

УДК 531.36:62–50

© 1998 г. Р. Габасов, А.В. Лубочкин

**СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ОПТИМАЛЬНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ  
ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ**

Описывается метод реализации ограниченной обратной связи, стабилизирующей линейную динамическую систему. В основу метода положена реализация позиционного решения специальной вспомогательной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с помощью оптимального регулятора. Доказывается стабилизирующее свойство оптимального управления типа обратной связи вспомогательной задачи. Результаты иллюстрируются на известной задаче стабилизации инерционными управлениями маятника в верхнем, неустойчивом положении.

Было установлено [1, 2], что оптимальное управление (ОУ) типа обратной связи (ОС) для линейно-квадратичной задачи (ЛКЗ) об аналитическом конструировании регуляторов с бесконечным горизонтом является стабилизирующей ОС. Простота синтеза ОУ для ЛКЗ с конечным горизонтом позволила предложить использовать эти решения для стабилизации нестационарных линейных систем [3, 4]. Оказалось, что стабилизирующими свойствами обладают и управления, минимизирующие квадратичные функционалы на траекториях нелинейных систем [5]. Принципиальное отличие работ [3–5] состоит в том, что если в [3, 4] в качестве стабилизирующих управлений предлагалось использовать известные решения ЛКЗ с конечным горизонтом, то в [5] доказаны лишь стабилизирующие свойства ОС без указания какого-либо метода построения стабилизирующего управления.

Основной результат данной работы состоит в обосновании одного принципа построения стабилизирующих ОС, в методе реализации стабилизаторов, построенных на этом принципе, и в выяснении случаев, когда принцип скользящего управления обеспечивает асимптотическую устойчивость терминального множества. Можно заметить некоторые аналогии между теоремами обращения в теории устойчивости, гарантирующими существование функций Ляпунова, и фактическими методами построения таких функций. Приведенный в работе результат можно трактовать как конструктивный метод построения функций Ляпунова с помощью теории ОУ. При этом упор делается не на получение явных выражений для указанных функций, а на возможность эффективного использования их неявных выражений путем соответствующих вычислений на ЭВМ. В таком подходе решающую роль играют построения в темпе реального времени, что представляется естественным при исследовании реальных процессов.

В силу специфики используемых задач ОУ при решении проблем стабилизации не учитывались [1–5] прямые (геометрические) ограничения на управление. Последние учитывались в методах стабилизации [6, 7], в основу которых были положены специальные линейные задачи ОУ и метод реализации оптимальной ОС с помощью регуляторов [8, 9].

Цель настоящей работы – описать метод стабилизации линейных динамических систем с помощью регуляторов (стабилизаторов), реализующих оптимальную ОС в специальной ЛКЗ ОУ. Принципиальное отличие от принятого ранее подхода [1–5], где также использовались ЛКЗ ОУ, состоит в том, что здесь учитываются прямые (геометрические) ограничения на управление.

**1. Постановка задачи.** Пусть поведение динамической системы с управлением на промежутке  $t \geq 0$  описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0 \neq 0 \tag{1.1}$$

$$(x \in R^n, u \in R; \text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n)$$

где  $x = x(t)$  – состояние системы в момент времени  $t$ ;  $u = u(t)$  – значение управляющего воздействия;  $A, b$  – постоянные матрица и вектор соответствующих размеров.

Будем считать, что при выключенном управлении ( $u(t) \equiv 0, t \geq 0$ ) система неустойчива. Классическая проблема стабилизации состоит, как известно, в том, чтобы найти такую ОС  $u = u(x), x \in R^n (u(0) = 0)$ , что замкнутая ею система (1.1)

$$\dot{x} = Ax + bu(x), \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

обладает следующими свойствами:

1) в окрестности состояния равновесия  $x = 0$  имеет продолжаемые на  $t \geq 0$  решения;

2) ее нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Во многих приложениях из-за технических требований допустимы лишь ограниченные управления. В связи с этим в современных постановках задач стабилизации на стабилизирующие управления налагают дополнительные прямые ограничения:  $|u(x)| \leq L (0 < L < \infty)$ .

С учетом этого ограничения ниже исследуется задача построения стабилизирующей обратной связи (СОС) следующего типа. Пусть  $G \subset R^n$  – некоторая окрестность состояния равновесия  $x = 0$  системы (1.1);  $L, 0 < L < \infty$  – заданное число. Функцию

$$u(x), \quad x \in G \quad (u(0) = 0) \quad (1.3)$$

назовем (ограниченной) СОС для динамической системы (1.1), если

1) функция (1.3) удовлетворяет ограничению

$$|u(x)| \leq L, \quad x \in G \quad (1.4)$$

2) замкнутая система (1.2) имеет решение  $x(t), t \geq 0$ , для всех  $x_0 \in G$ ;

3) система (1.2) асимптотически устойчива в  $G$ .

Как известно, ограничения (1.4) типичны в современной теории ОУ. Поэтому естественно для построения искомой СОС попытаться привлечь методы ОУ. С этой целью в разд. 2 вводится специальная задача ОУ, с помощью которой в дальнейшем будет построена СОС.

**2. Сопровождающая задача оптимального управления.** Выберем параметр метода  $\theta, 0 < \theta < \infty$ , и рассмотрим следующую ЛКЗ ОУ:

$$V(z) = \min \int_0^\theta \frac{1}{2} u^2(t) dt \quad (2.1)$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z \quad (2.2)$$

$$x(\theta) = 0 \quad (2.3)$$

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in T = [0, \theta] \quad (2.4)$$

Задача (2.1)–(2.4) отличается от задач, использованных в [1–5] для целей стабилизации прежде всего наличием прямого ограничения (2.4) на управление. Такое ограничение учитывалось [6, 7], но сопровождающие задачи ОУ были линейными.

Кусочно-непрерывную функцию  $u(t) = u(t | z)$  (всюду далее в разд. 2,3, если не оговорено противное,  $t \in T$ ) назовем допустимым (программным) управлением задачи (2.1)–(2.4), если она удовлетворяет прямому ограничению (2.4), а соответствующая ей траектория  $x(t) = x(t | z)$  системы (2.2) попадает в заданный момент  $\theta$  в начало координат, что соответствует терминальному ограничению (2.3). Допустимое управление

$$u^0(t) = u^0(t | z) \quad (2.5)$$

и соответствующая ему траектория  $x^0(t) = x^0(t | z)$  системы (2.2) называются оптимальными (программными) управлением и траекторией, если вдоль них критерий качества (2.1) достигает минимального значения. Как известно [10], найдется такая окрестность  $G$  начала координат, что для всех точек  $z \in G$  существует ОУ (2.5) задачи (2.1)–(2.4).

Следуя классическому определению ОУ типа ОС, функцию

$$u^0(z) = u^0(0 | z), \quad z \in G \quad (2.6)$$

назовем оптимальным стартовым управлением типа ОС.

В данной работе показывается, что функция (2.6) является СОС для системы (1.1) (разд. 5), и описывается метод ее реализации (разд. 3, 4, 6, 7).

**3. Оптимальное программное управление сопровождающей задачи оптимального управления.** В предлагаемом методе процесс стабилизации начинается в момент  $t = 0$  с программного решения  $u^0(t) = u^0(t | x_0)$  (2.5) задачи (2.1)–(2.4) для начального состояния  $z = x_0$ , а в дальнейшем производится лишь непрерывная коррекция программных решений. Поскольку для состояния  $z = x_0$  задача (2.1)–(2.4) содержит лишь априорную информацию, то программное решение при  $z = x_0$  можно построить до начала процесса стабилизации, например, конечным методом первого порядка [11, 12]<sup>1</sup>.

Задачу (2.1)–(2.4) будем называть простой, если для принадлежащих  $T$  концов  $\underline{t}_i(z)$ ,  $i \in P_0(z) = \{s^0(z) + 1, \dots, p(z)\}$ ;  $\bar{t}_i(z)$ ,  $i \in P^0(z) = \{1, \dots, s^*(z)\}$ , квазиособых отрезков ОУ (2.5) выполняются условия

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi^0(t) - k_{i-1}(z))|_{t=\underline{t}_i(z)} \neq 0, \quad i \in P_0(z) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi^0(t) - k_i(z))|_{t=\bar{t}_i(z)} \neq 0, \quad i \in P^0(z)$$

где  $\varphi^0(t) = \varphi^0(t | z)$  – функция, определяемая соотношением

$$\dot{\varphi}^0(t) = \psi^{0'}(t)b \quad (3.2)$$

$\psi^0(t) = \psi^0(t | z)$  – решение (котраектория) сопряженной системы:  $\dot{\psi} = -A'\psi$ ,  $\psi(\theta) = y$ , соответствующие оптимальному  $n$ -вектору потенциалов  $y = y(z)$ ; кроме того,

$$|\varphi^0(t)| \leq L, \quad t \in T_i^0(z) = [\underline{t}_i(z), \bar{t}_i(z)] \quad (3.3)$$

$$i \in P(z) = \{1, \dots, p(z)\}$$

$$|k_i(z)| = L, \quad i \in P_*(z) = \{s^0(z), \dots, s^*(z)\}$$

$$\varphi^0(\underline{t}_i(z)) = k_{i-1}(z), \quad u^0(t) \equiv k_{i-1}(z), \quad t \in T^-(\underline{t}_i(z)), \quad i \in P_0(z)$$

$$\varphi^0(\bar{t}_i(z)) = k_i(z), \quad u^0(t) \equiv k_i(z), \quad t \in T^+(\bar{t}_i(z)), \quad i \in P^0(z)$$

$T^-(t)$  – малая левосторонняя окрестность точки  $t$ ;  $T^+(t)$  – ее малая правосторонняя окрестность; штрих – операция транспонирования (значения индексов  $s^0(z)$  и  $s^*(z)$  определяются ниже).

Известно [11, 12], что непрерывное по  $t$  оптимальное программное управление  $u^0(t) = u^0(t | x_0)$  простой задачи (2.1)–(2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} u^0(t) &= -L, \quad \text{если } \varphi^0(t) < -L \\ u^0(t) &= L, \quad \text{если } \varphi^0(t) > L \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$u^0(t) = \varphi^0(t), \quad \text{если } |\varphi^0(t)| \leq L$$

Согласно (2.6), в произвольный текущий момент  $\tau \geq 0$  для построения стаби-

<sup>1</sup> См. также: Лубочкин А.В. Методы решения выпуклых задач оптимального управления. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Минск: Изд-во БГУ, 1987.

лизирующего управления системы (1.1) для текущего состояния  $x(\tau)$  нужно знать решение сопровождающей задачи (2.1)–(2.4) при  $z = x(\tau)$ . Но теперь не будем эту задачу решать явно. Суть нового подхода состоит в следующем. Оптимальное программное управление  $u^0(t | x(\tau))$  для состояния  $z = x(\tau)$  имеет такой же вид (3.4), что и для начального состояния  $z = x_0$ . Это управление определяется совокупностью

$$\begin{aligned} \underline{t}_i(\tau) &= \underline{t}_i(x(\tau)), & i \in P_0(\tau) = P_0(x(\tau)) \\ \bar{t}_i(\tau) &= \bar{t}_i(x(\tau)), & i \in P^0(\tau) = P^0(x(\tau)) \\ y(\tau) &= y(x(\tau)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

состоящей из принадлежащих отрезку  $T$  концов квазиособых отрезков  $T_i^0(\tau) = T_i^0(x(\tau))$ ,  $i \in P(\tau) = P(x(\tau))$  (3.3) и вектора потенциалов; здесь  $s^0(\tau) = s^0(x(\tau)) = 0$ , если  $\underline{t}_1(\tau) > 0$ ;  $s^0(\tau) = 1$ , если  $\underline{t}_1(\tau) \leq 0 \leq \bar{t}_1(\tau)$ ;  $s^*(\tau) = s^*(x(\tau)) = p(x(\tau)) = p(\tau)$ , если  $\bar{t}_{p(\tau)}(\tau) < \theta$ ;  $s^*(\tau) = p(\tau) - 1$ , если  $\underline{t}_{p(\tau)}(\tau) \leq \theta \leq \bar{t}_{p(\tau)}(\tau)$ .

Таким образом, для построения управления  $u^0(0 | x(\tau))$ ,  $\tau \geq 0$ , достаточно в каждый момент  $\tau \geq 0$  иметь элементы (3.5). С этой целью в разд. 6 выводятся уравнения, описывающие поведение элементов (3.5), и в разд. 7 предлагается метод решения этих уравнений.

**4. Стабилизатор.** Предположим, что оптимальная обратная связь (ООС) (2.6) построена. Замкнем ею систему (1.1) и рассмотрим поведение замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + bu^0(x) \quad (4.1)$$

для конкретного начального состояния

$$x(0) = x_0^* \in G \quad (4.2)$$

Обозначим через  $x^*(t)$ ,  $t \geq 0$ , соответствующее ему решение уравнения (4.1).

Видно, что в процессе стабилизации на вход системы подается функция

$$u^*(t) = u^0(x^*(t)), \quad t \geq 0 \quad (4.3)$$

т.е. в процессе стабилизации ООС (2.6) не используется полностью, нужны лишь ее значения вдоль конкретной траектории  $x^*(t)$ ,  $t \geq 0$ , системы (4.1). Более того, значение  $u^0(x^*(\tau))$  не нужно знать заранее, достаточно его иметь только в текущий момент  $\tau$ , когда система (4.1) оказалась в текущем состоянии  $x^*(\tau)$ .

Далее, учтем еще три обстоятельства: 1) во многих современных системах управления, использующих средства вычислительной техники, управляющие воздействия подаются на вход объекта управления не непрерывно, а в дискретные моменты времени с определенным тактом, 2) скорость течения реальных процессов конечна, 3) современные средства вычислительной техники располагают весьма быстродействующими устройствами. С учетом этих обстоятельств ниже показывается, что для многих конкретных процессов существующие вычислительные устройства позволяют реализовать ООС (2.6).

Функцию (4.3) назовем реализацией ОУ типа ОС, соответствующей начальному состоянию (4.2). Семейство кусочно-непрерывных функций

$$u^*(h, t), \quad t \geq 0, \quad h \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

вида  $u^*(h, t) \equiv f_s(t)$ ,  $t \in [sh, (s+1)h]$  ( $s = 0, 1, \dots$ ), где  $f_s(t)$  – функция, известная к моменту  $t = sh$ , назовем дискретной реализацией ООС в замкнутой системе (4.1) с начальным

состоянием (4.2), если для любого  $\tau, 0 < \tau < \infty$

$$\int_0^{\tau} |u^*(t) - u^*(h, t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

При выбранном такте работы  $h > 0$  элемент  $u^*(h, t), t \geq 0$ , семейства (4.4) будем называть  $h$ -реализацией ООС для начального состояния (4.2).

**Определение.** Любое устройство, которое для каждого фиксированного достаточно малого числа  $h > 0$  способно в режиме реального времени вычислять значения функции  $u^*(h, t), t \geq 0$ , назовем стабилизатором.

Понятие "решение в режиме реального времени" поясняется в разд. 7.

В дальнейшем для краткости речи будем опускать зависимость стабилизатора от выбранного параметра  $h > 0$ .

Таким образом, задача реализации СОС (2.6) свелась к описанию алгоритма работы стабилизатора.

Предварительно докажем стабилизирующее свойство ОС (2.6) (разд. 5), получим определяющие уравнения стабилизатора (разд. 6), а затем опишем алгоритм работы стабилизатора (разд. 7).

### 5. Устойчивость замкнутой системы.

**Теорема.** Система (1.1), замкнутая ООС (2.6), асимптотически устойчива в  $G$ .

**Доказательство.** Пусть замкнутая система (4.1) в произвольный момент  $\tau = sh (s = 0, 1, \dots)$  находится в состоянии  $x^*(\tau)$ . В этом состоянии критерий качества вспомогательной задачи (2.1)–(2.4) принимает значение  $V(x^*\tau)$ . Покажем, что  $V(x)$ ,  $x \in G$  – функция Ляпунова. Ясно, что она непрерывна,  $V(0) = 0$ ,  $V(x) > 0$  при  $x \neq 0$ . Подсчитаем ее значение в точке  $x = x^*(\tau + h)$ . Для  $x^*(\tau + h)$  значение  $V(x^*(\tau + h))$  определяется решением задачи (2.1)–(2.4) при  $z = x^*(\tau + h)$ . Эта задача эквивалентна следующей:

$$\int_{\tau+h}^{\tau+h+\theta} \frac{1}{2} u^2(t) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = Ax + bu$$

$$x(\tau+h) = x^*(\tau+h), \quad x(\tau+h+\theta) = 0$$

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in [\tau+h, \tau+h+\theta]$$

Последняя задача в свою очередь эквивалентна задаче

$$\int_{\tau}^{\tau+h} \frac{1}{2} (u^0(t|x^*(\tau)))^2 dt + \int_{\tau+h}^{\tau+h+\theta} \frac{1}{2} u^2(t) dt \rightarrow \min$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(\tau) = x^*(\tau), \quad x(\tau+h+\theta) = 0 \quad (5.1)$$

$$u(t) \equiv u^0(t|x^*(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau+h]; \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in [\tau+h, \tau+h+\theta]$$

Поскольку управление  $u(t) \equiv u^0(t|x^*(\tau)), t \in [\tau, \tau+\theta]; u(t) \equiv 0, t \in [\tau+\theta, \tau+h+\theta]$ , является допустимым в задаче (5.1), то минимальное значение критерия качества этой задачи не превосходит  $V(x^*(\tau))$ :

$$\int_{\tau}^{\tau+h} \frac{1}{2} (u^0(t|x^*(\tau)))^2 dt + V(x^*(\tau+h)) \leq V(x^*(\tau)) \quad (5.2)$$

Поскольку при сделанных предположениях ОУ  $u^0(t|x^*(\tau)), t \geq \tau$  не может обращаться тождественно в нуль на любом интервале конечной длины, то интеграл в (5.2) положителен и, следовательно,  $V(x^*(\tau+h)) < V(x^*(\tau))$ .

Далее рассуждениями, типичными для теории устойчивости по Ляпунову [13, 14], можно показать, что  $V(x^*(sh)) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ ,  $x^*(sh) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ . Отсюда уже легко показать, что  $x^*(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

*Замечания.* В доказательстве теоремы фактически речь идет не об ОС (2.6), а о ее дискретной аппроксимации, которая вводится по задаче (2.1)–(2.4) так же, как и ОС (2.6), но с использованием кусочно-непрерывных функций с периодом квантования  $h > 0$ . Можно доказать стабилизирующее свойство и ОС (2.6), но рассуждения при этом усложняются. К тому же при реальной стабилизации (см. ниже) системы (1.1) используется только упомянутая дискретная аппроксимация. При достаточно малых  $h > 0$  (что предполагается в работе) переходные процессы в системе, замкнутой ОС или ее дискретной аппроксимацией, практически неразличимы (доказательство этого факта достаточно стандартно и в работе не приводится).

**6. Определяющие уравнения стабилизатора.** Пусть для текущего состояния  $x^*(\tau)$  задача (2.1)–(2.4) с  $z = x^*(\tau)$  является простой, и имеет место равенство

$$\text{rang}(h(t), t \in T_0(\tau)) = n \quad (6.1)$$

где  $T_0(\tau) = \{t \in T: |\varphi^0(t)| < L\} = \cup \underline{t}_i(\tau), \bar{t}_i(\tau)[, i \in P(\tau); \varphi^0(t) = \varphi^0(t | x^*(\tau)), t \in T$  – функция (3.2);  $h(t) = F(\theta - t)b, t \in T; F(t), t \in T$  – фундаментальная  $(n \times n)$ -матрица решений системы  $\dot{x} = Ax: \dot{F} = AF, F(0) = E$ . Введем обозначения:

$$\underline{d}(t) = \partial(\varphi^0(t) - k_{i-1}(\tau)) / \partial t, \quad \bar{d}(t) = \partial(\varphi^0(t) - k_i(\tau)) / \partial t.$$

Построим следующие числа и множества: концы квазиособых отрезков (3.5):

$$\begin{aligned} \underline{t}_i(\tau) < \bar{t}_i(\tau) < \underline{t}_{i+1}(\tau) < \bar{t}_{i+1}(\tau) \\ i \in P(\tau) \setminus \{p(\tau)\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

индексы  $s^0(\tau), s^*(\tau)$  (см. разд. 3);  $k_i(\tau) = -L$ , если  $\varphi^0(t) \leq -L, t \in T_i^*(\tau) = [\bar{t}_i(\tau), \underline{t}_{i+1}(\tau)]; k_i(\tau) = L$ , если  $\varphi^0(t) \geq L, t \in T_i^*(\tau), i \in P_*(\tau); \underline{l}_*(0) = 0$ , если  $\underline{t}_1(\tau) > 0; \underline{l}_*(\tau) = 1$ , если  $\underline{t}_1(\tau) = 0; \bar{l}_*(\tau) = 0$ , если  $\bar{t}_1(\tau) > 0; \bar{l}_*(\tau) = 1$ , если  $\bar{t}_1(\tau) = 0; \bar{l}^*(\tau) = 0$ , если  $\bar{t}_{p(\tau)}(\tau) < \theta; \bar{l}_*(\tau) = 1$ , если  $\bar{t}_{p(\tau)}(\tau) = \theta; \underline{l}^*(\tau) = 0$ , если  $\underline{t}_{p(\tau)}(\tau) < \theta; \underline{l}^*(\tau) = 1$ , если  $\underline{t}_{p(\tau)}(\tau) = \theta; L(\tau) = \{i \in P_0(\tau): \underline{d}(\underline{t}_i(\tau)) = 0; i \in P^0(\tau): \bar{d}(\bar{t}_i(\tau)) = 0\}$  (отрезки  $T_i^*(\tau), i \in P_*(\tau)$  будем называть неособыми).

Совокупность  $S(\tau) = \{p(\tau), s^0(\tau), s^*(\tau); k_i(\tau), i \in P_*(\tau); \underline{l}_*(\tau), \bar{l}_*(\tau); \underline{l}^*(\tau); \bar{l}^*(\tau); L(\tau)\}$  назовем структурой ОУ. Структура считается невырожденной, если  $\beta(\tau) = \underline{l}_*(\tau) + \bar{l}_*(\tau) + \underline{l}^*(\tau) + \bar{l}^*(\tau) + |L(\tau)| = 0$ .

Пусть в момент  $\tau = \tau_0$  структура  $S(\tau) = S(\tau_0)$  является невырожденной. Используя формулу Коши, из условий стыковки на концах квазиособых отрезков непрерывного по  $t$  ОУ и условия выполнения терминального ограничения (2.3) получим, что элементы (3.5) удовлетворяют при  $\tau = \tau_0$  уравнениям

$$q(\underline{t}_i(\tau); k_{i-1}; y(\tau)) = 0, i \in P_0; r(\bar{t}_i(\tau); k_i; y(\tau)) = 0, i \in P^0 \quad (6.3)$$

$$f(\underline{t}_i(\tau); i \in P_0; \bar{t}_i(\tau), i \in P^0; k_i, i \in P_*; y(\tau); x^*(\tau)) = 0$$

которые далее будут называться определяющими уравнениями стабилизатора. Здесь

$$q(t; k_{i-1}; y) = y'h(t) - k_{i-1}, i \in P_0$$

$$r(t; k_i; y) = y'h(t) - k_i, i \in P^0$$

$$f(\underline{t}_i, i \in P_0; \bar{t}_i, i \in P^0; k_i, i \in P_*; y; x) =$$

$$= F(\theta)x + \sum_{i=s^0}^{s^*} k_i \int_{\bar{t}_i}^{\underline{t}_{i+1}} h(t)dt + \sum_{i=1}^p \int_{\underline{t}_i}^{\bar{t}_i} h(t)h'(t)ydt$$

$p = p(\tau)$ ,  $s^0 = s^0(\tau)$ ,  $s^* = s^*(\tau)$ ;  $k_i = k_i(\tau)$ ,  $i \in P_* = P_*(\tau)$ ;  $t_i = t_i(\tau)$ ,  $i \in P_0 = P_0(\tau)$ ;  $\bar{t}_i = \bar{t}_i(\tau)$ ,  $i \in P^0 = P^0(\tau)$ ;  $\bar{t}_0 = 0$ , если  $s^0 = 0$ ;  $\bar{t}_1 = 0$ , если  $s^0 = 1$ ;  $\bar{t}_{p+1} = \theta$ , если  $s^* = p$ ;  $\bar{t}_p = \theta$ , если  $s^* = p - 1$ .

Подсчитаем для системы (6.3) матрицу Якоби  $H(\tau) = H(t_i, i \in P_0; \bar{t}_i, i \in P^0; y)$ , состоящую из блоков:

$$H_{11}(t_i, i \in P_0; y) = \text{diag}(-y' \mu(t_i), i \in P_0), \quad H_{13}(t_i, t \in P_0) = (h(t_i), i \in P_0)'$$

$$H_{22}(\bar{t}_i, i \in P^0; y) = \text{diag}(-y' \mu(\bar{t}_i), i \in P^0), \quad H_{23}(\bar{t}_i, t \in P^0) = (h(\bar{t}_i), i \in P^0)'$$

$$H_{33}(t_i, i \in P_0; \bar{t}_i, i \in P^0) = \sum_{i=1}^p \int_{t_i}^{\bar{t}_i} h(t) h'(t) dt$$

$$(\mu(t) = F(\theta - t)Ab, t \in T)$$

(остальные блоки – нулевые подматрицы).

Можно показать, что поскольку  $\beta(\tau_0) = 0$  и выполняются соотношения (3.1), (6.1), то  $\det H(\tau_0) \neq 0$ . Согласно теореме о неявных функциях отсюда следует, что для  $\tau \in T^+(\tau_0)$  существует единственное непрерывное решение (3.5) уравнений (6.3) (при этом  $S(\tau) = S(\tau_0)$ ). Один способ решения уравнений (6.3) описан в разд. 7.

**7. Алгоритм работы стабилизатора.** Прежде чем описывать алгоритм работы стабилизатора, приведем один численный метод решения его определяющих уравнений (6.3).

Рассмотрим интервал  $]\tau_0, \tau_1[$ ,  $\tau_1 > \tau_0 \geq 0$ , для которого  $\beta(\tau) = 0$ ,  $\tau \in ]\tau_0, \tau_1[$ . Считаем, что для  $\tau = \tau_0$  известны стартовые значения  $p(\tau_0), s^0(\tau_0), s^*(\tau_0); k_i(\tau_0), i \in P_*(\tau_0)$ ;  $t_i = t_i(\tau_0)$ ,  $i \in P_0(\tau_0)$ ;  $\bar{t}_i = \bar{t}_i(\tau_0)$ ,  $i \in P^0(\tau_0)$ ;  $y(\tau_0)$ . Опишем простейший алгоритм (использующий метод Ньютона) решения конечных уравнений (6.3) для  $\tau \in ]\tau_0, \tau_1[$ , где  $p = p(\tau_0)$ ,  $s^0 = s^0(\tau_0)$ ,  $s^* = s^*(\tau_0)$ ;  $k_i = k_i(\tau_0)$ ,  $i \in P_* = P_*(\tau_0)$ ;  $P_0 = P_0(\tau_0)$ ,  $P^0 = P^0(\tau_0)$ .

Как и при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений, приближенное решение уравнений (6.3) будем строить на сетке  $\tau_0, \tau_0 + h, \dots, \tau_0 + N_0 h = \tau_1$ , где  $h > 0$  – заданный параметр. Предположим вначале, что стартовые значения таковы, что выполняются условия (6.2). В этом случае в силу предположений (6.1),  $\beta(\tau_0) = 0$  имеем  $\det H(\tau_0) \neq 0$ .

Пусть построена такая последовательность решений:

$$\omega(\tau_0 + sh) = (t_i(\tau_0 + sh), i \in P_0; \bar{t}_i(\tau_0 + sh), i \in P^0$$

$$y(\tau_0 + sh)), \quad s = 0, 1, \dots, \nu - 1$$

соответствующая последовательности состояний  $x^*(\tau_0 + sh)$ ,  $s = 0, 1, \dots, \nu - 1$ , что для  $s = 0, 1, \dots, \nu - 1$  с заданной точностью выполняются равенства

$$f(t_i(\tau_0 + sh), i \in P_0; \bar{t}_i(\tau_0 + sh), i \in P^0; k_i, i \in P_*; y(\tau_0 + sh); x^*(\tau_0 + sh)) = 0$$

$$q(t_i(\tau_0 + sh); k_{i-1}; y(\tau_0 + sh)) = 0, \quad i \in P_0$$

$$r(\bar{t}_i(\tau_0 + sh); k_i; y(\tau_0 + sh)) = 0, \quad i \in P^0$$

Для вычисления при новом состоянии  $x^*(\tau_0 + \nu h)$ ,  $\nu \leq N_0$ , решения  $\omega(\bar{\tau})$ ,  $\bar{\tau} = \tau_0 + \nu h$ , построим векторы  $\omega^l = (t_i^l, i \in P_0; \bar{t}_i^l, i \in P^0; y^l)$  ( $l = 1, 2, \dots, l_0$ ):

$$\omega^1 = (t_i^1 = t_i(\bar{\tau} - h), i \in P_0; \bar{t}_i^1 = \bar{t}_i(\bar{\tau} - h), i \in P^0; y^1 = y(\bar{\tau} - h)) \quad (7.1)$$

$$\omega^l = \omega^{l-1} - H^{-1}(t_i^{l-1}, i \in P_0; \bar{t}_i^{l-1}, i \in P^0; y^{l-1})(q(t_i^{l-1}; k_{i-1}; y^{l-1}),$$

$$i \in P_0; (r(\bar{t}_i^{l-1}; k_i; y^{l-1}), i \in P^0; f'(\underline{t}_i^{l-1}, i \in P_0; \bar{t}_i^{l-1}, i \in P^0; k_i, i \in P_*; y^{l-1}; x^*(\bar{\tau})))', l = 2, 3, \dots, l_0$$

Положим

$$\omega(\bar{\tau}) = \omega^{l_0}: \underline{t}_i(\bar{\tau}) = \underline{t}_i^{l_0}, i \in P_0; \bar{t}_i(\bar{\tau}) = \bar{t}_i^{l_0}, i \in P^0; y(\bar{\tau}) = y^{l_0}$$

В силу известных свойств метода Ньютона [15] имеем: при любом  $\varepsilon > 0$  для достаточно малых  $h > 0$  и достаточно больших  $l_0 = l_0(h)$  будут построены такие функции  $\underline{t}_i(\tau_0 + sh)$ ,  $i \in P_0$ ;  $\bar{t}_i(\tau_0 + sh)$ ,  $i \in P^0$ ;  $y(\tau_0 + sh)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_0$ , что для  $s = 0, 1, \dots, N_0$  выполняются неравенства

$$|q(\underline{t}_i(\tau_0 + sh); k_{i-1}; y(\tau_0 + sh))| \leq \varepsilon, i \in P_0$$

$$|r(\bar{t}_i(\tau_0 + sh); k_i; y(\tau_0 + sh))| \leq \varepsilon, i \in P^0$$

$$\|f(\underline{t}_i(\tau_0 + sh), i \in P_0; \bar{t}_i(\tau_0 + sh), i \in P^0; k_i, i \in P_*; y(\tau_0 + sh); x^*(\tau_0 + sh))\| \leq \varepsilon$$

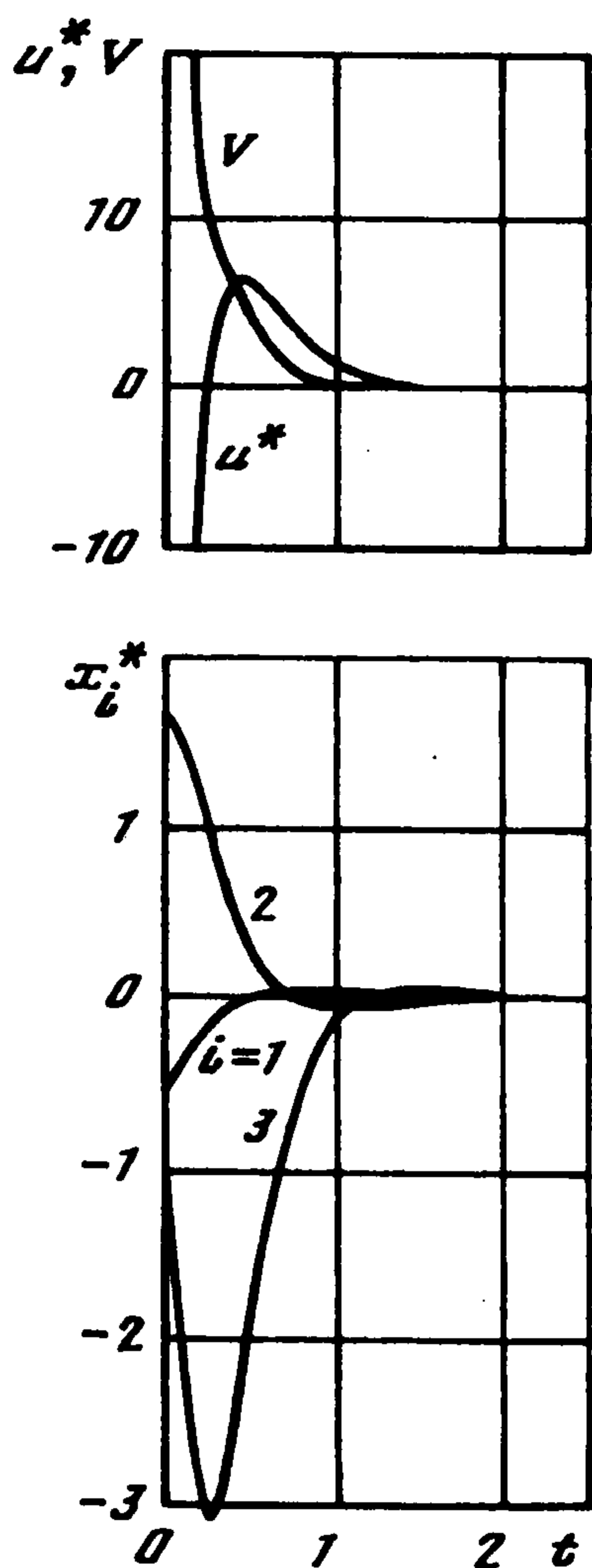
Рассмотрим теперь различные случаи вырождения структуры управления. Дополнительный квазиособый (неособый) отрезок может войти в момент  $\tau = \tau_1$  в отрезок  $T$  через левый его конец. Момент входа  $\tau_1$  можно обнаружить, следя за значением  $\varphi^0(0)$ . Если добавляется квазиособый отрезок, то при  $\tau > \tau_1$  заменим в уравнениях (6.3)  $p$  на  $\bar{p} = p + 1$ ,  $s^0$  на  $\bar{s}^0 = s^0 + 1$ ,  $s^*$  на  $\bar{s}^* = s^* + 1$ , перенумеруем точки  $\underline{t}_i$ ,  $i \in \bar{P}_0$ ;  $\bar{t}_i$ ,  $i \in \bar{P}^0$ , и значения  $k_i$ ,  $i \in \bar{P}_*$ ; если добавляется неособый отрезок, заменим  $s^0$  на  $\bar{s}^0 = s^0 - 1$  и определим значение  $\bar{k}_0$  по значению  $\varphi^0(0)$ . В правилах решения определяющих уравнений (6.3) изменяем лишь правило вычисления вектора  $\omega^1$  (7.1): в первом случае для компоненты  $\bar{t}_1^1$  полагаем  $\bar{t}_1^1 = h$ , во втором случае для  $\underline{t}_1^1$  полагаем  $\underline{t}_1^1 = h$ .

Через левый отрезок  $T$  может уйти имеющийся в  $T$  квазиособый (неособый) отрезок. Момент выхода  $\tau_1$  обнаруживается по значению  $\bar{t}_1(\tau)(\underline{t}_1(\tau))$ . Если уходит квазиособый отрезок, то положим  $\bar{p} = p - 1$ ,  $\bar{s}^0 = s^0 - 1$ ,  $\bar{s}^* = s^* - 1$ , перенумеруем точки  $\underline{t}_i$ ,  $i \in \bar{P}_0$ ;  $\bar{t}_i$ ,  $i \in \bar{P}^0$  и значения  $k_i$ ,  $i \in \bar{P}_*$ ; если уходит неособый отрезок, положим  $\bar{s}^0 = s^0 + 1$ .

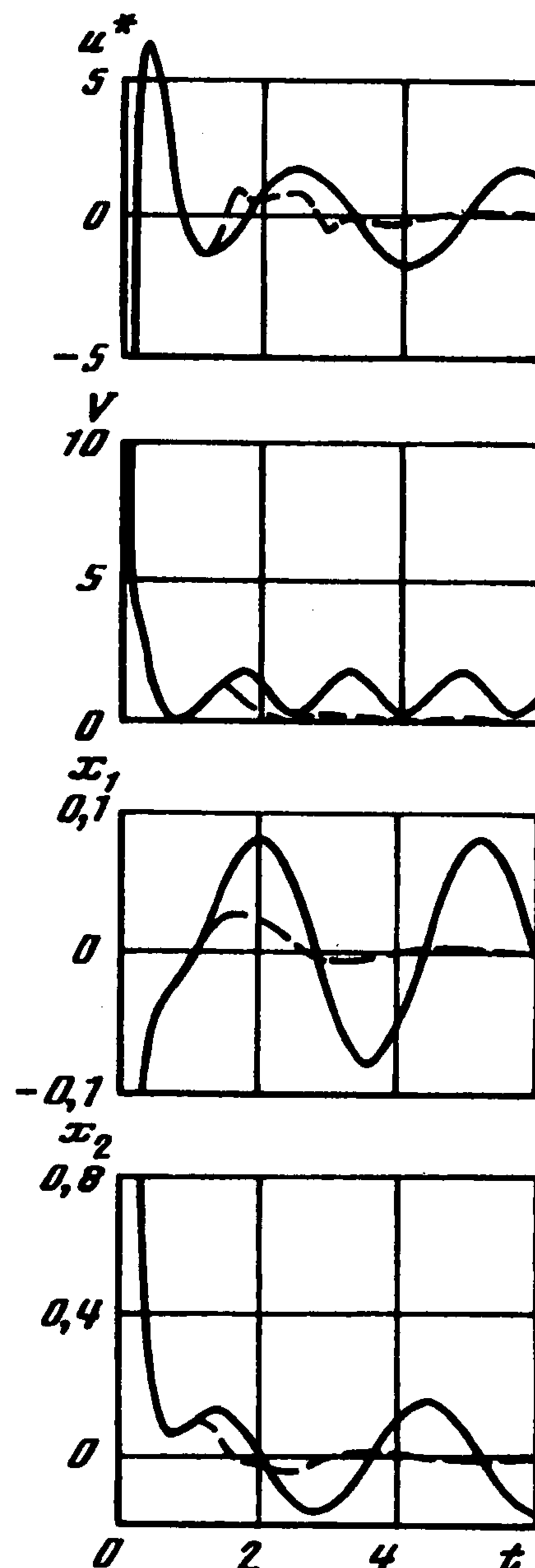
Аналогично поступаем в подобных ситуациях на правом конце отрезка  $T$ . Возможно также появление или исчезновение отрезков внутри  $T$ . В этих случаях поступаем аналогично принятому ранее [8, 9].

Алгоритм работы стабилизатора заключается в следующем. При  $t \in [0, h[$ ,  $h > 0$ , стабилизатор использует решение (2.5) задачи (2.1)–(2.4) при  $z = x_0$  (это решение можно построить заранее, до включения стабилизатора):  $u^*(t) \equiv u^0(t | x_0)$ ,  $t \in [0, h[$ . Алгоритм работы стабилизатора при  $t \geq h$  складывается для каждого  $[sh, (s + 1)h[$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) из следующих операций: 1) по известному текущему состоянию  $x^*(sh)$  стабилизатор строит описанным выше методом решение  $\omega(sh)$  уравнений (6.3), используя в качестве начального приближения  $\omega((s - 1)h)$ ; 2) на промежутке  $[sh, (s + 1)h[$  стабилизатор использует управление  $u^*(t) \equiv u^0(t - sh | x^*(sh))$ ,  $t \in [sh, (s + 1)h[$ .

Опираясь на известные свойства метода Ньютона, нетрудно подсчитать объем работы, необходимый для вычисления с заданной точностью решения определяющих уравнений в момент  $\tau$ , при условии, что в качестве начального приближения используется известное решение для момента  $\tau - h$ . Если имеющееся вычислительное устройство эту работу способно выполнить за время, не превосходящее  $h$  единиц реального времени, то естественно считать, что уравнения (6.3) решаются в режиме



Фиг. 1



Фиг. 2

реального времени, а значит, и стабилизатор строит реализацию ОС в том же темпе. Понятно, что реализация такого режима зависит от сложности рассматриваемой системы и мощности используемых вычислительных устройств.

**8. Пример.** В качестве иллюстрации рассмотрим задачу [16] стабилизации маятника в верхнем, неустойчивом положении равновесия с помощью момента, приложенного к нему на оси подвеса. Этот момент вырабатывается исполнительным механизмом, который является интегрирующим звеном. Исполнительный механизм в свою очередь подвержен некоторому управляющему воздействию  $u$ . Линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3 = u \quad (8.1)$$

На фиг. 1 представлены графики реализации ОС  $u^*(t) = u^0(x^*(t))$ ,  $t \geq 0$ , вырабатываемой стабилизатором, изменение во времени функции Ляпунова  $V(x^*(t))$ ,  $t \geq 0$  при  $h = 0,01$ ,  $\theta = 1$ ,  $L = 10$  и графики соответствующих компонент траектории  $x_i^*(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

В численном эксперименте испытывалась работа построенного стабилизатора при действии на систему возмущения. Была рассмотрена система, отличающаяся от (8.1) наличием во втором уравнении слагаемого  $-\cos 2t$ . Графики функций  $u^*(t)$ ,  $V(x^*(t))$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  представлены на фиг. 2 сплошными линиями. Качество переходных процессов существенно зависит от величины параметра  $\theta$ . В связи с этим был поставлен эксперимент с применением следующего правила изменения параметра  $\theta$  в процессе стабилизации. Были выбраны три числа:  $\theta^* = 1$ ,  $\theta_* = 0,4$ ,  $h_\theta = 0,005$ . Вначале полагали  $\theta = \theta^*$ . Если оказывалось, что  $V(x^*(t)) > V(x^*(t-h))$ , то значение  $\theta$

уменьшали на величину  $h_\theta$  (при этом в случае  $\theta = \theta_*$  величину параметра  $\theta$  оставляли неизменной). Полученные результаты представлены на фиг. 2 штриховыми линиями.

Из приведенных графиков видно, что управление параметром  $\theta$  может оказаться действенным средством повышения эффективности стабилизации в условиях постоянно действующих возмущений.

Авторы благодарят А. Карбовского, обратившего их внимание на работы [3–5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов. I–III // Автоматика и телемеханика. 1960. № 4. С. 436–441; № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665.
2. Калман Р. Об общей теории систем управления // Тр. I Конгр. ИФАК. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 521–547.
3. Kwon W.H., Pearson A.E. A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system // IEEE Trans. Automat. Contr. 1977. V. 22. N 5. P. 838–842.
4. Kwon W.H., Bruckstein A.M., Kailath T. Stabilizing state-feedback design via the moving horizon method // Intern. J. Control. 1983. V 37. N 3. P. 631–643.
5. Mayne D.Q., Michalska H. Receding horizon control of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1990. V. 35. N 7. P. 814–824.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. К методам стабилизации динамических систем // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 67–77.
7. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимальный успокоитель динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 5. С. 3–12.
8. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1294–1299.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 4. С. 3–19.
10. Мордухович Б.Ш. Существование оптимальных управлений // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1976. Т. 6. С. 207–261.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И., Ракецкий В.М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 4. Минск: Изд-во Университетское, 1987. 222 с.
12. Лубочкин А.В. Оптимизация переходного процесса по минимуму энергии управления // Вестн. Бел. ун-та. Сер. 1. 1988. № 3. С. 67–68.
13. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
14. Бромберг П.В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967. 323 с.
15. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Т. 1. М.: Наука, 1976. 303 с.
16. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.