УДК 531.36:62–50

© 1998 г. А.И. Короткий

ВОССТАНОВЛЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ДИНАМИКЕ СИСТЕМЫ

Рассматривается обратная задача динамики о восстановлении априори неизвестных управлений или параметров динамической системы по результатам наблюдения за движением этой системы в условиях неполной информации о реализующихся фазовых состояниях системы. Предполагается, что в соответствующие текущие моменты времени наблюдатель получает только некоторые информационные множества, содержащие текущие фазовые состояния системы. Известно, что эта задача некорректна. Построены конструктивные динамические регуляризирующие алгоритмы решения задачи, обладающие свойством физической осуществимости и способные работать в режиме реального времени, обрабатывая поступающую по ходу движения системы информацию и выдавая результат в динамике по мере развития движения.

В работе используются идеи метода позиционного управления в условиях неполной информации из теории дифференциальных игр [1–6], см. также [7–13]. В основе решения задачи лежит подход к обратным задачам динамики, предложенный ранее [14–17].

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую динамическую систему, поведение которой на заданном ограниченном отрезке времени $T = [t_0, \vartheta]$ $(-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty)$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta; \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m \tag{1.1}$$

Здесь $x(t)$ – вектор состояния системы в момент времени $t \in T$, $u(t)$ – вектор управляющих воздействий в этот момент времени. Значение $u(t)$ выбирается в пределах непустого компактного множества $P(t) \subset R^m$, компакты $P(t)$ изменяются непрерывно в метрике Хаусдорфа с изменением времени $t \in T$. Функция f непрерывна на $T \times R^n \times R^m$ и удовлетворяет обычным условиям (условию подлинейного роста и локальному условию Липшица по переменной x; см., например, [2, 18, 19]), обеспечивающим существование единственного абсолютно непрерывного на T решения $x(\cdot) = x(\,\cdot\,; t_0, x_0, u(\cdot))$ при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in T \times R^n$ и любом допустимом управлении $u(\cdot) \in U$. Непустое множество допустимых управлений U состоит из всех измеримых по Лебегу функций $u(\cdot) : T \ni t \to u(t) \in P(t)$. Решение $x(\cdot) = x(\,\cdot\,; t_0, x_0, u(\cdot))$ иногда будем называть движением динамической системы (1.1), порожденным управлением $u(\cdot)$ из начальной позиции (t_0, x_0).

Пусть задано какое-либо ограниченное множество начальных состояний $X_0 \subset R^n$ и пусть

$$X = \{x(\cdot) = x(\cdot\,; t_0, x_0, u(\cdot)) : x_0 \in X_0, u(\cdot) \in U\}$$

Для каждого возможного движения $x(\cdot) \in X$ через $U(x(\cdot))$ обозначим множество всех допустимых управлений, порождающих данное движение

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in U : x(\cdot) = x(\cdot\,; t_0, x_0, u(\cdot))\}$$

Для какого-либо многозначного отображения $G(\cdot) : T \to \mathrm{comp}(R^n)$, где $\mathrm{comp}(R^n)$ – множество всех непустых компактов из R^n, пусть $X[G(\cdot)]$ означает множество всех возможных движений системы (1.1), лежащих в отображении (в фазовых ограничениях) $G(\cdot)$

$$X[G(\cdot)] = \{x(\cdot) \in X : x(t) \in G(t),\ t \in T\}$$

$U[G(\cdot)]$ – множество всех управлений, порождающих движения из $X[G(\cdot)]$

$$U[G(\cdot)] = \cup\{U(x(\cdot)) : x(\cdot) \in X[G(\cdot)]\}$$

Перейдем к содержательному описанию задачи. Допустим, что за некоторым движением $x_*(\cdot) \in X$ системы (1.1) осуществляется наблюдение на промежутке времени T. По ходу процесса наблюдатель получает некоторую информацию, которая позволяет ему только оценивать некоторые множества $G(t)$ в фазовом пространстве системы, содержащие текущие состояния $x_*(t)$ движения $x_*(\cdot)$. Однако этой информации недостаточно ни для точного вычисления значения $x_*(t)$, ни для его удовлетворительного статистического описания в пределах этого информационного множества $G(t)$. Вопрос о том, как формируются множества $G(t)$ на основе того или иного способа наблюдения за системой и движением, оставим пока в стороне. Будем просто считать, что информация, поступающая наблюдателю к моменту времени $t \in T$, позволяет ему определить множество $G(t)$, причем у него нет возможности уточнить эти данные в момент времени t так, чтобы найти меньшее подмножество множества $G(t)$. Некоторые из таких способов наблюдения описаны, например, в [1, 4].

Множество $G(t)$ естественно трактовать как "идеальный" результат наблюдения. Этот результат практически, в силу неизбежных помех в канале наблюдения и измерений, недостижим. Реальным же результатом наблюдения следует считать некоторое "возмущенное" множество $Z(t) \in \mathrm{comp}(R^n)$, отличающееся от множества $G(t)$ на величину погрешности $h > 0$ по отношению к некоторому критерию погрешности наблюдения $\nu : \mathrm{comp}(R^n) \times \mathrm{comp}(R^n) \to R_+ = [0, \infty)$

$$\nu(Z(t), G(t)) \leqslant h, \quad t \in T$$

Функцию $G(\cdot) : T \ni t \to G(t) \in \mathrm{comp}(R^n)$ договоримся называть идеальным результатом наблюдения, а функцию $Z(\cdot) : T \ni t \to Z(t) \in \mathrm{comp}(R^n)$ назовем h-возмущением идеального результата наблюдения $G(\cdot)$.

Пусть задан некоторый критерий близости управлений $\rho : U \times U \to R_+$. Рассматриваемая задача предварительно может быть сформулирована следующим образом: построить алгоритм, который в динамике по h-возмущению $Z(\cdot)$ идеального результата наблюдения $G(\cdot)$ строит управление $u_h(\cdot) \in U$, являющееся при достаточно малом $h > 0$ достаточно близким по критерию ρ к одному из управлений множества $U(x_*(\cdot))$ или, в крайнем случае, множества $U[G(\cdot)]$. Предполагается, что наблюдателю, стремящемуся к решению сформулированной задачи восстановления, известна априорная информация о динамике системы (1.1) и множествах $P(t)$, $t \in T$.

Описанная задача восстановления представляет собой вариант постановки известной обратной задачи динамики для управляемых систем [20–23]. Особенность рассматриваемой здесь постановки состоит в следующем: во-первых, задачу требуется решить в условиях существенно неполной информации о реальных фазовых положениях динамической системы; во-вторых, искомый алгоритм должен работать в реальном времени и обладать свойством физической осуществимости; в-третьих, искомый алгоритм должен быть устойчивым по отношению к малым возмущениям идеального результата наблюдения.

Обсудим особенности постановки задачи и метода ее решения. Ясно, что неполнота информации существенно снижает возможности наблюдателя при восстановлении неизвестного управления. Поэтому для того, чтобы получить хоть какое-нибудь решение задачи, будем считать, что наблюдателю известен также какой-либо закон эволюции информационных множеств $G(t)$, $t \in T$. При решении задачи будем стремиться к такому методу ее решения, который осуществлял бы восстановление искомого управления в динамике, синхронно с развитием процесса во времени или, как еще иногда говорят, в темпе реального времени. Наблюдатель при восстановлении искомой величины может учитывать только ту информацию, которая поступила в соответствующий момент времени. Сам процесс восстановления должен быть одноразовым и его невозможно было бы повторить, не вернувшись во времени назад. Чтобы динамическое решение задачи имело практическую ценность, соответствующие разрешающие операции надлежит строить в классе операций со свойством физической осуществимости, которое иногда еще называют свойством наследственности или свойством причинности: результаты операций (входы) совпадают во времени до тех пор, пока совпадают во времени аргументы (входы) [2, 18, 19].

Соответствующие мотивировки и различные примеры содержательных задач, в которых важно получить динамическое решение обратной задачи, приведены, например, в [14, 17, 24]. При наличии помех в канале наблюдения рассматриваемая задача может оказаться некорректной, поэтому соответствующая разрешающая операция должна обладать также регуляризирующими свойствами [25–27]. В расчете на возможность практического решения задачи с помощью ЭВМ, будем стремиться к ее решению в дискретной по времени схеме.

Уточним постановку задачи. Рассматривая поступившую при наблюдении информацию $G(\cdot)$ апостериори, наблюдатель вынужден будет заключить, что в принципе с этой информацией может согласовываться любое управление из множества $U[G(\cdot)]$, поскольку каждое управление $u(\cdot)$ из этого множества при некотором начальном состоянии $x_0 \in G(t_0)$ породит движение системы $x(\cdot) = x(\cdot\,; t_0, x_0, u(\cdot))$, удовлетворяющее включению $x(t) \in G(t)$, $t \in T$. Реальное управление $u_*(\cdot)$, порождающее движение $x_*(\cdot)$, необходимо принадлежит множеству $U(x_*(\cdot))$ и тем более множеству $U[G(\cdot)]$, но, вообще говоря, угадать, какое из управлений множества $U[G(\cdot)]$ и тем более множества $U(x_*(\cdot))$ есть $u_*(\cdot)$, наблюдатель не сможет, даже если информация $G(\cdot)$ будет точной. Движение $x_*(\cdot)$ апостериори, вообще говоря, не будет известно, вся информация о нем к концу отрезка времени T исчерпывается (при отсутствии погрешностей) только лишь наблюдением $G(\cdot)$. Поэтому каждое из движений $x(\cdot) \in X[G(\cdot)]$ с равным основанием можно отнести к реальному движению.

Всякое управление $u(\cdot) \in U[G(\cdot)]$, таким образом, с одинаковыми шансами апостериори можно отнести к реальному; в то же время всякое управление, выходящее за пределы множества $U[G(\cdot)]$, заведомо не может быть реальным. Иначе говоря, $U[G(\cdot)]$ имеет смысл множества тех и только тех управлений, которые апостериори не исключимы в качестве реального. Управления из этого множества естественно и пытаться найти в первую очередь. При какой-либо дополнительной информации о поведении множеств $G(t)$, $t \in T$ можно пытаться найти управления и из множества $U(x_*(\cdot))$.

Пусть на U задан некоторый критерий отбора управлений, определяемый функционалом $\omega : U \to R$, и $U_*[G(\cdot)]$ – подмножество множества $U[G(\cdot)]$, состоящее из элементов, удовлетворяющих этому критерию

$$U_*[G(\cdot)] = \{u(\cdot) \in U[G(\cdot)] : \omega(u(\cdot)) \leqslant \omega_*\}$$

ω_* – некоторое заданное фиксированное число. Пусть $\Xi[h, G(\cdot)]$ – множество всех многозначных отображений $T \to \mathrm{comp}(R^n)$, которые могут претендовать на роль h-возмущения идеального результата наблюдения $G(\cdot)$

$$\Xi[h, G(\cdot)] = \{Z(\cdot) \in (T \to \mathrm{comp}(R^n)) : \nu(Z(t), G(t)) \leqslant h, \quad t \in T\}$$

При наличии помех в канале наблюдения, наблюдатель фактически может получить в качестве h-возмущения идеального результата наблюдения любой из элементов множества $\Xi[h, G(\cdot)]$. Поэтому естественно, чтобы метод или алгоритм восстановления был рассчитан на восприятие любого элемента из $\Xi[h, G(\cdot)]$.

Простейшие примеры показывают, что рассматриваемая задача может оказаться неустойчивой по отношению к малым возмущениям множеств $G(t)$, $t \in T$. Поэтому алгоритм восстановления должен быть устойчивым, т.е. результат работы алгоритма должен быть сколь угодно близким к какому-либо элементу множества $U_*[G(\cdot)]$ или к самому этому множеству по критерию близости управлений ρ при достаточно малом h каково бы ни было при этом h-возмущение $Z(\cdot) \in \Xi[h, G(\cdot)]$.

Свойство физической осуществимости алгоритма восстановления (или, что то же самое, соответствующего оператора $D : R_+ \times (T \to \mathrm{comp}(R^n)) \to U$) означает следующее: $u_1(t) = u_2(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$, если только $u_1(\cdot) = D(h, Z_1(\cdot))$, $u_2(\cdot) = D(h, Z_2(\cdot))$, $h > 0$, $Z_1(t) = Z_2(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta$. Указанным свойством заведомо обладает всякий алгоритм (оператор) D, который свои значения вычисляет позиционным способом, т.е. $u(t)$ для $t \in T$ определяется по t, $Z(t)$ и, возможно, по некоторым вспомогательным внутренним переменным.

Задачу восстановления теперь можно сформулировать так: требуется построить оператор $D : R_+ \times (T \to \mathrm{comp}(R^n)) \to U$, обладающий свойством физической осуществимости и такой, что для любого фиксированного $G(\cdot) \in M \subseteq (T \to \mathrm{comp}(R^n))$ выполняется условие

$$\sup\{\rho(D(h, Z(\cdot)), U_*[G(\cdot)]) : Z(\cdot) \in \Xi[h, G(\cdot)]\} \to 0, \quad h \to 0$$

где M – некоторое множество возможных идеальных результатов наблюдений, которые подлежат соответствующей обработке, и

$$\rho(D(h, Z(\cdot)), U_*[G(\cdot)]) = \inf\{\rho(D(h, Z(\cdot)), u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_*[G(\cdot)]\}$$

Элемент $u_h(\cdot) = D(h, Z(\cdot))$ может быть принят в качестве близкого к некоторому элементу априори неизвестного множества управлений $U_*[G(\cdot)]$. Для построения алгоритма восстановления D будем искать подходящую позиционную стратегию V управления некоторой вспомогательной системой-моделью. Реализация стратегии V и будет принята в качестве значения алгоритма D. Система-модель должна быть в некотором смысле близка к исходной системе, а стратегия V должна быть такой, чтобы порождаемые ею движения системы-модели отслеживали в определенном смысле эволюцию информационных множеств. В следующем разделе уточним все эти понятия и неформально опишем метод решения задачи восстановления.

2. Решение задачи. Введем в рассмотрение систему-модель, которая, для простоты, представляет собой копию исходной системы

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), v(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{2.1}$$

Управляющие воздействия здесь стеснены условием $v(t) \in P(t)$, $t \in T$.

Позиционную стратегию V управления моделью отождествим с отображением $T \times T \times R^n \times \mathrm{comp}(R^n) \to \Sigma$, где Σ – множество всех сужений функций из U на всевозможные полуинтервалы $[t, s) \subset T$, $\Sigma = \cup\{U[t, s) : [t, s) \subset T\}$, $U[t, s)$ – множество всех измеримых по Лебегу функций $u(\cdot) : [t, s) \ni t \to u(t) \in P(t)$. Для произвольных $t \in T$, $s \in T$, $y \in R^n$, $Y \in \mathrm{comp}(R^n)$ положим: $V(t, s, y, Y)$ – произвольный элемент U, если $t \geqslant s$ или $y \in Y$; если $t < s$ и $y \notin Y$, то $V(t, s, y, Y)$ – любой из элементов $v(\cdot) \in U[t, s)$, удовлетворяющий условию

$$\left\langle y - z, \int_t^s f(\tau, y, v(\tau))d\tau \right\rangle \leqslant \inf\left\{\left\langle y - z, \int_t^s f(\tau, y, w(\tau))d\tau \right\rangle : w(\cdot) \in U[t, s)\right\} + (s - t)^2$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в R^n, z – любой из векторов множества Y, ближайший в евклидовой метрике к вектору y. Указанная стратегия является аналогом известной экстремальной стратегии из теории дифференциальных игр [1–5, 19].

Отображение $G(\cdot) : T \to \mathrm{comp}(R^n)$ назовем стабильным в силу системы (2.1), если для любых $t_1 \in T$, $t_2 \in T$, $t_1 < t_2$, $y_1 \in G(t_1)$ существует управление $w(\cdot) \in U[t_1, t_2)$, такое, что решение $y(\cdot) = y(\,\cdot\,; t_1, y_1, w(\cdot))$ задачи Коши $\dot{y}(t) = f(t, y(t), w(t))$, $y(t_1) = y_1$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ будет удовлетворять условию $y(t_2) \in G(t_2)$. Множество S всех стабильных в силу системы (2.1) отображений непусто. Пусть S_0 – подмножество множества S, для каждого элемента $G(\cdot)$ которого найдется число $C > 0$ такое, что для любых $h > 0$, $t \in T$, $y \in R^n$, $Z(\cdot) \in \Xi[h, G(\cdot)]$, $y_1 \in Q(y, G(t))$, $y_2 \in Q(y, Z(t))$ выполняется неравенство $\| y_1 - y_2 \| \leqslant Ch$, где $\| \cdot \|$ – евклидова норма в R^n, $Q(y, \Omega)$ – множество элементов компакта $\Omega \subset R^n$, ближайших в евклидовой метрике к элементу $y \in R^n$. Множество S_0 непусто.

Перейдем к описанию алгоритма восстановления. Зафиксируем произвольные $h > 0$, $G(\cdot) \in (T \to \mathrm{comp}(R^n))$, $Z(\cdot) \in \Xi[h, G(\cdot)]$, разбиение Δ отрезка T точками t_i, $t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \vartheta$, зависимость $m = m(h)$ и число $C_* > 0$, такие, что

$$\mathrm{diam}\,\Delta = \max\{t_{i+1} - t_i : i = 0, \ldots, m-1\} \leqslant C_* h$$

Рассмотрим управление $u_h(\cdot) \in U$, сформированное по правилу

$$u_h(t) = v_i(t), \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}, \quad v_i(\cdot) = V(t_i, t_{i+1}, y(t_i), Z(t_i))$$

где $y(t_i)$ – состояние модели в момент времени t_i, $i = 0, \ldots, m-1$. Переход от одного состояния модели к другому осуществляется в соответствии с дифференциальным уравнением движения модели

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tau, y(\tau), v_i(\tau))\,d\tau$$

$y(t_0) = y_0$ – произвольное фиксированное начальное состояние модели из множества $Z(t_0)$.

Определим оператор (алгоритм) D по правилу

$$D(h, Z(\cdot)) = u_h(\cdot) \tag{2.2}$$

Опишем работу этого алгоритма во времени. До момента времени t_0, в зависимости от уровня погрешности h, выбирается и фиксируется разбиение Δ отрезка T, удовлетворяющее условию $\mathrm{diam}\,\Delta \leqslant C_* h$. Каждая точка t_i, с помощью которой осуществляется разбиение Δ, будет началом очередного шага вычислений нового состояния модели и новой реализации стратегии V. В момент t_0 наблюдателю поступает информационное множество $Z(t_0)$, из которого он выбирает и фиксирует какое-нибудь начальное состояние y_0 для модели. Далее вычисляются реализация $v_0(\cdot) = V(t_0, t_1, y_0, Z(t_0))$ стратегии V на промежутке $t_0 \leqslant t < t_1$ и состояние $y(t_1)$ модели для момента времени t_1. В момент времени t_1 наблюдателю поступает информационное множество $Z(t_1)$, которое вместе с состоянием модели $y(t_1)$ используется для нахождения реализации $v_1(\cdot) = V(t_1, t_2, y(t_1), Z(t_1))$ стратегии V на промежутке $t_1 \leqslant t < t_2$ и состояния $y(t_2)$ модели для момента времени t_2. На следующих промежутках по поступлении наблюдателю новых информационных множеств строятся соответствующие новые реализации стратегии и состояния модели по аналогии с тем, как они строились на предыдущем шаге. К конечному моменту времени ϑ будет в динамике сформирована реализация алгоритма $u_h(\cdot)$, которая и принимается за приближение к искомым управлениям. Из описания работы алгоритма во времени видна также возможность его реализации в режиме реального времени. Переменная состояния модели может рассматриваться как внутренняя переменная алгоритма, значения этой переменной физически вполне могут быть автономно реализованы на ЭВМ.

Укажем теперь некоторые условия, при которых построенный алгоритм заведомо доставляет решение задаче восстановления.

Условие 1: *а*) ν – метрика Хаусдорфа на comp(R^n); *б*) (U, ρ) – компактное метрическое пространство; *в*) $\omega_* > \sup\{\omega(u(\cdot)) : u(\cdot) \in U\}$; *г*) $M = S_0$; *д*) если $\rho(u_k(\cdot), u(\cdot)) \to 0$, то $x(\,\cdot\,; t_0, x_0, u_k(\cdot)) \to x(\,\cdot\,; t_0, x_0, u(\cdot))$ в $C(T; R^n)$.

Прокомментируем это условие. Метрика Хаусдорфа часто используется для оценки расстояния между компактами [1–6, 18, 19, 28, 29]. Пространство (U, ρ) является компактным, например, когда U – слабо компактное множество в $L^p(T; R^m)$, $1 < p < \infty$, а ρ – так называемая "слабая" метрика на U [18]. Условие 1*в* в данном случае фактически исключает из задачи дополнительный отбор управлений, ибо в этом случае $U_*[G(\cdot)] = U[G(\cdot)]$. Однако дополнительный отбор управлений будет по существу в одной конкретизации рассматриваемой задачи, которая будет обсуждаться ниже. Условие $M = S_0$ вызвано желанием использовать для решения обратной задачи динамики устойчивые экстремальные конструкции из теории позиционного управления [1–5, 19]. Последнее свойство из условия заведомо выполняется, например, для линейных систем или нелинейных систем с правой частью вида $f = f_1(t, x)u + f_2(t, x)$.

Теорема 1. При выполнении условия 1 динамический алгоритм (2.2) доставляет решение задаче восстановления.

Доказательство. Свойство физической осуществимости динамического алгоритма (2.2) вытекает из позиционности стратегии V. Для доказательства теоремы достаточно теперь показать, что каков бы ни был элемент $G(\cdot) \in M$ и каковы бы ни были последовательности $\{h_k\}$ ($h_k > 0$, $h_k \to 0$), $\{Z_k(\cdot)\}$ ($Z_k(\cdot) \in \Xi[h_k, G(\cdot)]$) для управлений $u_k(\cdot) = D(h_k, Z_k(\cdot))$ будет иметь место сходимость $\rho(u_k(\cdot), U_*[G(\cdot)]) \to 0$ при $k \to \infty$. Принимая во внимание определение стратегии V и правило формирования управления $u_k(\cdot)$, можно получить следующую оценку для рассогласования $\varepsilon_k[t] = \min\{\| y(t; t_0, y_0, u_k(\cdot)) - g \|^2 : g \in G(t)\}$:

$$\max\{\varepsilon_k[t] : t \in T\} \leqslant C_0 h_k$$

где C_0 – некоторое положительное число, которое не зависит от номера k и определяется только по априори известным данным о задаче. Отсюда следует, что $\varepsilon_k[t] \to 0$ при $k \to \infty$ для каждого $t \in T$. Учитывая компактность пространства (U, ρ), не нарушая общности рассуждений, можно считать, что для некоторого управления $u_0(\cdot) \in U$ имеет место сходимость $\rho(u_k(\cdot), u_0(\cdot)) \to 0$. Тогда $y(\,\cdot\,; t_0, y_0, u_k(\cdot)) \to y(\,\cdot\,; t_0, y_0, u_0(\cdot))$ в $C(T; R^n)$ и в силу замкнутости множеств $G(t)$, $t \in T$ имеем $y(t; t_0, y_0, u_0(\cdot)) \in G(t)$ при каждом $t \in T$. Отсюда следует, что $u_0(\cdot) \in U_*[G(\cdot)] = U[G(\cdot)]$, и, стало быть, $\rho(u_k(\cdot), U_*[G(\cdot)]) \to 0$. Теорема доказана.

3. Конкретизация задачи. Рассмотрим следующий вариант задачи восстановления. Пусть управляемая система (1.1) линейна

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + F(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{3.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ – матрицы размерностей $n \times n$, $n \times m$, $n \times 1$ соответственно с непрерывными на T элементами; множества $P(t)$ – выпуклые компакты в R^m, непрерывно зависящие от $t \in T$.

Отметим, что динамика выпуклых компактных сечений $X(t) = \{x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) : x_0 \in X_0\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, пучка движений $X(\,\cdot\,; t_0, x_0, u(\cdot)) = \{x(\,\cdot\,; t_0, x_0, u(\cdot)) : x_0 \in X_0\}$ системы (3.1), вышедшего в момент времени t_0 из выпуклого компакта X_0 под управлением $u(\cdot)$, описывается с помощью опорных функций равенством

$$\sigma(l, K(\vartheta, t)X(t)) = \sigma(l; K(\vartheta, t_0)X(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \langle K(\vartheta, \tau)[B(\tau)u(\tau) + F(\tau)], l \rangle d\tau$$

где $K(\cdot\,,\cdot)$ – матрица Коши линейной системы (3.1)

$$\partial K(t,\tau)/\partial t = A(t)K(t,\tau), \quad K(\tau,\tau) = E$$

E – единичная матрица, $\sigma(l;\, W) = \sup\{\langle l, w \rangle : w \in W\}$ – опорная функция множества $W \subset R^n, l \in L = \{l \in R^n : \| l \| \leqslant 1\}$.

Оговорим характер изменения информационных множеств $G(t)$ со временем в данной конкретизации. Примем, что, каковы бы ни были моменты времени $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \leqslant t_2$, найдется некоторая допустимая реализация управляющего воздействия $u(\cdot) \in U[t_1, t_2)$, под действием которого каждая точка множества $G(t_2)$ может быть получена переходом в силу системы (3.1) из некоторой точки множества $G(t_1)$; другими словами,

$$G(t_2) \subseteq X(t_2;t_1,G(t_1),u(\cdot)) = \{x(t_2;t_1,x_1,u(\cdot)) : x_1 \in G(t_1)\}$$

При таком характере эволюции информационных множеств можно считать, что множество $G(t)$ представляет собой сечение в момент времени t некоторого пучка движений системы, вышедшего в момент времени t_0 из некоторого множества $G^*(t) \subseteq G(t_0)$ под действием некоторого допустимого управления. Ясно, что $G^*(t_0) = G(t_0)$ и $G^*(t_2) \subseteq G^*(t_1)$ при $t_2 \geqslant t_1$. Пусть отображение $\Gamma : T \times \mathrm{sub}(R^n) \to \mathrm{sub}(R^n)$, где $\mathrm{sub}(R^n)$ – множество всех непустых подмножеств множества R^n, определяет закон, согласно которому осуществляется уточнение со временем множества начальных состояний. Закон Γ должен удовлетворять естественным условиям $\Gamma(t_0, N) = N$ и $\Gamma(t_2, N) \subseteq \Gamma(t_1, N)$ при $t_2 \geqslant t_1$. Динамику информационных множеств можно представить в виде

$$K(\vartheta,t)G(t) = \Gamma(t, K(\vartheta,t_0)G(t_0)) + \int_{t_0}^{t} K(\vartheta,\tau)[B(\tau)u(\tau) + F(\tau)]d\tau$$

Далее будем рассматривать только компактные и выпуклые информационные множества. Множество всех непустых выпуклых компактов из R^n обозначим $\mathrm{cconv}(R^n)$. Выпуклый компакт полностью характеризуется своей опорной функцией. Множество всех отображений $G(\cdot) : T \to \mathrm{cconv}(R^n)$, эволюция во времени которых удовлетворяет описанным выше условиям, а закон Γ уточнения начальных данных удовлетворяет условию Липшица по второй переменной относительно критерия ν, обозначим S_1. Это множество непусто.

Для каждого идеального результата наблюдения $G(\cdot) \in S_1$ естественно рассмотреть множество допустимых управлений $U^0[G(\cdot)] \subseteq U$, каждое из которых в паре с каким-нибудь допустимым законом уточнения начальных данных порождает данное наблюдение $G(\cdot)$. Ясно, что $U^0[G(\cdot)] \subseteq U[G(\cdot)]$. Однако, найти какое-нибудь управление из $U^0[G(\cdot)]$ – это нечто большее, чем найти какое-нибудь управление из $U[G(\cdot)]$, ибо каждое управление из $U^0[G(\cdot)]$ порождает некоторый пучок движений, выходящий в момент t_0 из некоторого выпуклого подкомпакта выпуклого компакта $G(t_0)$ и содержащийся внутри ограничений $G(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, и, стало быть, обладает некоторой универсальностью по начальным данным. Управления из $U^0[G(\cdot)]$ и будем стремиться найти.

Введем в рассмотрение систему-модель, которая представляет собой копию исходной системы (3.1). Вектор управляющих воздействий в модели удовлетворяет таким же ограничениям, как и в исходной системе. С помощью системы-модели будем строить подходящие пучки движений. Позиционную стратегию V управления моделью отождествим с отображением $T \times T \times \mathrm{cconv}(R^n) \times \mathrm{cconv}(R^n) \to \Sigma$. Для произвольных $t \in T$, $s \in T$, $Y_1 \in \mathrm{cconv}(R^n)$, $Y_2 \in \mathrm{cconv}(R^n)$ положим: $V(t, s, Y_1, Y_2)$ – произвольный элемент U, если $t \geqslant s$; если $t < s$, то $V(t, s, Y_1, Y_2)$ – тот единственный элемент $v(\cdot) \in$

$\in U[t, s)$, который доставляет минимум на $U[t, s)$ квадратичному функционалу

$$H(v) = 2\langle\langle \sigma(l; K(\vartheta, t_1)Y_1) - \sigma(l; K(\vartheta, t_1)Y_2), \int_t^s \langle K(\vartheta, \tau)B(\tau)v(\tau), l\rangle d\tau\rangle\rangle + \alpha(h)\int_t^s \|v(\tau)\|^2 d\tau$$

где $\langle\langle \cdot , \cdot \rangle\rangle$ – скалярное произведение в $L^2(L; R)$ ($\| \cdot \|_*$ – норма в этом пространстве), $\alpha(\cdot)$ – какая-нибудь положительная функция на R_+, удовлетворяющая условию $\alpha(h) \to 0$, $h/\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Опишем алгоритм восстановления, предполагая, что наблюдателю известен закон уточнения начальных данных. Зафиксируем произвольные $G(\cdot) \in S_1$, $h > 0$, $Z(\cdot) \in \Xi[h, G(\cdot)]$, разбиение Δ отрезка T с diam $\Delta \leqslant C_* h$. Рассмотрим управление $u_h(\cdot) \in U$, сформированное по правилу

$$u_h(t) = v_i(t), \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}, \quad v_i(\cdot) = V(t_i, t_{i+1}, Z(t_i), Y(t_i))$$

где $i = 0, ..., m-1$, $Y(t_i)$ – сечение пучка движений модели в момент t_i,

$$K(\vartheta, t_i)Y(t_i) = \Gamma(t_i, K(\vartheta, t_0)Z(t_0)) + \int_{t_0}^{t_i} K(\vartheta, \tau)[B(\tau)u_h(\tau) + F(\tau)]d\tau$$

Определим оператор (алгоритм) D_1 по правилу

$$D_1(h, Z(\cdot)) = u_h(\cdot) \tag{3.2}$$

Работа этого алгоритма во времени аналогична работе подобного алгоритма из раздела 2.

Укажем некоторые условия, при которых алгоритм (3.2) заведомо доставляет решение рассматриваемой задачи восстановления управлений из множества $U^0[G(\cdot)]$ для $G(\cdot) \in S_1$.

Условие 2: *а*) ν – метрика на cconv(R^n), определяемая равенством $\nu(N_1, N_2) = \| \sigma(\cdot\,; N_1) - \sigma(\cdot\,; N_2) \|_*$; *б*) ρ – метрика пространства $L^p(T; R^m)$, $1 \leqslant p < \infty$; *в*) ω – норма пространства $L^2(T, R^m)$ и $\omega_* = \inf\{\omega(u(\cdot)) : u(\cdot) \in U^0[G(\cdot)]\}$; *г*) $M = S_1$; *д*) наблюдателю известен закон уточнения начальных данных для каждого наблюдаемого процесса.

Теорема 2. При выполнении условия 2 динамический алгоритм (3.2) доставляет решение задаче восстановления: для любого фиксированного $G(\cdot) \in M$ выполняется условие

$$\sup\{\rho(D_1(h, Z(\cdot)), U_*[G(\cdot)]) : Z(\cdot) \in \Xi[h, G(\cdot)]\} \to 0, \quad h \to 0$$

где $U_*[G(\cdot)] = \{u(\cdot) \in U^0[G(\cdot)] : \omega(u(\cdot)) \leqslant \omega_*\}$.

Доказательство. Свойство физической осуществимости динамического алгоритма (3.2) вытекает из позиционности стратегии V. Утверждение теоремы теперь будет следовать из того, что при каждом фиксированном $G(\cdot) \in M$ при любых последовательностях $\{h_k\} \subset R_+(h_k \to 0)$, $\{Z_k(\cdot)\}$ ($Z_k(\cdot) \in \Xi[h_k, G(\cdot)]$) для управлений $u_k(\cdot) = D_1(h_k, Z_k(\cdot))$ будет иметь место сходимость $\rho(u_k(\cdot), u_0(\cdot)) \to 0$ при $k \to \infty$, где $u_0(\cdot)$ – тот единственный элемент, из которого состоит множество $U_*[G(\cdot)]$. Отметим, что множество $U^0[G(\cdot)]$ может состоять, вообще говоря, из нескольких элементов и является выпуклым ограниченным и замкнутым в $L^2(T; R^m)$. Поэтому после отбора элементов по критерию ω во множестве $U_*[G(\cdot)]$ должен остаться только один элемент множества $U^0[G(\cdot)]$ с минимальной $L^2(T; R^m)$-нормой.

Принимая во внимание правило формирования управления $u_k(\cdot)$, можно получить следующую оценку для функционала Λ_k:

$$\max\{\Lambda_k[t] : t \in T\} \leqslant C_0 h_k$$

где C_0 – некоторое положительное число, которое не зависит от номера k и определяется только по априори известным данным о задаче

$$\Lambda_k[t] = \|\sigma(\cdot; K(\vartheta,t)Y_k(t)) - \sigma(\cdot; K(\vartheta,t)G(t))\|_*^2 + \alpha(h)\int_{t_0}^{t}[\|u_k(\tau)\|^2 - \|u_0(\tau)\|^2]d\tau$$

Из указанной оценки функционала Λ_k следуют две оценки

$$\max\{\|\sigma(\cdot; K(\vartheta,t)Y_k(t)) - \sigma(\cdot; K(\vartheta,t)G(t))\|_*^2 : t \in T\} \leqslant C_0 h_k + 2\alpha(h)b(\vartheta - t_0)$$

$$(b = \sup\{\|w\|^2 : w \in P(t),\ t \in T\} < \infty)$$

$$\omega(u_k(\cdot)) \leqslant \omega(u_0(\cdot)) + C_0 h_k / \alpha(h_k)$$

Из последних оценок следует, что $\omega(u_k(\cdot)) \to \omega(u_0(\cdot))$ и $u_k(\cdot) \to u_0(\cdot)$ слабо в $L^2(T; R^m)$. Поэтому $u_k(\cdot) \to u_0(\cdot)$ сильно в $L^2(T; R^m)$. В силу ограниченности множества U в $L^\infty(T; R^m)$ имеет место также сходимость $u_k(\cdot) \to u_0(\cdot)$ сильно в $L^p(T; R^m)$, $1 \leqslant p < \infty$. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00846, 96-15-96116).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* К теории дифференциальных игр с неполной информацией // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215. № 4. С. 780–783.
4. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
5. *Кряжимский А.В.* Альтернатива в линейной игре сближения–уклонения с неполной информацией // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. № 4. С. 773–776.
6. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
7. *Меликян А.А., Черноусько Ф.Л.* Некоторые минимаксные задачи управления с неполной информацией // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 952–961.
8. *Никольский М.С.* Об одной задаче преследования с неполной информацией // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1971. № 5. С. 10–13.
9. *Пацко В.С.* Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 3. С. 424–435.
10. *Никонов О.И.* Игровое уклонение по неполным данным // Задачи управления с неполной информацией. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1976. С. 100–108.
11. *Филиппов С.Д.* О разрешимости некоторых задач сближения и уклонения в условиях неполной информации // Игровые задачи управления. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1977. С. 100–113.
12. *Зеликин М.И.* Об одной дифференциальной игре с неполной информацией // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 5. С. 998–1000.
13. *Пак В.Е.* Задача наведения с неполной информацией // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1976. № 4. С. 29–36.
14. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions. Amsterdam: Gordon & Breach, 1995. 625 p.
15. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
16. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.* О динамическом решении операторных уравнений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 3. С. 552–556.
17. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.* О моделировании параметров динамических систем //

Задачи управления и моделирования в динамических системах. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1984. С. 47–68.
18. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
19. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
20. *Brockett R.W., Mesarovich M.P.* The reproducibility of multivariable systems // J. Math. Anal. and Appl. 1965. V. 11. № 1. P. 548–563.
21. *Silverman L.M.* Inversion of multivariable linear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1969. V. 14. № 3. P. 270–276.
22. *Петров Б.Н., Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 5. С. 149–155.
23. *Гусев М.И., Куржанский А.Б.* Обратные задачи динамики управляемых систем // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 187–195.
24. *Короткий А.И.* Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 101–124.
25. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
26. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
27. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
28. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
29. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 468 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
9.IX.1997