных стратегий $u^0(\cdot)=u^0(x[-1[\cdot]t],\varepsilon)$ и $v^0(\cdot)=v^0(x[-1[\cdot]t],\varepsilon)$. Значение показателя качества (5.2) в этом случае равно

$\gamma\approx 2{,}695+5{,}376-5{,}329=2{,}742\approx\rho^0$

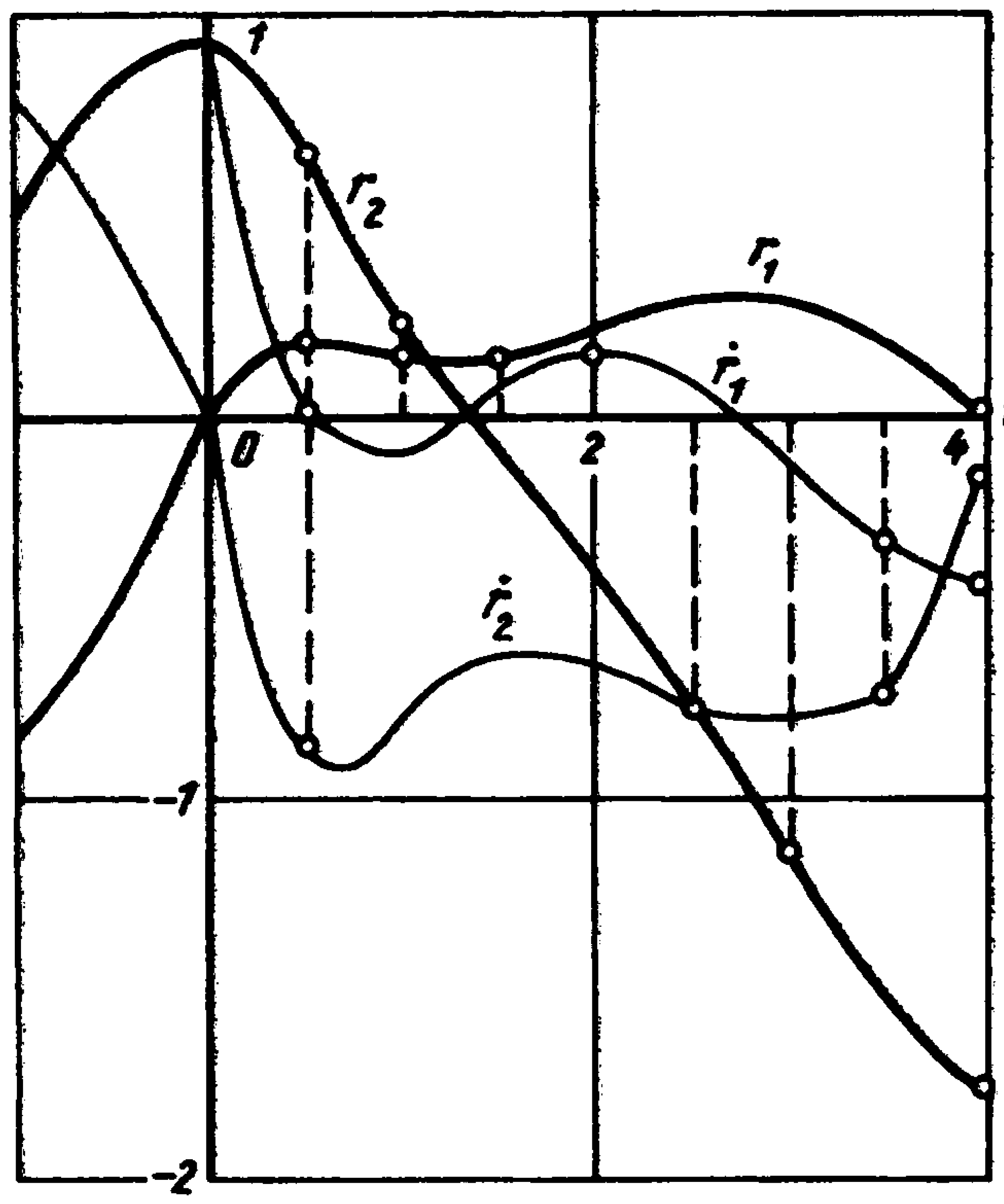
На фиг. 2 показаны графики соответствующих реализаций управления и помехи.

На фиг. 3 изображено движение системы (5.1), реализовавшееся при действии оптимальной стратегии управления $u^0(\cdot)$ в паре с помехой $v(\cdot)=\dfrac{1}{2}\Psi^{-1}(t)C^T(t)x(t)/|x(t)|$. Полученный результат

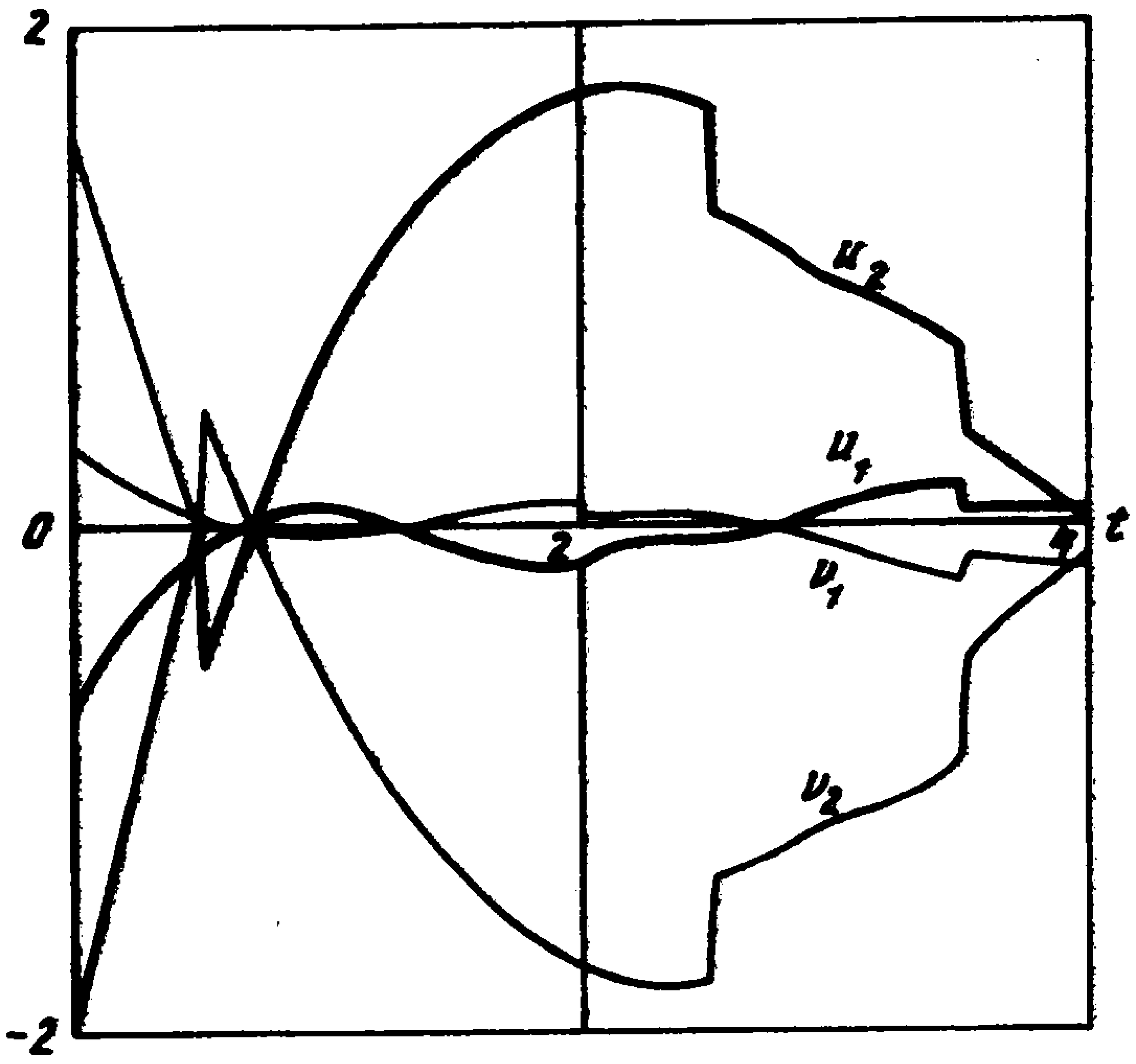
$\gamma\approx 2{,}281+4{,}278-4{,}033=2{,}526<\rho^0$

На фиг. 4 показано движение системы (5.1), реализовавшееся при действии оптимальной стратегии помехи $v^0(\cdot)$ в паре с управлением $u(\cdot)=-\dfrac{1}{2}\Phi^{-1}(t)B^T(t)x(t)/|x(t)|$. Полученный результат

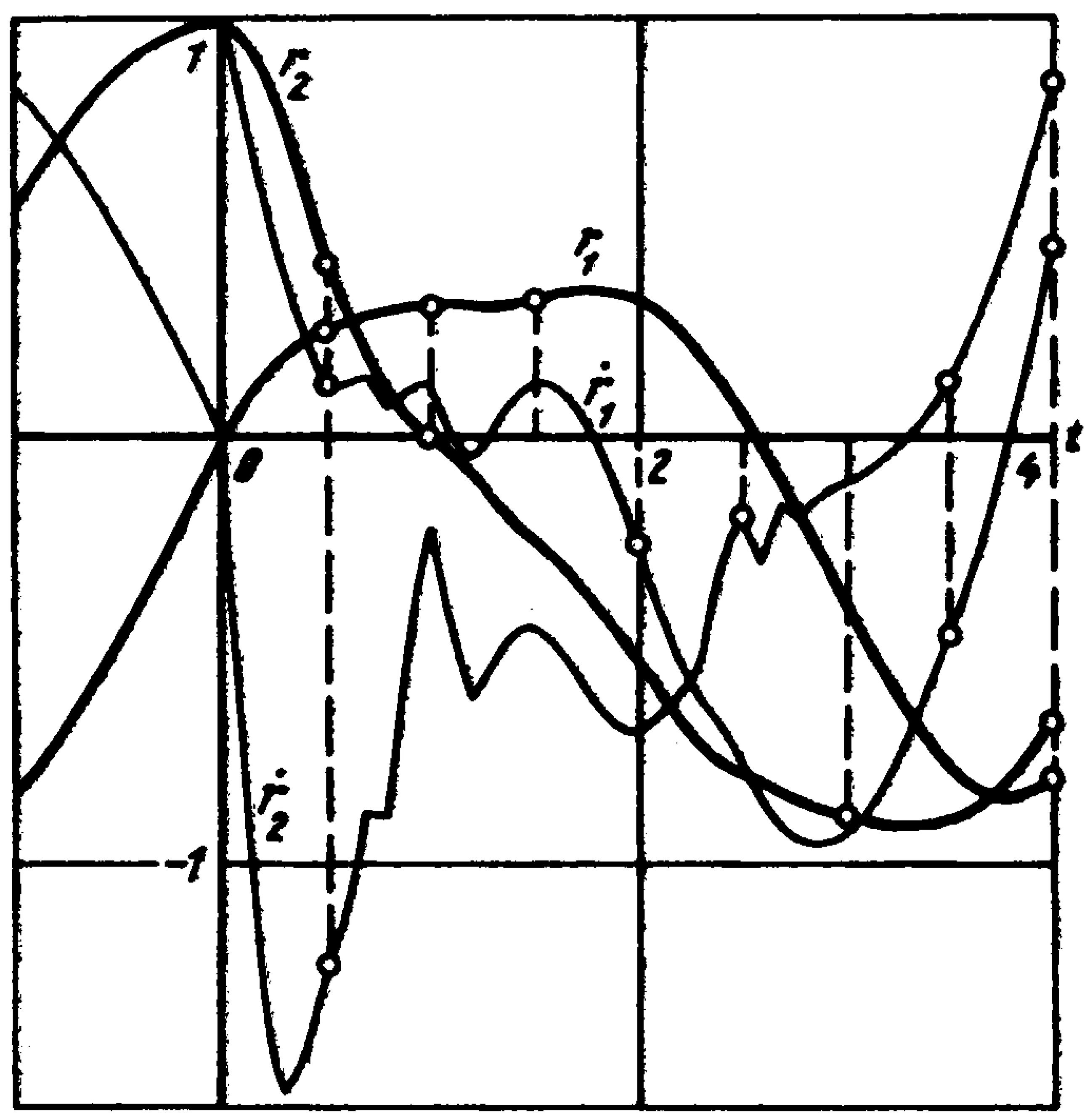
$\gamma\approx 10{,}443+3{,}887-8{,}866=5{,}464>\rho^0$



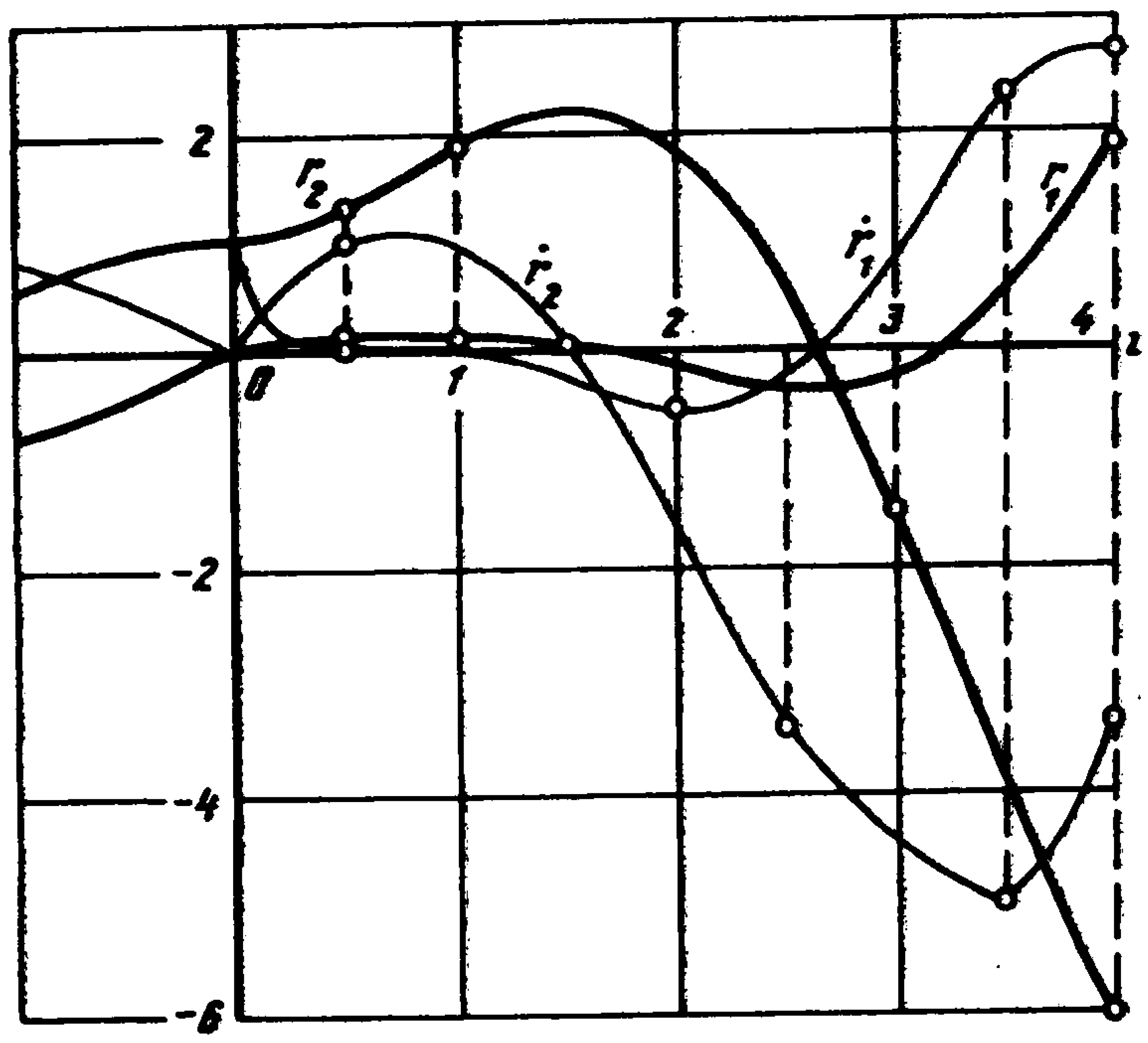
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Работоспособность предлагаемого управления проверялась также при следующем моделировании процесса управления (5.1), (5.2):

оптимальная стратегия управления $u^0(\cdot)$ в паре с помехой $v(\cdot) \equiv 0$ – результат $\gamma \approx 1{,}195 + 1{,}502 - 0 = 2{,}697$;

оптимальная стратегия управления $u^0(\cdot)$ в паре с помехой $v(\cdot) = \{v_1(\cdot), v_2(\cdot)\} = \{0{,}6\sin(t), 0{,}4\sin(2t+1)\}$ – результат $\gamma \approx 1{,}617 + 1{,}737 - 0{,}984 = 2{,}37$;

оптимальная стратегия помехи $v^0(\cdot)$ в паре с управлением $u(\cdot) \equiv 0$ – результат $\gamma \approx 32{,}344 + 0 - 12{,}166 = 20{,}178$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00160).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Осипов Ю.С.* Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
3. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* Линейные дифференциально-разностные игры // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197. № 4. С. 777–780.
4. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* Дифференциально-разностные игры сближения с функциональным целевым множеством // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 1. С. 3–13.
5. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
6. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. Berlin etc/:Birhäuser, 1995. 322 p.
7. *Krasovskii N.N., Reshetova T.N.* On the program synthesis of a guaranteed control // Problem of Control and Inform. Theory. 1988. V. 17. No. 6. P. 333–343.
8. *Лукоянов Н.Ю.* Об одной дифференциальной игре с интегральным критерием качества // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1905–1913.
9. *Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.* Задача конфликтного управления с наследственной информацией // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 885–900.
10. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
11. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
26.XI.1997