УДК 531.36

© 1998 г. А.В. Карапетян, И.С. Лагутина

О ВЛИЯНИИ ДИССИПАТИВНЫХ И ПОСТОЯННЫХ СИЛ НА ВИД И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

Рассматриваются механические системы с циклическими координатами, на которые действуют диссипативные силы с полной диссипацией и постоянные силы, приложенные только к циклическим переменным. Обсуждаются вопросы существования стационарных движений таких систем и условия их устойчивости. Показано, в частности, что в случае, когда функция Релея пропорциональна кинетической энергии, условия устойчивости стационарных движений изучаемой системы совпадают или (при некоторых дополнительных условиях) близки к условиям устойчивости стационарных движений соответствующей консервативной системы. На примере физического маятника показано, что в общем случае аналогичные выводы не имеют места: влияние диссипативных и постоянных сил может приводить к дестабилизации устойчивых движений системы.

1. Рассмотрим консервативную механическую систему с n степенями свободы и предположим, что ни кинетическая энергия T, ни потенциальная энергия V системы не зависят от $m < n$ обобщенных координат. Обозначим эти координаты через $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)^{\mathrm{T}}$, а остальные координаты – через $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k)^{\mathrm{T}}$ ($k + m = n$; верхний индекс т означает транспонирование). Координаты $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$, как известно, называются соответственно позиционными и циклическими. Таким образом

$$T = \tfrac{1}{2}[(\mathbf{A}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) + 2(\mathbf{B}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{s}}) + (\mathbf{C}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{s}})], \quad V = V(\mathbf{r})$$

Здесь $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ – симметричные матрицы размерами $k \times k$ и $m \times m$ соответственно, $\mathbf{B}$ – $(m \times k)$-матрица, причем

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{Vmatrix}$$

– матрица определенно положительной квадратичной формы.

Для систем с циклическими координатами широко распространены две постановки задачи об установившихся режимах движения. В одном случае предполагается, что на рассматриваемую систему не действует никаких дополнительных сил. При этом система допускает m циклических интегралов $\partial T/\partial\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{c}$ и может совершать стационарные движения вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_c^0, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} = \dot{\mathbf{s}}_c^0 t + \mathbf{s}^0, \quad \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_c^0 = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{r}_c^0)\mathbf{c} \tag{1.1}$$

где постоянные $\mathbf{s}^0$ произвольны, а постоянные $\mathbf{r}_c^0$ определяются из системы

$$\partial V_c / \partial \mathbf{r} = 0, \quad V_c = V(\mathbf{r}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{r})\mathbf{c}, \mathbf{c}) \tag{1.2}$$

В другом случае предполагается, что на рассматриваемую систему действуют управляющие силы, обеспечивающие постоянство обобщенных циклических скоростей на всех движениях: $\dot{\mathbf{s}} \equiv \boldsymbol{\omega}$. При этом система допускает относительные равновесия вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\omega}^{0}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\omega} t + \mathbf{s}^{0}, \quad \dot{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\omega} \tag{1.3}$$

где постоянные $\mathbf{s}^0$ произвольны, а постоянные $\mathbf{r}_{\omega}^{0}$ определяются из системы:

$$\partial V_{\omega} / \partial \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad V_{\omega} = V(\mathbf{r}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}(\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \tag{1.4}$$

Первая постановка задачи восходит к Раусу [1], а вторая – к Пуанкаре [2]. Согласно теореме Лагранжа относительное равновесие (1.3) устойчиво (по отношению к $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$), если измененный потенциал V_{ω} принимает в точке $\mathbf{r}_{\omega}^{0}$ строго минимальное значение (см. [3–6]). Согласно теореме Рауса стационарное движение (1.1) устойчиво (по отношению к $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ и $\dot{\mathbf{s}}$), если приведенный потенциал V_c принимает в точке $\mathbf{r}_c^0$ строго минимальное значение (см. [1, 7–9]). Заметим, что существует полное соответствие стационарных движений (1.1) и относительных равновесий (1.3) при определенном соотношении произвольных постоянных $\mathbf{c}$ и $\boldsymbol{\omega}$, а также некоторое соответствие условий их устойчивости (см. [2, 10–14]).

Однако, и первая, и вторая постановка задачи в некотором смысле идеализированы, поскольку не учитывают влияние диссипативных сил, которые всегда имеют место в реальных системах и, в частности, разрушают циклические интегралы свободной системы. Кроме того, практическая реализация управляющих сил, обеспечивающих постоянство обобщенных циклических скоростей на всех движениях управляемой системы (независимо от изменения позиционных переменных), весьма затруднительна.

В данной работе предполагается, что помимо потенциальных сил на систему действуют также диссипативные силы с полной диссипацией, производные от функции Релея $f\Phi$ (f – положительный параметр), где

$$\Phi = \tfrac{1}{2}[(\mathbf{D}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) + 2(\mathbf{E}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{s}}) + (\mathbf{F}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{s}})]$$

и постоянные силы $f\mathbf{p}$. Здесь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{F}$ – симметричные матрицы размером $k \times k$ и $m \times m$ соответственно, $\mathbf{E}$ – $(m \times k)$-матрица, $\mathbf{p}$ – n-мерный вектор вида $(0, \ldots 0, p_1, \ldots, p_m)^{\mathrm{T}}$ (нулевые компоненты вектора $\mathbf{p}$ отвечают позиционным переменным). При этом уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} - f\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{r}}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{s}}} = f\mathbf{p} - f\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{s}}} \tag{1.5}$$

Эта постановка задачи восходит к работе Г.К. Пожарицкого [15], в которой предполагалось, что $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ – постоянные матрицы. Были рассмотрены [16] и некоторые частные случаи непостоянных матриц $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$. Однако в обеих этих работах предполагалось также, что вектор $\mathbf{p}$ не имеет нулевых компонент, т.е. постоянные силы приложены по всем переменным. Заметим, что практическая реализация постоянных сил по позиционным переменным весьма затруднительна, а по циклическим – легко осуществима во многих прикладных задачах (гироскоп в кардановом подвесе, тело со струнным приводом и т.п.)

2. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями (1.5), и предположим, что $\Phi = T$, т.е. диссипативная функция Релея пропорциональна кинетической энергии. Такая диссипация моделирует, например, влияние сопротивляющейся среды. При этом система (1.5) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} - f\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{s}}} = f\left(\mathbf{p} - \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{s}}}\right) \tag{2.1}$$

Система (2.1) допускает частные интегралы

$$\partial T/\partial \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{p} \tag{2.2}$$

определяющие инвариантное множество рассматриваемой системы. Это инвариантное множество асимптотически устойчиво в целом, поскольку из второй группы системы (2.1) следует

$$(\partial T / \partial \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{p}) = (\partial T / \partial \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{p})_0 e^{-f(t-t_0)}$$

(напомним, что $f > 0$; нижний нулевой индекс указывает, что соответствующее выражение вычисляется при $t = t_0$).

Рассмотрим систему на асимптотически устойчивом инвариантном множестве (2.2). Разрешая соотношения (2.2) относительно обобщенных циклических скоростей, имеем

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{r})(\mathbf{p} - \mathbf{B}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}) \tag{2.3}$$

Введем функцию Рауса

$$R = [T - V - (\mathbf{p}, \dot{\mathbf{s}})]_{(2.3)} = R(\mathbf{r}; \dot{\mathbf{r}}; \mathbf{p}) = R_2 + R_1 + R_0$$

$$R_2 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{M}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}), \quad R_1 = (\mathbf{g}_p(\mathbf{r}), \dot{\mathbf{r}}), \quad R_0 = -V_p(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{A} - \mathbf{B}^t\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{g}_p(\mathbf{r}) = \mathbf{B}^t\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}, \quad V_p(\mathbf{r}) = V + \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}, \mathbf{p})$$

Таким образом, движение системы на асимптотически устойчивом инвариантном множестве (2.2) описывается уравнениями Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} - f\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \tag{2.4}$$

Учитывая структуру функции Рауса, перепишем систему (2.4) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{G}_p\dot{\mathbf{r}} - \frac{\partial V_p}{\partial \mathbf{r}} - f\mathbf{g}_p - f\frac{\partial R_2}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \tag{2.5}$$

$$\left(\mathbf{G}_p = \left(\frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \mathbf{r}}\right)^t - \left(\frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \mathbf{r}}\right), \ \text{т.е.}\ \mathbf{G}_p^t = -\mathbf{G}_p\right)$$

Уравнения (2.5) описывают движение некоторой системы с k степенями свободы, роль кинетической энергии которой играет функция R_2. Назовем эту систему "приведенной". Очевидно, "приведенная" система находится под действием потенциальных сил, производных от "приведенного" потенциала V_p, гироскопических сил $\mathbf{G}_p\dot{\mathbf{r}}$, диссипативных сил, производных от функции Релея fR_2 и обобщенных позиционных сил $-f\mathbf{g}_p$ (вообще говоря, непотенциальных).

Заметим, что если $f = 0$, то частные интегралы (2.2) становятся общими, а система (2.5) и функция V_p совпадают с приведенной по Раусу системой и приведенным потенциалом (без кавычек) соответственно.

Положениям равновесия $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p^0$, $\dot{\mathbf{r}} = 0$ "приведенной" системы отвечают стационарные движения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_p^0, \quad \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad \mathbf{s} = \dot{\mathbf{s}}_p^0 t + \mathbf{s}^0, \quad \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_p^0 = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{r}_p^0)\mathbf{p} \tag{2.6}$$

рассматриваемой системы. При этом постоянные $\mathbf{s}^0$ произвольны, а постоянные $\mathbf{r}_p^0$ определяются из системы

$$\partial V_p/\partial \mathbf{r} + f\mathbf{g}_p = 0 \tag{2.7}$$

Очевидно, система (2.7) переходит в систему (1.2), а стационарные движения (2.6) – в стационарные движения (1.1) не только при $f = 0$ (и $\mathbf{p} = \mathbf{c}$), что естественно, но и при $\mathbf{g}_p \equiv 0$. Последнее имеет место при условии $\mathbf{B} \equiv 0$, которое означает, что кинетическая энергия не содержит произведений позиционных и циклических скоростей. При этом уравнение (2.5) допускает обобщенное уравнение энергии

$$d(R_2 + V_p)/dt = -2fR_2 \leqslant 0 \tag{2.8}$$

Таким образом, справедливы следующие утверждения (ср. с [16]).

Теорема 2.1. Если $\mathbf{B} \equiv 0$ и $\mathbf{p} = \mathbf{c}$, то стационарные движения системы, находящейся под действием диссипативных сил, производных от функции Релея, пропорциональной кинетической энергии, и постоянных сил, приложенных только по циклическим переменным, совпадают со стационарными движениями соответствующей консервативной системы.

Теорема 2.2. Если $\mathbf{B} \equiv 0$ и "приведенный" потенциал V_p имеет строгий локальный минимум в точке $\overset{0}{\mathbf{r}}_p$ и эта точка изолирована от других стационарных точек "приведенного" потенциала, то стационарное движение (2.6) асимптотически устойчиво (по отношению к $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{s}}$).

Теорема 2.3. Если $\mathbf{B} \equiv 0$ и "приведенный" потенциал V_p принимает стационарное значение в точке $\overset{0}{\mathbf{r}}_p$, которое не является даже нестрогим минимумом функции V_p, и эта точка изолирована от других стационарных точек "приведенного" потенциала, то стационарное движение (2.6) неустойчиво.

Теорема 2.1 следует из соотношения (2.7), теорема 2.2 – из асимптотической устойчивости инвариантного множества (2.2) и теоремы Барбашина – Красовского [17], а теорема 2.3 – из теоремы Красовского [17].

3. Рассмотрим теперь случай $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \not\equiv 0$ и предположим, что $\mathbf{B}(\overset{0}{\mathbf{r}}_c) = 0$, где $\overset{0}{\mathbf{r}}_c$ – решение системы (1.2). Тогда при $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ из уравнения (2.7) следует, что $\overset{0}{\mathbf{r}}_p = \overset{0}{\mathbf{r}}_c$. Таким образом справедлива

Теорема 3.1. Если $\mathbf{B}(\overset{0}{\mathbf{r}}_c) = 0$ и $\mathbf{p} = \mathbf{c}$, то стационарное движение (2.6) системы, находящейся под действием диссипативных сил, производных от функции Релея, пропорциональной кинетической энергии, и постоянных сил, приложенных только по циклическим переменным, совпадает со стационарным движением соответствующей консервативной системы.

В рассматриваемом случае обобщенное уравнение энергии принимает вид

$$\frac{d}{dt}(R_2 + V_p) = -2fR_2 - f(\mathbf{g}_p(\mathbf{r}), \dot{\mathbf{r}}) \tag{3.1}$$

Правая часть соотношения (3.1) всегда знакопеременна при $\mathbf{g}_p(\mathbf{r}) \neq 0$, поэтому непосредственное применение теорем прямого метода Ляпунова для исследования устойчивости стационарных движений (2.6) невозможно (даже при условиях $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ и $\mathbf{g}_p(\overset{0}{\mathbf{r}}_c) = 0$ ($\mathbf{B}(\overset{0}{\mathbf{r}}_c) = 0$)). Однако, если $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ и не только $\mathbf{g}_p(\mathbf{r})$, но и $\partial \mathbf{g}_p/\partial \mathbf{r}$ обращаются в нуль при $\mathbf{r} = \overset{0}{\mathbf{r}}_c$, то соотношение (3.1) можно представить в виде

$$\begin{gathered} d/dt(R_2(\mathbf{r}_c^0; \dot{\mathbf{r}}) + \delta^2 V_p(\mathbf{r})) = -2fR_2(\mathbf{r}_c^0; \dot{\mathbf{r}}) + o(\|\delta\mathbf{r}\|^2 + \|\dot{\mathbf{r}}\|^2) \\ \delta^2 V_p(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}((\partial^2 V_p(\mathbf{r})/\partial \mathbf{r}^2)_0 \delta\mathbf{r}, \delta\mathbf{r}), \quad \delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c^0 \end{gathered} \tag{3.2}$$

Нижний нулевой индекс означает, что соответствующее выражение вычисляется при $\mathbf{r} = \overset{0}{\mathbf{r}}_c$.

Правая часть соотношения (3.2) по-прежнему знакопеременна. Однако, из этого соотношения следует, что линеаризованные уравнения возмущенного движения "приведенной" системы при $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ в окрестности ее положения равновесия $\mathbf{r} = \overset{0}{\mathbf{r}}_p = \overset{0}{\mathbf{r}}_c$, $\dot{\mathbf{r}} = 0$ допускают "энергетическое" соотношение

$$d / dt(R_2(\mathbf{r}_c^0;\ \dot{\mathbf{r}}) + \delta^2 V_p(\mathbf{r})) = -2fR_2(\mathbf{r}_c^0; \dot{\mathbf{r}}) \leqslant 0 \tag{3.3}$$

Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.2. Если $\mathbf{B}(\overset{0}{\mathbf{r}}_c) = 0$, $(\partial \mathbf{g}_p/\partial \mathbf{r})_0 = 0$, $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ и все собственные значения матрицы $(\partial^2 V_p/\partial \mathbf{r}^2)_0$ положительны, то стационарное движение (2.6) асимптотически устойчиво (по отношению к $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ и $\dot{\mathbf{s}}$).

Теорема 3.3. Если $\mathbf{B}(\overset{0}{\mathbf{r}}_c) = 0$, $(\partial \mathbf{g}_p/\partial \mathbf{r})_0 = 0$, $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ и среди собственных значений матрицы $(\partial^2 V_p/\partial \mathbf{r}^2)_0$ есть отрицательные, то стационарное движение (2.6) неустойчиво.

Действительно, при условиях теоремы 3.2 тривиальное решение линеаризованных уравнений возмущенного движения "приведенной" системы в окрестности ее положения равновесия $\mathbf{r} = \overset{0}{\mathbf{r}}_p = \overset{0}{\mathbf{r}}_c$, $\dot{\mathbf{r}} = 0$ асимптотически устойчиво согласно теореме Барбашина – Красовского. Следовательно, все корни соответствующего характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости. Последнее означает, что рассматриваемое равновесие "приведенной" системы асимптотически устойчиво (по отношению к $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$) в силу полных уравнений возмущенного движения "приведенной" системы. Вспоминая, что "приведенная" система описывает движение исходной системы на асимптотически устойчивом инвариантном множестве, заключаем, что стационарное движение (2.6) рассматриваемой системы асимптотически устойчиво (по отношению к $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{s}}$).

При условиях теоремы 3.3 характеристическое уравнение линеаризованной "приведенной" системы имеет корень в правой полуплоскости. Следовательно, стационарное движение системы (2.6) неустойчиво согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению и замечанию Четаева [5] (для доказательства неустойчивости можно ограничиться исследованием возмущенных движений на инвариантном множестве).

4. Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{g}_p(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} \Gamma_p(\mathbf{r})$, где $\Gamma_p(\mathbf{r})$ – некоторая скалярная функция. При этом рассматриваемая система может совершать стационарные движения (2.6), если постоянные $\overset{0}{\mathbf{r}}_p$ удовлетворяют системе (см. (2.7))

$$\partial W_{p,f} / \partial \mathbf{r} = \mathbf{0}; \quad W_{p,f} = V_p(\mathbf{r}) + f\Gamma_p(\mathbf{r}) \tag{4.1}$$

Кроме того, в рассматриваемом случае система (2.5) допускает обобщенное уравнение энергии вида

$$d(R_2 + W_{p,f}) / dt = -fR_2 \leqslant 0 \tag{4.2}$$

Будем называть функцию W_{pf} возмущенным "приведенным" потенциалом. Если коэффициент диссипации f достаточно мал, то решение системы (4.1) имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_p^0(f) = \mathbf{r}_p^0 + f\mathbf{r}_p^1 + \ldots \tag{4.3}$$

где $\overset{0}{\mathbf{r}}_p$ – решение системы (4.1) при $f = 0$, т.е., если $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ – решение системы (1.2). При этом стационарные движения (2.6) рассматриваемой системы имеют вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_p^0(f), \quad \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad \mathbf{s} = \dot{\mathbf{s}}_p^0(f)t + \mathbf{s}^0, \quad \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_p^0(f) = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{r}_p^0(f))\mathbf{p} \tag{4.4}$$

Очевидно, точка $\overset{0}{\mathbf{r}}_p(f)$ доставляет стационарное значение возмущенному "приведенному" потенциалу W_{pf}, а стационарное движение (4.4) асимптотически устойчиво (неустойчиво), если точка $\overset{0}{\mathbf{r}}_p(f)$ доставляет строго минимальное значение (не доставляет даже нестрого минимального значения) возмущенному "приведенному" потенциалу и изолирована от других стационарных точек этого потенциала (см. (4.1) и (4.2)).

Заметим, что $\mathbf{g}_p(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} \Gamma_p(\mathbf{r})$, если и только если система гироскопически несвязанна, т.е. если и только если $\mathbf{G}_p(\mathbf{r}) \equiv 0$ [18]. В частности, $\mathbf{g}_p(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} \Gamma_p(\mathbf{r})$ при $\dim \mathbf{r} = 1$.

Если $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ и коэффициент f достаточно мал, то величина $\overset{0}{\mathbf{r}}_p(f)$ близка к $\overset{0}{\mathbf{r}}_c$ (см. (4.3)). Кроме того, при этом возмущенный "приведенный" потенциал $W_{p,f}(\mathbf{r})$ имеет строгий минимум (не имеет даже нестрогого минимума) в точке $\overset{0}{\mathbf{r}}_p(f)$, если все собственные значения матрицы $\partial^2 V_c/\partial \mathbf{r}^2$ положительны (найдется отрицательное собственное значение матрицы $\partial^2 V_c/\partial \mathbf{r}^2$) в точке $\overset{0}{\mathbf{r}}_c$. Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.1. Стационарные движения (4.4) гироскопически несвязанной системы, находящейся под действием диссипативных сил, производных от функции Релея, пропорциональной кинетической энергии, и постоянных сил, приложенных только по циклическим переменным, близки при $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ к стационарным движениям (1.1) соответствующей консервативной системы.

Теорема 4.2. Стационарное движение (4.4) асимптотически устойчиво (по отношению к $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{s}}$), если $\mathbf{p} = \mathbf{c}$, коэффициент диссипации мал и приведенный потенциал соответствующей консервативной системы имеет строгий минимум на соответствующем стационарном движении (1.1), причем наличие минимума определяется уже по второй вариации этого приведенного потенциала.

Теорема 4.3. Стационарное движение (4.4) неустойчиво, если $\mathbf{p} = \mathbf{c}$, коэффициент диссипации мал и приведенный потенциал соответствующей консервативной системы не имеет даже нестрогого минимума на соответствующем стационарном движении (1.1), причем отсутствие минимума определяется уже по второй вариации этого приведенного потенциала.

Теорема 4.1 следует из соотношения (4.3), а теоремы 4.2 и 4.3 – из соотношения (4.2) и близости (при $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ и малых f) возмущенного "приведенного" потенциала $W_{p,f}(\mathbf{r})$ и приведенного потенциала $V_c(\mathbf{r})$.

Замечание. Теоремы 4.1–4.3 остаются справедливыми не только при $\mathbf{p} = \mathbf{c}$, но и при $\mathbf{p}$, близких к $\mathbf{c}$. Кроме того, теорема 4.1 справедлива и для гироскопически связанных систем (см. (2.7)).

Таким образом, даже в рассмотренном простейшем случае, когда диссипативная функция Релея пропорциональна кинетической энергии, стационарные движения системы, на которую действуют диссипативные и постоянные силы, приложенные только по циклическим переменным, и условия их устойчивости совпадают со стационарными движениями соответствующей консервативной системы и условиями их устойчивости или близки к ним лишь при дополнительных условиях, указанных выше. В общем случае аналогичные выводы не имеют места (см. следующий раздел).

5. Рассмотрим физический маятник, подвешенный на горизонтальной оси Ox, которая может вращаться вокруг вертикали OZ. Предположим, что ось Ox – одна из главных осей инерции тела для точки O. Две другие главные оси обозначим через Oy и Oz и предположим, что центр масс тела находится на оси Oz на расстоянии d от точки O. Пусть m – масса тела, A, B, C – его главные моменты инерции относительно осей Ox, Oy, Oz, g – ускорение свободного падения. Положение тела определяется координатами θ и ψ, где θ – угол между нисходящей вертикалью и осью Oy, а ψ – угол поворота оси Ox вокруг оси OZ. Тогда кинетическая T и потенциальная V энергии тела имеют вид

$$T = \tfrac{1}{2}[A\dot{\theta}^2 + J(\theta)\dot{\psi}^2], \quad V = -mgd\cos\theta; \quad J(\theta) = B\sin^2\theta + C\cos^2\theta$$

Предположим, что на рассматриваемую систему действуют диссипативные силы (производные от функции Релея fT) и постоянный момент fp, приложенный вдоль оси OZ. Тогда уравнения движения тела имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta} - f\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = fp - f\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \tag{5.1}$$

В соответствии с результатами, изложенными выше, введем функцию Рауса $R = T - V - p\dot{\psi}$, где обобщенная циклическая скорость $\dot{\psi}$ исключается с помощью частного интеграла $\partial T/\partial\dot{\psi} = p$ системы (5.1). При этом

$$R = \tfrac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - V_p(\theta), \quad V_p = V + \tfrac{1}{2}p^2 / J(\theta) \tag{5.2}$$

Очевидно, соотношения (5.2) совпадают с соотношениями, определяющими функцию Рауса и приведенный потенциал соответствующей консервативной системы, которая получается из исходной при $f = 0$ (при этом p – постоянная общего интеграла $\partial T/\partial\dot{\psi} = p$).

Учитывая, что система гироскопически несвязанна (кинетическая энергия не содержит $\dot{\theta}\dot{\psi}$), заключаем, согласно результатам разд. 2, что все выводы о существовании и устойчивости стационарных движений физического маятника в классической постановке ($f = 0$) распространяются на случай $f > 0$.

Таким образом, в рассматриваемой задаче существуют стационарные движения

$$\theta = 0, \ \dot{\theta} = 0, \ \dot{\psi} = p/C \tag{5.3}$$

$$\theta = \pi, \ \dot{\theta} = 0, \ \dot{\psi} = p/C \tag{5.4}$$

$$\theta = \theta_p, \ \dot{\theta} = 0, \ \dot{\psi} = p/J(\theta_p) \tag{5.5}$$

где θ_p – корень уравнения

$$\frac{p^2}{mdg} = \frac{J^2(\theta)}{(B-C)\cos\theta} \tag{5.6}$$

Условия устойчивости (неустойчивости) стационарных движений (5.3)–(5.5) имеют соответственно вид

$$mgd - \frac{(B-C)p^2}{C^2} > 0 \quad (< 0) \tag{5.7}$$

$$-mgd - \frac{(B-C)p^2}{C^2} > 0 \quad (< 0) \tag{5.8}$$

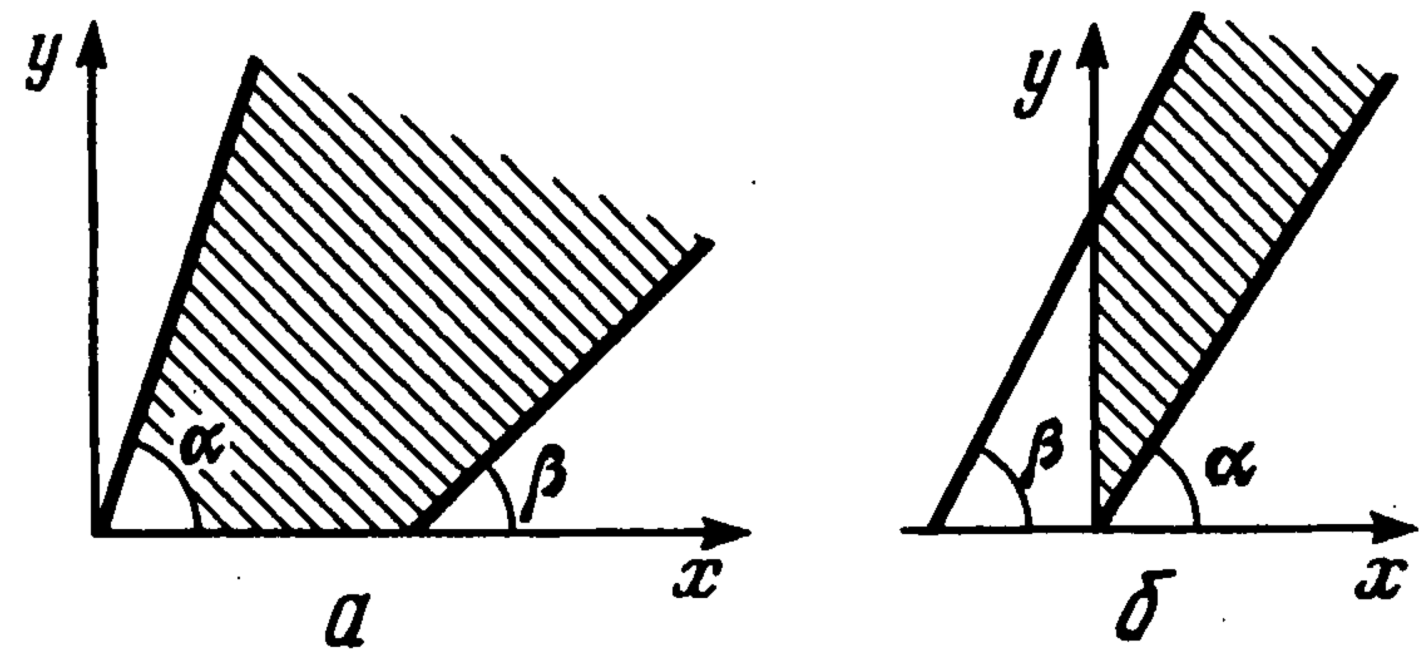
$$(B-C)\left[1 + \frac{4(B-C)\cos^2\theta_p}{J(\theta)_p}\right] > 0 \quad (< 0) \tag{5.9}$$

и совпадают с условиями устойчивости (неустойчивости) системы без диссипативных и постоянных сил (см., например, [14]).

Рассмотрим теперь случай, когда диссипативная функция Релея $f\Phi$ имеет ту же структуру, что и кинетическая энергия тела, но не пропорциональна последней:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}[D\dot{\theta}^2 + I(\theta)\dot{\psi}^2], \quad I(\theta) = E\sin^2\theta + F\cos^2\theta \quad (D > 0, \ E > 0, \ F > 0)$$

При этом уравнения движения тела отличаются от (5.1) заменой в правых частях $f\,\partial T/\partial\dot{\theta}$ на $f\,\partial\Phi/\partial\dot{\theta}$ и $f\,\partial T/\partial\dot{\psi}$ на $f\,\partial\Phi/\partial\dot{\psi}$, и не допускают, вообще говоря, даже частных интегралов.



Фиг. 1

Тем не менее эти уравнения допускают стационарные решения вида

$$\theta = 0,\ \dot{\theta} = 0,\ \dot{\psi} = p/F \tag{5.10}$$

$$\theta = \pi,\ \dot{\theta} = 0,\ \dot{\psi} = p/F \tag{5.11}$$

$$\theta = \theta_p,\ \dot{\theta} = 0,\ \dot{\psi} = p/I(\theta_p) \tag{5.12}$$

где θ_p – корень уравнения

$$\frac{p^2}{mdg} = \frac{I^2(\theta)}{(B-C)\cos\theta} \tag{5.13}$$

В некотором смысле решения (5.10)–(5.12) аналогичны решениям (5.3)–(5.5) (даже с учетом различия уравнений (5.6) и (5.13)).

Исследование устойчивости стационарных движений (5.10)–(5.12), проведенное на основе анализа корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущенного движения, приводит к следующим результатам. Решения (5.10), (5.11) устойчивы (неустойчивы) при, соответственно, условиях

$$mgd - (p/F)^2(B-C) > 0 \quad (<0) \tag{5.14}$$

$$mgd + (p/F)^2(B-C) < 0 \quad (>0) \tag{5.15}$$

При исследовании устойчивости движения (5.12) будем считать f малой величиной. Тогда условия устойчивости (неустойчивости) имеют вид

$$(B-C)[D(B\sin^2\theta_p + C\cos^2\theta_p)(B + 3(B-C)\cos^2\theta_p) +$$

$$+4A\cos^2\theta_p(FB - EC)] > 0 \quad (<0) \tag{5.16}$$

$$(B-C)[E + 3(E-F)\cos^2\theta_p] > 0 \quad (<0)$$

Геометрическая интерпретация этих условий представлена на фигуре, где введены обозначения: $x = F/B$, $y = E/B$. Угол α находится из соотношения $\mathrm{tg}\alpha = 1 + (3\cos^2\theta)^{-1}$, а β – из соотношения $\mathrm{tg}\beta = C/B$. Область устойчивости заштрихована. Случаи *а* и *б* отвечают, соответственно, условиям $C < B$ и $3C\cos^2\theta > 3B\cos^2\theta + B$. При невыполнении этих условий движения (5.12) неустойчивы.

Таким образом, если диссипативная функция Релея не пропорциональна кинетической энергии, то влияние диссипативных и постоянных сил может приводить к дестабилизации устойчивых (при отсутствии этих сил) движений системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96051; 98-01-00041а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Routh E.J.* A treatise on the stability of a given state of motion. London: MacMillan, 1977. 108 p.
2. *Poincare H.* Sur l'equilibre d'une masse fluide animee d'un mouvement de rotation // Acta math. 1885. V. 7. P. 259–380.
3. *Lagrange J.-L.* Mecanique analitique. Paris: Desaint, 1788. 512 p.
4. *Thomson W., Tait P.* Treatise on natural phylosophy. V. 1. Pt 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1879. 508 p.
5. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
6. *Румянцев В.В.* Об устойчивости систем с обобщенным потенциалом сил // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1977. № 5. С. 93–100.
7. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Харьков: Изд-во Харьк. мат. о-ва, 1888. 54 с.
8. *Salvadori L.* Un' osservazione su di un criterio di stabilita del Routh // Rend. Accad. sci. fis. e mat. Soc. naz. sci. lett ed arti. Napoli. 1953. V. 20. P. 269–272.
9. *Пожарицкий Г.К.* О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 145–154.
10. *Румянцев В.В.* Об устойчивости равномерных вращений механических систем // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962 № 6. С. 113–121.
11 *Pascal M.* Sur la recherche des mouvements stationnaires dans les systemes ayant des variables cycliques // Celest. Mech. 1975. V. 12. № 3. P. 337–358.
12. *Степанов С.Я.* О соотношении условий устойчивости при трех различных режимах циклических движений в системе // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. Т. 2. Казань: КАИ, 1976. С. 303–308.
13. *Hagedorn P.* On the stability of steady motions in free and restrained dynamical systems // Trans. ASME – J. Appl. Mech. 1979. V. 46. № 2. P. 427–432.
14. *Карапетян А.В., Степанов С.Я.* О соотношении условий устойчивости стационарных движений свободной системы и положений относительного равновесия ограниченной системы // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Изд-во МПИ, 1990. Вып. 20. С. 31–37.
15. *Пожарицкий Г.К.* Об устойчивости диссипативных систем // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 503–512.
16. *Тереки Й.* Об устойчивости стационарных движений механических систем в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1972. № 5. С. 84–86.
17. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
18. *Pars L.* A treatise on analytical dynamics. London: Heinemann, 1965. 641 p.

Москва

Поступила в редакцию
10.X.1997