УДК 531.36

© 1998 г. Г.А. Леонов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

В задаче об устойчивости по первому приближению в смысле Ляпунова, Пуанкаре, Жуковского классическое условие правильности первого приближения заменено требованием сохранения знака ляпуновских экспонент при малом шевелении начальных состояний.

Что происходит в окрестности решения нелинейного дифференциального уравнения, если известны ляпуновские экспоненты его линеаризации? Наибольшее число классических результатов здесь относится к исследованию устойчивости по Ляпунову. Ляпуновым показано, что если линейная система первого приближения является правильной и все ее ляпуновские экспоненты отрицательны, то рассматриваемое решение асимптотически устойчиво [1].

Перрон показал [2], что требование правильности существенно, и привел пример неустойчивого по Ляпунову решения, линеаризация вдоль которого была неправильной и имела отрицательные ляпуновские экспоненты. Четаев получил аналогичную теорему для неустойчивости [3, 4]: если линейная система первого приближения является правильной и хотя бы одна ее ляпуновская экспонента положительна, то решение неустойчиво по Ляпунову.

При исследовании аттракторов динамических систем часто приходится рассматривать не индивидуальные решения, а некоторые ансамбли решений [5–9]. В настоящее время созданы численные методы и проведено огромное число компьютерных экспериментов, где вычислены ляпуновские экспоненты таких ансамблей [8–10]. С точки зрения такого анализа аттракторов представляется весьма естественной попытка замены часто трудопроверяемого требования правильности первого приближения условием сохранения знака ляпуновских экспонент при "малом шевелении начальных состояний".

Оказалось, что такая замена возможна с помощью доказанных ниже теорем 1, 2.

Следует отметить, что уже при анализе периодических решений автономных систем приходится переходить к другим понятиям устойчивости. Это прежде всего введенная Пуанкаре орбитальная устойчивость (в дальнейшем будем называть ее также устойчивостью по Пуанкаре). В этом случае известна теорема Андронова–Витта [11, 12] и ее обобщение Б.П. Демидовичем на случай непериодических траекторий [13]. Б.П. Демидович показал, что если линейное приближение вдоль ограниченной траектории правильно, имеет одну нулевую ляпуновскую экспоненту и все остальные ляпуновские экспоненты отрицательны, то рассматриваемая траектория орбитально устойчива. Доказанная ниже теорема 3 позволяет здесь также снять свойство правильности, заменив его сохранением отрицательности ляпуновских экспонент некоторой естественным образом возникающей линеаризации при малом шевелении начальных состояний.

При изучении неустойчивости траекторий на аттракторах приходится вводить понятие неустойчивости по Жуковскому [14]. Для того чтобы пояснить возникающие здесь трудности, напомним основные определения устойчивости для системы

$$dx/dt = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad f \in C^2 \tag{1}$$

Определение 1. Решение $x(t, x_0)$ системы (1) с начальными данными $x(0, x_0) = x_0$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого вектора y_0, удовлетворяющего неравенству $|x_0 - y_0| \leqslant \leqslant \delta(\varepsilon)$, и для любого $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $|x(t, x_0) - x(t, y_0)| \leqslant \varepsilon$. Если, кроме того, для некоторого числа δ_0 и всех y_0 из шара $\{y \mid |y - x_0| \leq \delta_0\}$ выполнено соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t, x_0) - x(t, y_0)| = 0$$

то говорят, что решение $x(t, x_0)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Здесь $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbf{R}^n$.

Введем следующее обозначение: $L^+(x_0) = \{x(t, x_0) \mid 0 \leq t < +\infty\}$. Таким образом, множество $L^+(x_0)$ – положительная полутраектория системы (1).

Определение 2. Решение $x(t, x_0)$ системы (1) называется устойчивым по Пуанкаре (или орбитально устойчивым), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого вектора y_0, удовлетворяющего неравенству $|x_0 - y_0| \leq \delta(\varepsilon)$, и для любого $t \geq 0$ выполнено неравенство

$$\rho(x(t, y_0), L^+(x_0)) \leq \varepsilon \tag{2}$$

Если, кроме того, для некоторого числа δ_0 и всех y_0 из шара $\{y \mid |y - x_0| \leq \delta_0\}$ выполнено соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(x(t, y_0), L^+(x_0)) = 0$$

то говорят, что решение $x(t, x_0)$ асимптотически устойчиво по Пуанкаре (или асимптотически орбитально устойчиво).

Здесь $\rho(z, L)$ – расстояние между точкой z и множеством L:

$$\rho(z, L) = \inf_{y\in L} |z - y|$$

Для определения устойчивости по Жуковскому потребуется рассмотрение следующего множества гомеоморфизмов:

$$\text{Hom} = \{\tau(\cdot) \mid \tau\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty),\ \tau(0) = 0\}$$

Функции $\tau(t)$ из множества Hom будут играть роль перепараметризаций времени для траекторий системы (1).

Определение 3. Решение $x(t, x_0)$ системы (1) назовем устойчивым по Жуковскому, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого вектора y_0, удовлетворяющего неравенству $|x_0 - y_0| \leq \delta(\varepsilon)$, найдется функция $\tau(\cdot) \in \text{Hom}$, при которой выполнено неравенство $|x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0)| \leq \varepsilon$, $\forall t \geq 0$. Если, кроме того, для некоторого числа $\delta_0 > 0$ и любого y_0 из шара $\{y \mid |x_0 - y_0| \leq \delta_0\}$ найдется функция $\tau(\cdot) \in \text{Hom}$, при которой выполнено соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0)| = 0$$

то будем говорить, что решение $x(t, x_0)$ асимптотически устойчиво по Жуковскому.

Другими словами, устойчивость по Жуковскому – это устойчивость по Ляпунову при подходящей перепараметризации каждой из возмущенных траекторий.

Напомним, что по определению неустойчивость по Ляпунову (по Пуанкаре, по Жуковскому) – это отрицание соответствующего вида устойчивости.

Очевидно, что из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость по Жуковскому, а из устойчивости по Жуковскому следует устойчивость по Пуанкаре.

Отметим, что в этих определениях, как обычно, предполагается, что все рассматриваемые решения определены при всех $t \in [0, +\infty)$.

Напомним, что для состояний равновесия все три определения эквивалентны. Для периодических решений легко показать эквивалентность устойчивости по Пуанкаре и по Жуковскому [14]. Для нелинейных систем часто возникает ситуация, когда периодическое решение асимптотически устойчиво по Жуковскому (и, следовательно, по Пуанкаре), но неустойчиво по Ляпунову [14]. В этом случае вводят понятие асимптотической фазы $c(y_0)$, которая в контексте определения асимптотической устойчивости по Жуковскому соответствует перепараметризации $\tau(t) = t + c(y_0)$. Уже отсюда следует, что неустойчивость по Ляпунову не может характеризовать свойство "отталкивания" траекторий друг от друга на таких внутренне неустойчивых объектах как странный аттрактор.

Неустойчивость по Пуанкаре также не может характеризовать "отталкивания" траекторий на странном аттракторе, но уже по другой причине. В численных экспериментах часто (например, на аттракторе Лоренца [5]) по крайней мере одна полутраектория $x(t, x_0)$ всюду плотно заполняет аттрактор. Но тогда неравенство (2) выполнено для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки y_0 из аттрактора. Следовательно, все такие траектории $x(t, x_0)$ устойчивы по Пуанкаре.

Однако в экспериментах на странном аттракторе наблюдается "отталкивание" с течением времени траекторий друг от друга. Такое "отталкивание" соответствует неустойчивости по Жуковскому. Поэтому из трех приведенных выше понятий неустойчивость по Жуковскому наиболее адекватно описывает поведение траекторий на странных аттракторах.

Различные примеры, демонстрирующие неустойчивые по Жуковскому потоки на двумерных компактных многообразиях приведены в [14].

При изучении устойчивости и неустойчивости по Жуковскому важен тот факт, что здесь естественным образом возникают отличные от классических линеаризации. Для описания таких линеаризаций предположим, что все рассматриваемые полутраектории $x(t, x_0)$, $t \geqslant 0$, системы (1) расположены в некотором компакте G и $f(x) \neq 0$, $\forall x \in G$. В этом случае справедлив следующий результат о существовании специальной перепараметризации возмущенных траекторий.

Лемма 1 [14]. Для любого числа $T > 0$ существует число $\delta(T) > 0$, такое, что для любого вектора y_0 из множества $\{y \mid |x_0 - y| \leqslant \delta(T), (y - x_0)^* f(x_0) = 0\}$ найдется дифференцируемая функция $\tau(\cdot) \in \mathrm{Hom}$, удовлетворяющая соотношению

$$(x(t,x_0) - x(\tau(t),y_0))^* f(x(t,x_0)) = 0, \quad \forall t \in [0,T] \tag{3}$$

При этом

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = 1 - \frac{f(x(t,x_0))^*}{|f(x(t,x_0))|^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t,x_0)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t,x_0))\right)^*\right)\times$$

$$\times(x(t,x_0) - x(\tau(t),y_0)) + O(|x(t,x_0) - x(\tau(t),y_0)|^2) \tag{4}$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, x_0))$ – значение матрицы Якоби вектор-функции f в точке $x(t, x_0)$, символом $O(v)$ обозначена величина, для которой при достаточно малых v выполнена оценка $|O(v)| \leqslant cv$, где c – некоторое число, звездочка означает транспонирование.

Из соотношения (4) следует, что для указанной в лемме перепараметризации $\tau(t)$ линейная система первого приближения вдоль траектории $x(t, x_0)$ имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t,x_0)) - g(x(t,x_0))\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t,x_0)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t,x_0))\right)^*\right)\right]z \tag{5}$$

$$f(x(t,x_0))^* z = 0, \quad g(x(t,x_0)) = \frac{f(x(t,x_0))\, f(x(t,x_0))^*}{|f(x(t,x_0))|^2}$$

Рассмотрим также классическую линеаризацию

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,x_0))\,y \tag{6}$$

Лемма 2. Если $y(t)$ – решение системы (6), то

$$z(t) = (I - g(x(t, x_0)))\, y(t)$$

– решение системы (5).

Это утверждение проверяется непосредственной подстановкой указанной здесь вектор-функции $z(t)$ в правую и левую часть системы (5).

Напомним теперь определение ляпуновских экспонент линейной системы

$$dx/dt = A(t)\, x, \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{7}$$

где $A(t)$ – непрерывная ($n \times n$)-матрица. Для этого обозначим через $X(t)$ фундаментальную матрицу системы (7) с начальными данными $X(0) = I$, где I – единичная матрица. Введем в рассмотрение квадратные корни $\rho_i(t)$ из собственных значений матрицы $X(t)^* X(t)$, которые называют сингулярными числами матрицы $X(t)$. В дальнейшем будем полагать, что $\rho_1(t) \geqslant \rho_2(t) \geqslant \ldots \geqslant \rho_n(t)$.

Важен почти очевидный факт, что сингулярные числа матрицы $X(t)$ имеют очень простую геометрическую интерпретацию. Оператор $\mathbf{X}(t)$ преобразует шар единичного радиуса в пространстве $\mathbf{R}^n$ в эллипсоид, главные полуоси которого совпадают с сингулярными числами $\rho_i(t)$. Таким образом, сингулярные числа характеризуют сжимающие и растягивающие свойства оператора $\mathbf{X}(t)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. В частности, справедлива оценка

$$\rho_n(t)\, |x| \leqslant |X(t)\, x| \leqslant \rho_1(t)\, |x|, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

Из сказанного выше вытекает следующее простое утверждение.

Лемма 3. Для сингулярных чисел $\alpha_i(t)$ матрицы $X(t)\, S$ справедлива оценка $\varkappa_1 \rho_i(t) \leqslant \alpha_i(t) \leqslant \varkappa_2 \rho_i(t)$, где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа $n \times n$-матрицы S.

Определение 4. Ляпуновской экспонентой ν_j системы (7) называется число

$$\nu_j = \ln \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, \rho_j(t)^{1/t} \tag{8}$$

Из леммы 3 следует, что при определении ляпуновских экспонент можно отказаться от условия $X(0) = I$, поскольку для матриц $X(t)\, S$ и $X(t)$ при условии $\det S \neq 0$ величина ν_j, определенная по формуле (8), остается одинаковой.

Перейдем к исследованию устойчивости по Ляпунову и по Жуковскому решений $x(t, x_0)$ системы (1), предполагая, что $x_0 \in \Omega$, где Ω – некоторое ограниченное, открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим здесь при исследовании устойчивости по Ляпунову более общий случай системы

$$dx/dt = f(t, x), \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{9}$$

где $f(t, x)$ – дважды непрерывно-дифференцируемая вектор-функция. Рассмотрим решение $x(t, x_0)$ системы (9) с начальными данными $x(0, x_0) = x_0$. Будем здесь предполагать, что для решений системы (9) $x(t, x_0)$, $x_0 \in \Omega$, для сингулярных чисел $\alpha_1(t, x_0) \geqslant \alpha_2(t, x_0) \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n(t, x_0)$ фундаментальной матрицы системы

$$dy/dt = \partial f(t,x)/\partial x|_{x=x(t,x_0)}\, y \tag{10}$$

и некоторой непрерывной функции $\alpha(t)$ выполнено соотношение

$$\alpha_1(t, x_0) \leqslant \alpha(t), \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall x_0 \in \Omega \tag{11}$$

Теорема 1. Пусть функция $\alpha(t)$ ограничена на интервале $(0, +\infty)$. Тогда решение $x(t, x_0)$, $x_0 \in \Omega$, устойчиво по Ляпунову. Если, кроме того,

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = 0$$

то решение $x(t, x_0)$, $x_0 \in \Omega$, асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Введем обозначения: $F_t y = x(t, y)$, $x(0, y) = y$, т.е. $F_t y$ – оператор сдвига вдоль решений системы (9); $(F_t y)' = X(t, y)$, $X(0, y) = I$. Здесь $(F_t y)'$ – производная по y оператора $F_t y$, которая совпадает с фундаментальной матрицей линейной системы (10).

Известно [15], что в сделанных предположениях для любых векторов y, z и числа $t \geqslant 0$ существует вектор w, для которого выполнены соотношения

$$|w - y| \leqslant |y - z|, \quad |F_t y - F_t z| \leqslant |(F_t w)'| \, |y - z| \tag{12}$$

Отсюда и из (11) получим, что для любых y_0, для которых

$$\{w| \; |w - x_0| \leqslant |x_0 - y_0|\} \subset \Omega$$

выполнена оценка

$$|F_t x_0 - F_t y_0| \leqslant |x_0 - y_0| \sup \alpha_1(t, w) \leqslant \alpha(t)|x_0 - y_0|, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{13}$$

Супремум берется на множестве

$$w \in \{w| \; |w - x_0| \leqslant |x_0 - y_0|\} \tag{14}$$

Из оценки (13) сразу следует утверждение теоремы 1.

Предположим теперь, что вместо неравенства (11) для фундаментальной матрицы $X(t, x_0)$ системы (10) с начальным условием $X(0, x_0) = I$ и некоторой вектор-функции $\xi(t)$ выполнены соотношения

$$|\xi(t)| = 1, \quad \forall t \geqslant 0; \quad \max_i \inf_\Omega |X_i(t, x_0)\xi(t)| \geqslant \alpha(t) \tag{15}$$

Здесь $X_i(t, x_0)$-i-я строка матрицы $X(t, x_0)$.

Теорема 2. Пусть для функции $\alpha(t)$ выполнено соотношение

$$\underline{\lim}_{t \to +\infty} \alpha(t) = +\infty \tag{16}$$

Тогда решение $x(t, x_0)$, $x_0 \in \Omega$ неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Зафиксировав некоторую пару $x_0 \in \Omega$ и $t > 0$, выберем в любой δ-окрестности точки x_0 вектор y_0 так, чтобы

$$x_0 - y_0 = \delta\, \xi(t)$$

Будем рассматривать число δ настолько малым, что $\{w| \; |w - x_0| \leqslant \delta\} \subset \Omega$.

Введем также следующие обозначения: $F_{it} z = x_i(t, z)$ – i-я компонента вектор-функции $x(t, z)$.

Известно [15], что для любых фиксированных чисел t, i и векторов x_0, y_0 существует вектор $w_i \in \mathbf{R}^n$, для которого

$$|x_0 - w_i| \leqslant |x_0 - y_0|, \quad F_{it} x_0 - F_{it} y_0 = X_i(t, w_i)(x_0 - y_0) \tag{17}$$

Используя последнее соотношение, получим оценку

$$|F_t x_0 - F_t y_0| = \left(\sum_i |X_i(t, w_i)(x_0 - y_0)|^2 \right)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \delta \max\{|X_1(t, w_1)\xi(t)|, \ldots, |X_n(t, w_n)\xi(t)|\} \geqslant \delta \max_i \inf |X_i(t, w)\xi(t)| \geqslant \delta\alpha(t)$$

Инфимум берется на множестве (14).

Из этой оценки и условия (16) следует, что для любых положительных чисел ε и δ существуют вектор y_0 и число t, при которых

$$|x_0 - y_0| \leqslant \delta, \quad |F_t x_0 - F_t y_0| \geqslant \varepsilon$$

Последнее и означает, что решение $x(t, x_0)$ неустойчиво по Ляпунову.

Теорема 1 устанавливает асимптотическую устойчивость по Ляпунову потока решений с начальными данными из Ω, если их линеаризации имеют отрицательные ляпуновские экспоненты. Здесь не возникают эффекты, открытые Перроном для неправильных линеаризаций индивидуальных решений [2]. Грубо говоря, здесь требование равномерности экспоненциального убывания "по t_0" сингулярных чисел фундаментальной матрицы линеаризации (а это одно из свойств правильных устойчивых линейных систем) в классических теоремах Ляпунова и его последователей [1, 16] заменено требованием равномерности "по x_0". Таким образом, перроновские эффекты возможны лишь на границах устойчивого по первому приближению потока.

Требования (15), (16) в теореме 2 – это по существу требование положительности хотя бы одной из ляпуновских экспонент линеаризаций потока решений с начальными данными из Ω с небольшим добавлением: "неустойчивые направления $\xi(t)$" (или – неустойчивые многообразия) этих решений покоординатно непрерывно зависят от начальных данных x_0. В самом деле если это свойство имеет место, то рассматривая, если это необходимо, область Ω как объединение областей Ω_i сколь угодно малого диаметра, на которых выполнены условия (15) и (16), получим неустойчивость по Ляпунову всего потока решений с начальными данными из Ω.

Рассмотрим теперь систему (1) и линейные приближения (5) для решений $x(t, x_0)$, $x_0 \in \Omega$, предполагая, что $x(t, x_0) \in \Omega, \forall t \geqslant 0$, и $f(x) \neq 0, \forall x \in \overline{\Omega}$. Хорошо известно, что $f(x(t, x_0))$ является решением системы (6). Поэтому можно рассмотреть линейно независимую систему решений $f(x(t, x_0)), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ системы (6) и матрицы

$$Y(t, x_0) = (f(x(t, x_0)), \tilde{Y}(t)), \quad \tilde{Y}(t, x_0) = (y_2(t), \ldots, y_n(t))$$

$$Z(t, x_0) = (I - g(x(t, x_0)))\, Y(t)$$

Предположим, что для сингулярных чисел $\beta_1(t, x_0) \geqslant \ldots \geqslant \beta_n(t, x_0)$ фундаментальной матрицы $Z(t, x_0)$ системы (5) и некоторой непрерывной функции $\beta(t)$ справедлива оценка

$$\beta_1(t, x_0) \leqslant \beta(t), \qquad \forall t \geqslant 0 \quad \forall x_0 \in \Omega \tag{18}$$

Теорема 3. Если

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(t) = 0$$

то решение $x(t, x_0)$, $x_0 \in \Omega$, асимптотически устойчиво по Жуковскому.

Доказательство. Зафиксируем число T таким, чтобы $\beta(t) \leqslant \frac{1}{2}$, $\forall t \geqslant T$. По числу T в силу леммы 1 можно выбрать $\delta(T) > 0$ таким, что для $x_0 \in \Omega$ и любого y_0, удовлетворяющего неравенствам

$$|y_0 - x_0| \leqslant \delta(T), \quad (y_0 - x_0)^* f(x_0) = 0$$

найдется дифференцируемая функция $\tau(t)$, удовлетворяющая соотношениям (3), (4).

Выберем число $\delta(T)$ также еще и таким, чтобы выполнялось включение

$$\{y \mid |x_0 - y| \leqslant \delta(T)\} \subset \Omega$$

Сделаем теперь в системе (1) замену независимой переменной $x(t) \to x(\tau(t))$:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=f(x(\tau(t)))\frac{d\tau(t)}{dt} \tag{19}$$

Ясно, что для этой системы имеется некоторый аналог первого интеграла (3) и линеаризация системы (19) вдоль решения $x(t, x_0)$ в силу (4) имеет вид (5). Поэтому, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 1, и воспользовавшись очевидным равенством $x(\tau(t), x_0) = x(t, x_0)$, получим, что

$$|x(T,x_0)-x(\tau(T),y_0)|\leqslant \beta(T)|x_0-y_0|\leqslant |x_0-y_0|/2 \tag{20}$$

Рассматривая далее вектор $q_0 = x(T, x_0)$ в качестве нового начального данного и применяя вновь лемму 1, повторим все приведенные выше рассуждения на промежутке $[0, T]$ для решения $x(t, q_0)$. В этом случае, учитывая (20), получим:

$$|x(2T,x_0)-x(\tau(2T),y_0)|\leqslant |x_0-y_0|/4$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим

$$|x(t,x_0)-x(\tau(t),y_0)|\leqslant \max_{t\geqslant 0}\beta(t)|x_0-y_0|$$

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t,x_0)-x(\tau(t),y_0)|=0$$

Эти соотношения и означают, что решение $x(t, x_0)$ асимптотически устойчиво по Жуковскому.

Рассмотрим теперь точку $x_0 \in \Omega$ и множество $\Phi(x_0) = \{u \mid u \in \Omega,\ u^*f(x_0) = 0,\ |u - x_0| \leqslant \gamma\}$ (γ – некоторое число).

Предположим, что вместо неравенства (18) для введенной ранее матрицы $Z(t, u)$ и некоторой вектор-функции $\xi(t)$ выполнены соотношения

$$\xi(t)^*f(x_0)=0,\quad |\xi(t)|=1,\quad \forall t\geqslant 0$$

$$\max_i \inf_{\Phi(x_0)} |Z_i(t,u)\xi(t)|\geqslant \alpha(t),\quad \forall t\geqslant 0 \tag{21}$$

Теорема 4. Пусть для функции $\alpha(t)$ выполнено соотношение (16). Тогда решение $x(t, x_0)$ неустойчиво по Жуковскому.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть решение $x(t, x_0)$ устойчиво по Жуковскому. В этом случае существует число $\delta > 0$, такое, что для любого y_0, удовлетворяющего соотношениям $|x_0 - y_0| \leqslant \delta$ и $(x_0 - y_0)^*f(x_0) = 0$, существует перепараметризация $\tau(t)$, для которой соотношения (3) и (4) выполнены при всех $t \geqslant 0$ [14]. Таким образом, здесь можно перейти к системе (19) при всех $t \geqslant 0$. Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 2, и учитывая, что линеаризацией системы (19) вдоль решения $x(t, x_0)$ является система (5), получим, что для любого $t > 0$ существует вектор y_0, такой, что

$$|x_0-y_0|\leqslant\delta,\quad (x_0-y_0)^*f(x_0)=0,\quad |x(t,x_0)-x(\tau(t),y_0)|\geqslant\alpha(t)\delta$$

Отсюда, из равенства (3) и условия (16) следует неустойчивость по Жуковскому решения $x(t, x_0)$.

Отметим, что основным отличием теорем 3 и 4 от полученных ранее [13, 14] является отказ от предположения правильности рассматриваемых линеаризаций. Вместо этого предполагается, что свойство устойчивости (или неустойчивости) первого приближения сохраняется при малом шевелении начальных данных x_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. *Perron O.* Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen // Mathematische Zeitschrift. 1930. V. 32. N 5. S. 703–728.
3. *Четаев Н.Г.* Теорема о неустойчивости для правильных систем // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 4. С. 323–326.
4. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 204 с.
5. Странные аттракторы. Пер. с англ. / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. 253 с.
6. *Рабинович М.И.* Стохастические автоколебания и турбулентность // Успехи физ. наук. 1978. Т. 125. Вып. 1. С. 123–168.
7. *Reitmann V.* Regulare und chaotische Dynamik. Teubner, Stuttgart, 1996. 360 s.
8. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
9. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.
10. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 312 с.
11. *Андронов А.А., Витт А.А.* Об устойчивости по Ляпунову // ЖЭТФ. 1933. Т. 3. Вып. 5. С. 373–374.
12. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
13. *Демидович Б.П.* Об орбитальной устойчивости ограниченных решений автономной системы I, II // Дифферен. уравнения. 1968. Т. 4. N 4. С. 575–588; Т. 4. N 8. С. 1359–1373.
14. *Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B.* Local Instability and Localization of Attractors. From Stochastic Generator to Chua's Systems. Acta Applicandae Mathematicae. V. 40. 1995. P. 179–243.
15. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. I, II. М.: Наука, 1981. 543 с.; 1984, 640 с.
16. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
17.IX.1997