УДК 62–50

© 1998 г. Н.В. Мельникова, А.М. Тарасьев

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В СЕТОЧНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ КВАЗИВЫПУКЛЫХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается единый сеточный алгоритм построения функции цены и оптимального синтеза, основанный на локальных квазидифференциальных аппроксимациях уравнения Гамильтона–Якоби. Оптимальный синтез генерируется методом экстремального сдвига в направлении обобщенных градиентов. Исследуется случай квазивыпуклых аппроксимационных функций, в котором при решении проблемы корректной интерполяции узловых значений оптимального управления возможна линейная зависимость пространственно-временных шагов, что существенно сокращает объем вычислений, упрощает конечно-разностные формулы и позволяет использовать простые операторы, основанные на конструкциях метода наименьших квадратов.

Для построения функции цены и оптимального синтеза в сеточных аппроксимационных схемах, предназначенных для численного решения уравнений Гамильтона–Якоби (ГЯ) далее используются свойства стабильности функции цены [1] и принцип экстремального сдвига [2]. Обобщенное решение уравнения ГЯ – функция цены задачи оптимального гарантированного управления, обычно недифференцируема, а оптимальный синтез имеет разрывный характер на поверхностях переключения. Теория уравнений ГЯ, развитая [3, 4] для минимаксных решений и для вязкостных решений [5, 6] дает возможность для работы с недифференцируемыми функциями.

Был предложен [7, 8] алгоритм построения функции цены и оптимального синтеза в единой сеточной схеме. Значения оптимального управления строились в узлах сетки методом экстремального сдвига [2, 9] в направлении обобщенных градиентов. Принцип экстремального прицеливания в направлении квазиградиентов, определенных преобразованием Иосиды–Моро, рассматривался ранее [10].

Построение оптимального синтеза в сеточных аппроксимационных схемах накладывает в общем случае следующие два ограничения. Во-первых, требуется должным образом выбрать конечно-разностный оператор. Например, в задаче гарантированной минимизации разрешающим является оператор минимаксного типа, определенный на локальных вогнутых оболочках. Использование же операторов Лакса–Фридрихса, операторов с локальными выпуклыми или линейными оболочками проблематично. Наоборот, в двойственной задаче гарантированной максимизации необходимо применять оператор максиминного типа, определенный на локальных выпуклых оболочках. Во-вторых, при выборе зависимости шагов пространственной и временной аппроксимации в отличие от результатов относительно сходимости аппроксимационных схем по норме пространства непрерывных функций, требующих лишь линейной зависимости пространственно-временных аппроксимационных шагов, необходима аппроксимация более высокого порядка малости пространственных переменных по отношению к временной переменной. Это объясняется тем, что в пространственно-временной сеточной реализации аппроксимационных схем значения функции цены, ее обобщенных градиентов и оптимальных управлений вычисляются только в узлах сетки. Конструируемые же траектории могут скользить между ее узлами, и, следовательно, узловые значения управлений нужно интерполировать во внутренние точки. Для правильной интерполяции требуется «хорошая» аппроксимация не только значений функции цены, но и поверхностей разрыва ее градиентов (в обобщенном смысле по норме пространства непрерывно-дифференцируемых функций), которая достигается в общем случае более высоким порядком пространственной аппроксимации по сравнению с временным шагом.

Ниже вводится свойство локальной квазивыпуклости для аппроксимируемых функций, при выполнении которого снимаются упомянутые ограничения: существенно упрощаются конечно-разностные формулы и допускается линейная зависимость пространственно-временных шагов аппроксимации. Имеется возможность использования простых аппроксимационных формул метода наименьших квадратов для построения локальных линейных оболочек. Значения оптимальных управлений вычисляются методом экстремального сдвига в направлении градиентов линейных функций. Узловые значения оптимальных управлений интерполируются линейно во внутренние точки. Доказывается, что предлагаемая процедура обеспечивает невозрастание аппроксимационной функции цены вдоль генерируемой траектории, что означает ее оптимальность. Рассматриваются обобщения конструкции на задачу гарантированного управления с дисконтирующим интегральным показателем.

1. Задача оптимального гарантированного управления. Рассматривается задача построения оптимального гарантированного синтеза $p = U^*(t, x)$ в динамической системе

$$\dot{x} = f(t,\ x,\ p,\ q) = A(t,\ x) + B(t,\ x)p + C(t,\ x)q \tag{1.1}$$

$$t \in T = [0,\ \theta],\ \ x \in R^n,\ \ p \in P \subset R^p,\ \ q \in Q \subset R^q$$

для терминального функционала платы

$$J(x(\cdot)) = \sigma(x(\theta)) \tag{1.2}$$

Здесь x–n-мерный вектор системы, p – управляющее воздействие, q – возмущение. Множества P, Q – выпуклые компакты. Функции $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$ непрерывны по Липшицу с константой L и имеют подлинейный рост, обеспечивающий продолжимость решений. Функция платы $x \to \sigma(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Для правой части системы (1.1) существует седловая точка, однозначно определяющая гамильтониан $(t, x, s) \to H(t, x, s)$:

$$H(t,\ x,\ s) = \langle s,\ A(t,\ x)\rangle + \min_{p\in P}\langle s,\ B(t,\ x)p\rangle + \max_{q\in Q}\langle s,\ C(t,\ x)q\rangle \tag{1.3}$$

Решение задачи заключается в построении оптимальной стратегии $(t, x) \to U^*(t, x)$, реализующей значение функции цены

$$w(t_*,\ x_*) = \min_{U}\ \max_{x(\cdot)\in X(t_*, x_*, U)} \sigma(x(\theta)) = \max_{V}\ \min_{y(\cdot)\in Y(t_*, x_*, V)} \sigma(y(\theta)) \tag{1.4}$$

Траектории $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ определяются как пределы пошаговых движений (ломаных Эйлера) [1], порожденных из начальной позиции (t_*, x_*) стратегиями $p = U(t, x)$ и реализациями $q = q(t)$ или стратегиями $q = V(t, x)$ и реализациями $p = p(t)$ соответственно.

Функция цены w непрерывна по Липшицу и, следовательно, почти всюду дифференцируема. В точках дифференцируемости она удовлетворяет уравнению Беллмана–Айзекса – уравнению в частных производных первого порядка типа ГЯ

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,\ x) + H\left(t,\ x,\ \frac{\partial w}{\partial x}(t,\ x)\right) = 0,\ \ (t,\ x) \in T \times R^n \tag{1.5}$$

Определение функции цены w влечет также выполнение краевого условия

$$w(\theta,\ x) = \sigma(x),\ \ x \in R^n \tag{1.6}$$

Основными характеристиками функции цены являются свойства стабильности [1], которые обеспечивают выживаемость траекторий динамической системы (1.1) в ее множествах уровня (множествах Лебега) – слабую инвариантность ее графика. Свойства стабильности и краевое условие формируют необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция цены.

Свойства стабильности могут быть выражены в компактной форме при использовании конструкций негладкого анализа. В терминах производных по направлению эти свойства были даны ранее [3, 4], причем было введено понятие минимаксного (недифференцируемого) решения уравнения ГЯ, совпадающего с функцией цены. В рамках теории уравнений в частных производных первого порядка было получено эквивалентное определение вязкостного решения, сформулированное в терминах субдифференциалов [5, 6]. Были доказаны теоремы существования, единственности и корректности решений.

Приведем определение обобщенного решения в терминах сопряженных производных [11].

Определение. Непрерывная по Липшицу функция w называется обобщенным (минимаксным) решением задачи Коши для уравнения ГЯ (1.5), если она удовлетворяет краевому условию (1.6) и для нее выполнена пара дифференциальных неравенств

$$\inf_{s\in R^n} \sup_{h\in R^n} (\langle s,\ h\rangle - \partial_- w(t,\ x)|(1,\ h) - H(t,\ x,\ s)) \geqslant 0 \tag{1.7}$$

$$\sup_{s\in R^n} \inf_{h\in R^n} (\langle s,\ h\rangle - \partial_+ w(t,\ x)|(1,\ h) - H(t,\ x,\ s)) \leqslant 0 \tag{1.8}$$

Неравенство (1.7) выражает свойство u-стабильности, а (1.8) – свойство υ-стабильности функции w. В точках дифференцируемости функции w неравенства (1.7), (1.8) трансформируются в уравнение ГЯ (1.5).

Конструкции прямых и двойственных переменных, возникающие в формулах (1.7), (1.8), используются в конечно-разностных операторах для аппроксимации обобщенного решения уравнения ГЯ.

Определим компактную область $G_r \in T \times R^n$, в которой будем строить аппроксимационную схему для уравнения ГЯ (1.5), условием инвариантности: если $(t_0,\ x_0) \in G_r$, то $(t,\ x_0 + (t - t_0)b) \in G_r$ при всех $\{t \in T,\ \|b\| \leqslant r\}$. Здесь

$$r > K,\quad K = \max_{(t,x,p,q)\in G\times P\times Q} \|f(t,\ x,\ p,\ q)\| \tag{1.9}$$

– максимальная скорость системы в множестве G, сильно инвариантном относительно дифференцильного включения

$$x\cdot(t) \in F(t,\ x(t)),\quad F(\tau,\ y) = \{f(\tau,\ y,\ p,\ q):\ p\in P,\ q\in Q\}$$

2. Оптимальный синтез в сеточных схемах. Для построения оптимальной процедуры управления $(t, x) \to U^*(t, x)$, которая решает задачу минимизации функционала (1.2), будем использовать конечно-разностную конструкцию CU, непосредственно вытекающую из свойства υ-стабильности (1.8)

$$\upsilon(x) = CU(t,\ \Delta,\ u)(x) = \min_{y\in O(x,K\Delta)} \min_{s\in D^*G(y)} \{\Delta H(t,x,\ s) + G(y) - \langle s,\ y - x\rangle\} \tag{2.1}$$

Оператор CU по известной аппроксимации $y \to u(y)$ функции цены w, заданной в момент времени $t + \Delta$, $(t + \Delta, y) \in D_r$, строит аппроксимацию $x \to \upsilon(x)$ в момент времени t, $(t, x) \in G_r$.

Символом $y \to G(y)$ в операторе (2.1) обозначена локальная вогнутая оболочка $y \to G(y)$ функции $y \to u(y)$ в замкнутой окрестности $\overline{O}(x,\ r\Delta)$ точки x радиуса $r\Delta$.

Множество $D^*G(y)$ – супердифференциал функции G

$$D^*G(y) = \{s \in R^n : G(\bar{y}) - G(y) \leqslant \langle s,\ \bar{y} - y\rangle,\ \ \bar{y} \in \overline{O}(x,\ r\Delta)\},\quad y \in \overline{O}(x,\ K\Delta)$$

заданный в замкнутой окрестности $\overline{O}(x,\ K\Delta)$ точки x размера $K\Delta$, $r > K$. Оператор CU может быть представлен как минимаксная конструкция

$$\min_{p\in P}\ \max_{q\in Q} G(y(t,\ x,\ \Delta,\ p,\ q)) \tag{2.2}$$

которая вычисляется на вогнутых оболочках $y \to G(y)$ и определена на элементах ломаной Эйлера $y(t, x, \Delta, p, q)$

$$y(t,\ x,\ \Delta,\ p,\ q) = x + \Delta(A(t,\ x) + B(t,\ x)p + C(t,x)q) \tag{2.3}$$

Рассмотрим идеализированную аппроксимационную схему с конечно-разностным оператором CU, в которой зададим сетку Γ только по времени

$$\Gamma = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta\},\quad \Delta = t_{i+1} - t_1,\quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

Будем полагать, что значения функции $u(t, x)$, аппроксимирующей функцию цены $w(t, x)$, вычисляются во всех точках $(t, x) \in G_r$, $t \in \Gamma$, т.е.

$$u(\theta, x) = \sigma(x) \tag{2.4}$$

$$u(t_i,\ x) = CU(t_i,\ \Delta,\ u(t_{i+1},\ \cdot))(x),\ (t_i,\ x),\ (t_{i+1},\ x) \in G_r,\ i = 0,\ \ldots,\ N-1 \tag{2.5}$$

Определим значения оптимальной стратегии $U^* = U^*(t, x)$ по принципу экстремального прицеливания в направлении обобщенных градиентов – суперградиентов s^* локальной вогнутой оболочки G функции u

$$U^* = U^*(t,\ x) = \arg \min_{p\in P} \left\langle s^*,\ B(t,\ x)p \right\rangle \tag{2.6}$$

$$s^* = s^*(t,\ x,\ y^*) = \arg \min_{s\in D^*G(y^*)} \{\Delta H(t,\ x,\ s) + G(y^*) - \left\langle s,\ y^* - x \right\rangle\} \tag{2.7}$$

$$y^* = y^*(t,\ x) = \arg \min_{y\in \overline{O}(x, K\Delta)}\ \min_{s\in D^*G(y)} \{\Delta H(t,\ x,\ s) + G(y) - \left\langle s,\ y - x \right\rangle\} \tag{2.8}$$

Отметим, что значения аппроксимационной функции (АФ) $u(t, x)$ и оптимальной стратегии $U^*(t, x)$ вычисляются параллельно в единой аппроксимационной схеме.

Зафиксируем начальную позицию (t_0, x_0). Рассмотрим ломаную Эйлера

$$x(\cdot) = \{x(t,\ t_0,\ x_0,\ U^*,\ q(\cdot)),\ t \in \Gamma \cap T\} \tag{2.9}$$

порожденную стратегией U^* (2.6) и произвольным возмущением $t \to q(t)$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + \Delta) = x(t_i) + \Delta(A(t_i,\ x(t_i)) +$$

$$+ B(t_i,\ x(t_i))U^* + C(t_i,\ x(t_i))q(t_i)),\quad t_i,\ t_{i+1} \in \Gamma,\quad x(t_0) = x_0$$

Стратегия U^* обеспечивает невозрастание значений аппроксимационной функции $u(t, x)$ вдоль траектории $x(\cdot)$ (2.9), что влечет справедливость следующего утверждения [12].

Теорема 2.1. Для произвольного параметра точности $\varepsilon > 0$ можно указать шаг Δ разбиения Γ, такой что для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in D_r$ и произвольных возмущений $t \to q(t)$ траектория $x(\cdot)$ (2.9), порожденная стратегией U^* (2.6), удовлетворяет оценкам

$$\sigma(x(\theta)) < u(t_0,\ x_0) + \varepsilon,\quad | w(t_0,\ x_0) - u(t_0,\ x_0) | < \varepsilon \tag{2.10}$$

Реально аппроксимационная процедура (2.4), (2.5) может быть реализована не в каждой точке $(t, x) \in G_r$, а только в узлах сетки GR. Пусть сетка GR равномерная и прямоугольная

$$GR = \{(t,\ x) \in G_r : t \in \Gamma,\quad x = (m_1 e_1 + \ldots + m_n e_n)h\} \tag{2.11}$$

$$m_i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ i = 1,\ \ldots,\ n$$

$$e_i = (e_i^1,\ \ldots,\ e_i^n),\quad e_i^i = 1,\quad e_i^j = 0,\quad i = 1,\ \ldots,\ n,\quad i \neq j$$

Значения АФ $u(t, y_j)$ вычисляются только в узлах сетки $(t, y_j) \in GR$. В точки области G_r значения АФ интерполируются линейно согласно заданному симплициальному разбиению Ω с вершинами в узлах сетки GR

$$u(t,\ y) = \sum u(t,\ y_j),\ (t,\ y) \in D_r,\ (t, y_j) \in GR,\quad y = \sum \alpha_j y_j,\ \ \alpha_j \geqslant 0,\ \ \sum \alpha_j = 1 \tag{2.12}$$

Здесь и всюду далее суммирование ведется от $j = 0$ до $j = n$.

Имеются теоремы сходимости [13] в пространстве непрерывных функций для аппроксимационных схем с линейной интерполяцией (2.12). Оценка сходимости составляет величину квадратного корня $C\Delta^{1/2}$ из шага разбиения Δ.

С интерполяцией значений $U^*(t, y_j)$ оптимальной стратегии дело обстоит сложнее. Это объясняется тем, что в общем случае линейная интерполяция не годится для аппроксимации разрывных стратегий. Для этой цели следует использовать кусочно-постоянные (копирующие) интерполяции

$$U^*(t,\ y) = U^*(t,\ y_0),\ \ \|y_0 - y\| = \min_{(t, y_j) \in GR} \|y_j - y\| \tag{2.13}$$

Для обеспечения приемлемой точности копирующей интерполяции требуется более высокая степень дискретизации фазового пространства (шаг h) по сравнению с дискретизацией времени (шаг Δ)

$$h = \beta(\Delta)\Delta,\ \ \lim_{\Delta \downarrow 0} \beta\Delta = 0 \tag{2.14}$$

При соблюдении условия (2.14) справедлива теорема об оптимальности копирующей стратегии (2.6), (2.13).

Теорема 2.2. Для произвольного параметра точности $\varepsilon > 0$ можно указать шаг Δ разбиения Γ и выбрать сетку GR (2.11) с высокой дискретизацией фазовых переменных (2.14) такие, что для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in D_r$ и произвольных возмущений $t \to q(t)$ траектория $x(\cdot)$ (2.9), порожденная копирующей стратегией U^* (2.6), (2.13), удовлетворяет оценкам (2.10).

Условие (2.14) требует гигантских сеток GR и огромного объема вычислений.

Рассмотрим возможность использования «нормальных» сеток, в которых шаги дискретизации h и Δ связаны линейно (γ – фиксированная постоянная)

$$h = \gamma\Delta \tag{2.15}$$

Введем следующее условие квазивыпуклости. Предположим, что АФ $u(t, y)$ является выпуклой с точностью до бесконечно малой величины $\mu\Delta^{1+b}$, $b > 0$, $\mu > 0$ в областях размера $\nu\Delta$, что означает выполнение следующих условий:

$$\sum \alpha_j u(t,\ x_j) + \mu\Delta^{1+b} \geqslant u(t,\ \sum \alpha_j x_j),\ \ \alpha_j \geqslant 0,\ \ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ \sum \alpha_j = 1 \tag{2.16}$$

$$\|x_k - x_l\| \leqslant \nu\Delta,\ \ x_k,\ \ x_l \in R^n,\ \ k,\ \ l = 0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ \ \nu = n^{1/2}\gamma + 2K$$

В этом случае значения $U^*(t, y_j)$ можно интерполировать линейно, точно так же, как и значения АФ $u(t, y)$ (2.12)

$$U^*(t,\ y) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j U_j^*,\ \ U_j^* = U^*(t,\ y_j),\ \ y = \sum \alpha_j y_j,\ \ \alpha_j \geqslant 0,\ \ \sum \alpha_j = 1 \tag{2.17}$$

Для траектории (2.9), порожденной стратегией $U^*(t, y)$ (2.17) с линейной интерполяцией узловых значений $U^*(t, y_j)$, вычисленных по принципу экстремального прицеливания в направлении суперградиентов (2.6), выполняется следующий принцип оптимальности [7, 8]

Лемма. Аппроксимационная функция $u(t, y)$ не возрастает вдоль движений $x(\cdot)$ (2.9)

$$u(t_i,\ x(t_i)) \geqslant u(t_{i+1},\ x(t_{i+1})) - \mu\Delta^{1+b} - L_w n^{1/2} L\gamma\Delta^2 \tag{2.18}$$

Доказательство. В силу соотношения выпуклости (2.16), непрерывности по Липшицу функции $u(t, y)$ и определения стратегии U^* (2.6), (2.17) имеем неравенства, обеспечивающие соотношение (2.18)

$$u(t_{i+1},\ x(t_{i+1})) = u(t_i+\Delta,\ x(t_i)+\Delta f(t_i, x(t_i),\ U^*,\ q(t_i)) =$$

$$= u(t_i+\Delta,\ \sum\alpha_j\bar{x}_j - \Delta(\sum\alpha_j f(t_i,\ x_j,\ U_j^*,\ q(t_i)) - f(t_i,\ x(t_i),\ U^*,\ q(t_i)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n} \alpha_j u(t_i+\Delta,\ \bar{x}_j) + \mu\Delta^{1+b} + L_w n^{1/2} L\gamma\Delta^2 \leqslant$$

$$\leqslant u(t_i,\ x(t_i)) + \mu\Delta^{1+b} + L_w n^{1/2} L\gamma\Delta^2$$

Здесь

$$x(t_i) = \sum \alpha_j x_j,\ (t_i,\ x_j) \in GR,\ \alpha_j \geqslant 0,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ \sum\alpha_j = 1$$

$$\bar{x}_j = x_j + \Delta(A(t_i,\ x_j) + B(t_i,\ x_j)U_j^* + C(t_i,\ x_j)q(t_i))$$

При этом выполняется соотношение

$$\|\bar{x}_k - \bar{x}_l\| \leqslant n^{1/2}\gamma\Delta + \Delta 2K \leqslant \nu\Delta,\ k,\ l = 0,\ 1,\ \ldots\ n$$

Оценка (2.18) влечет оптимальность стратегии $U^*(t, y)$ (2.6), (2.17).

Теорема 2.3. Пусть для разбиений Г и «нормальных» линейных сеток GR (2.15) АФ $u(t, y)$ является квазивыпуклой (2.16). Тогда для всех начальных позиций (t_0, x_0) и произвольных возмущений $\tau \to q(\tau)$ траектория $x(\cdot)$ (2.9), порожденная стратегией U^* (2.6) с линейной интерполяцией узловых значений (2.17), удовлетворяет оценкам

$$\sigma(x(\theta)) \leqslant u(t_0,\ x_0) + \varphi(\Delta)$$

$$\varphi(\Delta) \leqslant (\theta - t_0)(\mu\Delta^b + L_w n^{1/2} L\gamma\Delta),\ \ \lim_{\Delta\downarrow 0}\varphi(\Delta) = 0 \tag{2.19}$$

$$|w(t_0,\ x_0) - u(t_0,\ x_0)| \leqslant C\Delta^{1/2}$$

Зафиксировав произвольное число $\varepsilon > 0$, можно указать шаг Δ разбиения Г и «нормальную» линейную сетку GR (2.15), обеспечивающие оценки (2.10).

Замечание 2.1. В «нормальной» сетке при линейной зависимости шагов дискретизации фазовых переменных и времени (2.15) формулы в конечно-разностном операторе CU (2.1) для локальных выпуклых оболочек $y \to G(y)$ и супердифференциалов $D^*G(y)$ существенно упрощаются:

$$CU(t,\ \Delta,\ u)(x) = G(x) + \Delta \min_{s\in D^*G(x)} H(t,\ x,\ s)$$

$$G(x) = \max\{u(x),\ \max\{(u(x+\gamma\Delta e_i) - (u(x-\gamma\Delta e_i))/2\}\}$$

$$D^*G(x) = \mathrm{co}\{b_k\colon\ k = 1,\ \ldots,\ 2^n\},\ \ b_k = (b_k^1,\ \ldots,\ b_k^n)$$

$$b_k^i = \pm\frac{G(x\pm\gamma\Delta e_i) - G(x)}{\gamma\Delta} = \pm\frac{u(x\pm\gamma\Delta e_i) - G(x)}{\gamma\Delta}$$

Принцип экстремального прицеливания для вычисления оптимальной стратегии U^* реализуется по простым формулам

$$U^*(t,\ x)=\arg\min_{p\in P}\langle s^*,\ B(t,\ x)p\rangle,\quad s^*(t,\ x)=\arg\min_{s\in D^*G(x)} H(t,\ x,\ s)$$

Замечание 2.2. Условие квазивыпуклости (2.16) обеспечивает оптимальность стратегии (2.6) в «нормальной» сетке с простейшим конечно-разностным оператором LA, который использует локальные линейные аппроксимации из метода наименьших квадратов

$$LA(t,\ \Delta,\ u)(x)=u_0+\Delta H(t,\ x,\ c)$$

$$u_0=\frac{1}{M}\Sigma[u(y_0+u(y_1)+...+u(y_M))],\ M=2n,\quad y_0=x,\quad y_l=x\pm\gamma\Delta e_i,\quad i=1,\ ...,\ n$$

$$c=(c^1,\ ...,\ c^n),\quad c^i=\frac{u(x+\gamma\Delta e_i)-u(x-\gamma\Delta e_i)}{2\gamma\Delta},\quad i=1,\ ...,\ n$$

$$U^*(t,\ x)=\arg\min_{p\in P}\langle c,\ B(t,\ x)p\rangle$$

3. Дифференциальная игра с дисконтированием. Рассмотрим стационарную управляемую систему на бесконечном промежутке времени $[0, +\infty)$

$$\dot{x}=f(x,\ p,\ q)=A(x)+B(x)p+C(x)q,\quad x\in R^n,\quad p\in P\subset R^p,\quad q\in Q\subset R^q \tag{3.1}$$

Пусть $x(\cdot)=\{x(t):t\in[0,\ +\infty)\}$ – траектория системы (3.1), порожденная реализациями $t\to p(t)$, $t\to q(t)$ параметров p, q. Будем оценивать качество процесса ($x(\cdot)$, $p(\cdot)$, $q(\cdot)$) интегральным функционалом с коэффициентом дисконтирования $\lambda>0$

$$J(x(\cdot),\ p(\cdot),\ q(\cdot))=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau}g(x(\tau),\ p(\tau),\ q(\tau))d\tau \tag{3.2}$$

Функции $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ в динамической системе (3.1) и интегральном функционале (3.2) непрерывны по совокупности переменных, удовлетворяют условию Липшица по переменной x с константой L и ограничены постоянной K.

Верхняя функция цены w^0 в задаче (3.1), (3.2) определяется соотношением

$$w^0(x_*)=\min_U\ \max_{(x(\cdot),z(\cdot))\in Y(y_*,U)}\ \lim_{\theta\to\infty} z(\theta) \tag{3.3}$$

Здесь $Y(y_*, U)$ – множество траекторий $y(t) = (x(t), z(t))$, $t\in[0, \theta]$ расширенной системы

$$\dot{x}=f(x,\ p,\ q),\quad \dot{z}=e^{-\lambda t}g(x,\ p,\ q) \tag{3.4}$$

порожденных позиционной стратегией $p = U(t, x)$ и произвольными реализациями $q = q(t)$ из начальной позиции y_*

$$y_*=(x_*,\ z_*),\quad x(0)=x_*,\quad z(0)=z_*=0$$

Известно [14, 15], что функция цены $x\to w^0(x)$ непрерывна по Гёльдеру с константой Гёльдера ρ, зависящей только от константы Липшица L и коэффициента дисконтирования λ, и выполнено условие ограниченности на всем пространстве R^n с константой K/λ. Эти условия и свойства стабильности формируют необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция цены w^0. Свойства стабильности можно выразить в инфинитезимальной форме, используя конструкции негладкого анализа – производные по направлению и сопряженные производные.

В точках дифференцируемости функции цены w^0 соответствующие дифференциальные неравенства обращаются в стационарное уравнение ГЯ

$$-\lambda w^0 + H(x,\ \partial w^0 / \partial x) = 0, \quad x \in R^n \tag{3.5}$$

Функция $H(x, s)$: $R^n \times R^n \to R$ из уравнения (3.5) является гамильтонианом для задачи (3.1), (3.2) и связана с динамикой $f(x, p, q)$ и интегральной функцией $g(x, p, q)$ соотношением

$$H(x,\ s) = \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \{\langle s,\ f(x,\ p,\ q)\rangle + g(x,\ p,\ q)\} =$$

$$= \langle s,\ A(x)\rangle + \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \{\langle s,\ B(x)p + C(x)q\rangle + g(x,\ p,\ q)\} \tag{3.6}$$

Рассмотрим идеальную итерационную процедуру, в которой полагаем, что значения итерационных функций $u^i_\Delta(x)(i = 0,\ \ldots,\ m)$, аппроксимирующих функцию цены $w^0(x)$, строятся во всех точках $x \in R^n$:

$$u^0_\Delta(x) = 0,\ \ u^i_\Delta(x) = CUS(u^{i-1}_\Delta)(x),\ \ i = 0,\ \ldots,\ m,\ \ m = \theta / \Delta,\ \ x \in R^n \tag{3.7}$$

$$CUS(u^{i-1}_\Delta)(x) = \min_{y \in \overline{O}(x,\ K\Delta)} \varkappa_{i-1}(x,\ y)$$

$$\varkappa_{i-1}(x,\ y) = \min_{s \in D^*(G_{i-1}(y))} \{\Delta H(x,\ e^{-\lambda\Delta}s) + e^{-\lambda\Delta}G_{i-1}(y) - \langle e^{-\lambda\Delta}s,\ y - x\rangle\}$$

Здесь $G_{i-1}(y)$ – локальная вогнутая оболочка итерационной функции $u^{i-1}_\Delta(y)$, $y \in \overline{O}(x,\ r\Delta)$, $r > K$. Множество $D^*G_{i-1}(y)$ – супердифференциал локальной вогнутой оболочки $G_{i-1}(i = 0, ..., m)$ в точке $y \in \overline{O}(x,\ K\Delta)$.

Определим значение позиционного управления $U^* = U^*(x)$ в каждой точке $x \in R^n$ по принципу экстремального прицеливания в направлении суперградиента s^* локальной вогнутой оболочки G_m итерационной функции u^m_Δ

$$U^*(x) = \arg H(x,\ s^*) = \arg \min_{p \in P} \{\langle s^*,\ B(x)p\rangle + \max_{q \in Q} \{\langle s^*,\ C(x)q\rangle + g(x,\ p,\ q)\}\} \tag{3.8}$$

$$s^* = s^*(x,\ y^*) = \arg \varkappa_m(x,\ y^*),\ \ y^* = y^*(x) = \arg \min_{y \in \overline{O}(x,\ K\Delta)} \varkappa_m(x,\ y)$$

Значения итерационных функций u^m_Δ «не возрастают» вдоль траектории $x(\cdot)$, порожденной стратегией U^* (3.8) и произвольным возмущением $\tau \to q(\tau)$

$$x(\cdot) = \{x(t,\ x_0,\ U^*,\ q(\cdot)),\quad t \in [0,\ +\infty)\} \tag{3.9}$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta(A(x(t_i)) + B(x(t_i))U^* + C(x(t_i))q(t_i))$$

$$t_0 = 0,\ \ t_{i+1} = t_i + \Delta,\quad x(0) = x_0$$

что обеспечивает справедливость следующего результата.

Теорема 3.1. Для произвольного параметра точности $\varepsilon > 0$ можно указать шаг Δ и итерацию m, такие, что для любой начальной позиции $x_0 \in R^n$ и произвольных возмущений $t \to q(t)$ траектория $x(\cdot)$ (3.9), порожденная стратегией U^* (3.8), удовлетворяет оценкам

$$J(x(\cdot),\ U^*,\ q(\cdot)) < u^m_\Delta(x_0) + \varepsilon,\ |w^0(x_0) - u^m_\Delta(x_0)| < \varepsilon \tag{3.10}$$

Для аппроксимационной схемы с дискретизацией GS фазовых переменных

$$GS = \{x \in R^n : x = (m_1 e_1 + \ldots + m_n e_n)h\}$$

высокого порядка (2.14) и копирующей интерполяцией

$$U^*(y) = U^*(y_0), \quad \|y_0 - y\| = \min_{y_j \in GS} \|y_j - y\|$$

стратегии U^*, построенной в узлах сетки GS методом экстремального сдвига (3.8) на суперградиенты итерационной функции u_Δ^m, справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 3.2. Для произвольного параметра точности $\varepsilon > 0$, можно указать шаг Δ, сетку GS с высокой дискретизацией фазовых переменных (2.14) и итерацию m, такие, что для любой начальной позиции $x_0 \in R^n$ и произвольных возмущений $t \to q(t)$ траектория $x(\cdot)$ (3.9), порожденная стратегией U^* (3.8), удовлетворяет оценкам (3.10).

При выполнении условия квазивыпуклости (2.16) для итерационных функций u_Δ^m в сетках GS с «нормальной» линейной зависимостью (2.15) шагов h и Δ можно получить оптимальные свойства траекторий $x(\cdot)$, порожденных стратегией U^* (3.8) с линейной интерполяцией узловых значений $U^*(y_j)$:

$$U^*(y) = \sum \alpha_j U_j^*, \quad U_j^* = U^*(y_j), \quad y = \sum \alpha_j y_j, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad \sum \alpha_j = 1 \tag{3.11}$$

Теорема 3.3. Пусть для «нормальных» линейных сеток GS итерационные функции $u_\Delta^m(y)$ обладают свойствами квазивыпуклости (2.16). Тогда для всех начальных позиций x_0 и произвольных возмущений $\tau \to q(\tau)$ траектория $x(\cdot)$ (3.9), порожденная стратегией U^* (3.8) с линейной интерполяцией узловых значений (3.11), удовлетворяет оценкам

$$J(x(\theta), U^*, q(\cdot)) \leqslant u_\Delta^m(x_0) + \theta(\mu\Delta^b + e^{(L-\lambda)\theta}\Delta) + K\lambda^{-1}e^{-\lambda\theta} \leqslant u_\Delta^m(x_0) + B\Delta^{\rho b}, \quad \theta = m\Delta$$

$$|w^0(x_0) - u_\Delta^m(x_0)| \leqslant C\Delta^{\rho/2}, \quad (1 - \lambda\delta)^m \leqslant \Delta^{\rho/2}$$

Зафиксировав произвольное число $\varepsilon > 0$, можно указать шаг Δ, «нормальную» линейную сетку GS (2.15) и итерацию m, обеспечивающие оценки (3.10).

Авторы глубоко признательны своему учителю А.И. Субботину за внимание к работе, плодотворные обсуждения и поддержку.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96245, 96-01-00219, 97-01-00-161) и частично поддержана Международным институтом Прикладного системного анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
3. *Субботин А.И.* Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 293–297.
4. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
5. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. № 1. P. 1–42.
6. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Two approximations of solutions of Hamilton – Jacobi equations // Math. Comput. 1984. V. 43. № 167. P. 1–19.
7. *Tarasyev A.M.* Optimal control synthesis in grid approximation schemes // Interim Report. IR-97-012. NASA. Laxenburg, 1997. 46 p.

8. *Мельникова Н.В., Тарасьев А.М.* Синтез оптимального гарантированного управления в сеточных аппроксимационных схемах // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 570–583.
9. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhauser, 1995. 322 p.
10. *Гарнышева Г.Г., Субботин А.И.* Стратегии минимаксного прицеливания в направлении квазиградиента // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 5–11.
11. *Субботин А.И., Тарасьев А.М.* Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 559–564.
12. *Мельникова Н.В., Тарасьев А.М.* Градиенты локальных линейных оболочек в конечно-разностных операторах для уравнений Гамильтона – Якоби // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 422–431.
13. *Тарасьев А.М.* Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнений Гамильтона – Якоби // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 22–36.
14. *Адиатулина Р.А., Тарасьев А.М.* Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 531–537.
15. *Capuzzo Dolcetta I.* On a discrete approximation of Hamilton – Jacobi equation of dynamic programming // Appl. Math. Optimiz. 1983. V. 10. № 4. P. 367–377.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
26.XI.1997