УДК 531.01

© 1998 г. В.В. Румянцев

К УРАВНЕНИЯМ ПУАНКАРЕ И ЧЕТАЕВА

Строится группа Ли операторов виртуальных перемещений в параметрах Родрига–Гамильтона и выводятся уравнения движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Показано, что прибавление к (вычитание из) обобщенной функции Лагранжа $L^*(t, x, \eta)$ слагаемого вида df/dt, $f(t, x) \in C^2$ не влияет на вид уравнений Пуанкаре и Четаева. Эти уравнения применимы также для описания относительного движения голономной системы по отношению к подвижной системе осей координат. Уравнения Гамеля в нелинейных квазикоординатах выведены без использования уравнений транзитивности, сравнены с обобщенными уравнениями Пуанкаре и преобразованы к канонической форме Четаева.

Уравнения Пуанкаре [1] и Четаева [2], основанные на применении в динамике групп Ли операторов виртуальных перемещений, и их теория были обобщены [3, 4] на замкнутые системы операторов. Обобщенные уравнения являются общими уравнениями классической механики, включающими все известные уравнения движения (без множителей связей) голономных и неголономных механических систем, в том числе и уравнения в линейных квазискоростях. Вид уравнений, одинаковый в независимых и в зависимых координатах, зависит от выбора параметров действительных перемещений, число которых равно числу степеней свободы.

Ниже уравнения движения в формах уравнений Пуанкаре и Четаева применяются для описания движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона [5], а также для относительного движения по отношению к подвижной системе координат [6]. В заключении дается вывод уравнений Гамеля в нелинейных квазискоростях и их сравнение с обобщенными уравнениями Пуанкаре и Четаева.

1. Уравнения движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона. В ряде задач динамики твердого тела и в теории гироскопических систем вместо углов Эйлера иногда предпочтительнее использовать параметры Родрига–Гамильтона [5], являющиеся зависимыми переменными, но в отличие от углов Эйлера не имеющими вырождения.

Рассмотрим тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой O, которую примем за начало неподвижной системы осей координат $O\xi\eta\zeta$ с вертикально вверх направленной осью $O\zeta$ и подвижной системы координат $Oxyz$, оси которой совпадают с главными осями инерции тела для точки O.

За определяющие координаты примем параметры Родрига–Гамильтона $\lambda_s (s = 0, 1, 2, 3)$, связанные соотношением [6]

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \tag{1.1}$$

Проекции p, q, r мгновенной угловой скорости тела на оси x, y, z выражаются через $\lambda_s, \dot{\lambda}_s$ в виде

$$p = 2(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3) \quad (pqr, 1\ 2\ 3) \tag{1.2}$$

(здесь и далее подразумевается, что невыписанные соотношения получаются указанной в скобках круговой заменой символов).

Из равенств (1.2) и соотношения

$$\lambda_0\dot{\lambda}_0+\lambda_1\dot{\lambda}_1+\lambda_2\dot{\lambda}_2+\lambda_3\dot{\lambda}_3=0$$

следуют уравнения

$$\begin{aligned}&2\dot{\lambda}_0=-(\lambda_1 p+\lambda_2 q+\lambda_3 r)\\&2\dot{\lambda}_1=\lambda_0 p-\lambda_3 q+\lambda_2 r\quad (pqr,\ 1\ 2\ 3)\end{aligned}\qquad(1.3)$$

За параметры Пуанкаре действительных перемещений тела $\eta_s (s = 1, 2, 3)$ примем величины p, q, r, соответственно. Из выражения производной по времени от функции $f(t,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in C^2$

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial\lambda_i}\dot{\lambda}_i=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{s=1}^{3}\eta_s X_s f$$

находим интранзитивную группу операторов действительных перемещений $\partial/\partial t$, X_s $(s = 1, 2, 3)$, причем операторы виртуальных перемещений

$$X_1 f=-\frac{1}{2}\left(\lambda_1\frac{\partial f}{\partial\lambda_0}-\lambda_0\frac{\partial f}{\partial\lambda_1}-\lambda_3\frac{\partial f}{\partial\lambda_2}+\lambda_2\frac{\partial f}{\partial\lambda_3}\right)\ (1\ 2\ 3)\qquad(1.4)$$

с коммутаторами

$$[X_1,X_2]f=X_3 f\ \ (1\ 2\ 3)$$

а оператор $\partial/\partial t$ перестановочен с операторами X_s. Следовательно, отличны от нуля структурные постоянные группы Ли суть

$$c_{12}^3=c_{23}^1=c_{31}^2=1,\quad c_{21}^3=c_{32}^1=c_{13}^2=-1$$

Обобщенная функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned}&L^*(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,p,q,r)=½(Ap^2+Bq^2+Cr^2)-\mathrm{Mg}[2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)x_0+\\&+2(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)y_0+(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)z_0]\end{aligned}\qquad(1.5)$$

где A, B, C – главные моменты инерции для точки O, Mg – вес, x_0, y_0, z_0 – координаты центра тяжести тела.

Уравнения Пуанкаре [1] движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой принимают вид динамических уравнений Эйлера

$$\begin{aligned}&A\dot{p}-(B-C)qr=\mathrm{Mg}[2(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)z_0-(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)y_0]\\&B\dot{q}-(C-A)rp=\mathrm{Mg}[(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)x_0-2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)z_0]\\&C\dot{r}-(A-B)pq=2\mathrm{Mg}[(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)y_0-(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)x_0]\end{aligned}\qquad(1.6)$$

правые части которых выражены в параметрах Родрига–Гамильтона.

Уравнения (1.6), (1.3) образуют совместную систему семи дифференциальных уравнений первого порядка каждое с таким же числом неизвестных p, q, r, λ_s $(s = 0, 1, 2, 3)$, четыре последних из которых связаны соотношением (1.1). Эти уравнения аналогичны классическим уравнениям Эйлера в переменных p, q, r, θ, φ, ψ и имеют в общем случае помимо интеграла (1.1) интегралы энергии и площадей, а в случае динамической симметрии, когда $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$, и интеграл постоянства проекции мгновенной угловой скорости на ось динамической симметрии.

По сравнению с системой четырех уравнений второго порядка каждое (1.7.6) В.Н. Кошлякова [5] система (1.6), (1.3) имеет на единицу меньший порядок.

Преобразуем уравнения (1.6), (1.3) к виду канонических уравнений Четаева [2]. Вводя переменные

$$y_1 = \frac{\partial L^*}{\partial p} = Ap, \quad y_2 = \frac{\partial L^*}{\partial q} = Bq, \quad y_3 = \frac{\partial L^*}{\partial r} = Cr$$

и обобщенную функцию Гамильтона

$$H^*(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{A} + \frac{y_2^2}{B} + \frac{y_3^2}{C}\right) + \mathrm{Mg}[2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)x_0 +$$

$$+2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)y_0 + (\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)z_0]$$

получаем канонические уравнения Четаева [2] в параметрах Родрига–Гамильтона

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)y_2 y_3 = \mathrm{Mg}[2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)z_0 - (\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)y_0] \\
&\dot{y}_2 + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)y_3 y_1 = \mathrm{Mg}[(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)x_0 - 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)z_0] \\
&\dot{y}_3 + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)y_1 y_2 = 2\mathrm{Mg}[2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)y_0 - (\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)x_0] \\
&2\dot{\lambda}_0 = -\left(\lambda_1\frac{y_1}{A} + \lambda_2\frac{y_2}{B} + \lambda_3\frac{y_3}{C}\right) \\
&2\dot{\lambda}_1 = \lambda_0\frac{y_1}{A} - \lambda_3\frac{y_2}{B} + \lambda_2\frac{y_3}{C} \quad (ABC, \; 1 \; 2 \; 3)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Для уравнений (1.7) применима теория интегрирования Четаева [2].

Отметим, что уравнения (1.7) имеют вид гамильтоновых уравнений в неканонических переменных y_s, λ_i [3]

$$\dot{y}_s = (y_s, H^*), \quad \dot{\lambda}_i = (\lambda_i, H^*), \quad s = 1,2,3; \quad i = 0,1,2,3$$

где обобщенная скобка Пуассона двух гладких функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определяется для системы с k степенями свободы равенством

$$(f, \varphi) = \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_s}X_s f - \frac{\partial f}{\partial y_s}X_s\varphi\right) + \sum_{s,r,m=1}^{k} c_{sr}^m \frac{\partial f}{\partial y_r}\frac{\partial\varphi}{\partial y_s}y_m$$

2. Уравнения относительного движения. Покажем, что для голономной механической системы с k степенями свободы обобщенные уравнения Пуанкаре

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\eta_s} = (c_{rs}^m\eta_r + c_{0s}^m)\frac{\partial L^*}{\partial\eta_m} + X_s L^*, \quad m, r, s = 1, \ldots, k \tag{2.1}$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование) в случае, когда обобщенная функция Лагранжа представима в виде

$$L^*(t, x, \eta) = \Lambda(t, x, \eta) + \frac{df}{dt}, \quad f(t, x) \in C^2 \tag{2.2}$$

эквивалентны уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta_s} = (c_{rs}^m\eta_r + c_{0s}^m)\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta_m} + X_s\Lambda, \quad m, r, s = 1, \ldots, k \tag{2.3}$$

где $x_i (i = 1, \ldots, n \geqslant k)$ – определяющие координаты системы.

Действительно, слагаемое df/dt, представимое в виде

$$df/dt = X_0 f + \eta_s X_s f$$

в левой части уравнения (2.1) приводит к выражению

$$dX_s f / dt = X_0 X_s f + \eta_r X_r X_s f = X_s X_0 f + c_{0s}^m X_m f + \eta_r (X_s X_r f + c_{rs}^m X_m f), \quad r, s = 1, \ldots, k$$

в точности равному сумме слагаемых в правой части уравнения (2.1), происходящих от df/dt.

Следовательно, прибавление к (вычитание из) функции $L^*(t, x, \eta)$ слагаемого df/dt не влияет на уравнения Пуанкаре, аналогично случаю уравнений Лагранжа в независимых координатах q_i [7].

В предположении $\|\partial^2 L^* / \partial\eta_r \partial\eta_s\| \neq 0$ $(r, s = 1, \ldots, k)$ примéним преобразования Лежандра

$$y_s = \partial L^* / \partial\eta_s, \quad s = 1, \ldots, k, \quad H^*(t, x, y) = y_s \eta_s - L^* \tag{2.4}$$

к уравнениям (2.1), и

$$Y_s = \partial\Lambda / \partial\eta_s, \quad s = 1, \ldots, k, \quad K(t, x, Y) = Y_s \eta_s - \Lambda \tag{2.5}$$

к уравнениям (2.3). В результате получаем канонические уравнения Четаева

$$\frac{dy_s}{dt} = \left(c_{rs}^m \frac{\partial H^*}{\partial y_r} + c_{0s}^m \right) y_m - X_s H^*, \quad \eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s}; \quad m, r, s = 1, \ldots, k \tag{2.6}$$

и

$$\frac{dy_s}{dt} = \left(c_{rs}^m \frac{\partial K}{\partial y_r} + c_{0s}^m \right) y_m - X_s K, \quad \eta_s = \frac{\partial K}{\partial y_s}; \quad m, r, s = 1, \ldots, k \tag{2.7}$$

эквивалентные соответственно уравнениям (2.1) и (2.3). Учитывая (2.4) и (2.5), заключаем, что справедливы равенства

$$y_s = Y_s + X_s f, \quad H^*(t, x, y) = K(t, x, Y) - X_0 f$$

с помощью которых находим соотношения

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_s} = \frac{\partial K}{\partial Y_s}, \quad s = 1, \ldots, k; \quad \frac{dy_s}{dt} = \frac{dY_s}{dt} + X_0 X_s f$$

свидетельствующие об эквивалентности уравнений (2.6) и (2.7). В связи с последним равенством отметим, что в канонических уравнениях переменные x_i и y_s $(i = 1, \ldots, n;$ $s = 1, \ldots, k)$ считаются независимыми.

Примером функции вида (2.2) может служить функция Лагранжа

$$L^*(t, x, \eta) = T^*(t, x, \eta) + U(t, x)$$

для задачи об относительном движении системы по отношению к подвижной системе координат, движение которой известно, а определяющие координаты x_i задают положение системы в подвижных осях.

Движение подвижной системы координат $Oxyz$ характеризуется векторами абсолютной скорости $\mathbf{v}_0(t)$ начала O и абсолютной мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ вращения вокруг точки O. Кинетическая энергия абсолютного движения системы [6]

$$T_a = T_r + \boldsymbol{\omega} \cdot G_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}^\circ \cdot \boldsymbol{\omega} / 2 + M\mathbf{v}_0 \cdot (\dot{\mathbf{r}}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) + M v_0^2 / 2 \tag{2.8}$$

где $T_r = m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2 / 2$ и $\mathbf{G}_r = \mathbf{r}_\nu \times m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu$ $(\nu = 1,\dots,N)$ – кинетическая энергия и момент количеств относительного движения, $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(x_1,\dots,x_n)$ – радиус-вектор с началом в точке $O, \dot{\mathbf{r}}_\nu$ – относительная скорость точки массы m_ν, $M = \sum\limits_\nu m_\nu$ – масса, $\mathbf{r}_c$ – радиус-вектор центра масс, $\boldsymbol{\theta}^\circ$ – тензор инерции системы для точки O. Производные по времени $\dot{\mathbf{r}}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_c$, берутся в системе координат $Oxyz$.

Вследствие тождества [7]

$$\mathbf{v}_0 \cdot (\dot{\mathbf{r}}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) = d(\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{v}_0) / dt - \mathbf{r}_c \cdot w_0$$

где $\mathbf{w}_0$ – вектор абсолютного ускорения точки O, выражение (2.8) можно представить в виде

$$T_a = T_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{G}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}^\circ \cdot \boldsymbol{\omega} / 2 - M\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{w}_0 + df / dt, \quad f(t,x) = M\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{v}_0 \tag{2.9}$$

опуская член $Mv_0^2 / 2$, не влияющий на уравнения движения. Таким образом, обобщенная функция Лагранжа для относительного движения имеет вид (2.2), где

$$\begin{gathered} \Lambda(t,x,\eta) = T_r(x,\eta) + \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{G}_r(x,\eta) + U^*(t,x) \\ U^*(t,x) = U(t,x) + \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\theta}^\circ(x) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) / 2 - M\mathbf{r}_c(x) \cdot \mathbf{w}_0(t) \end{gathered} \tag{2.10}$$

$U(t, x)$ – силовая функция активных сил, действующих на систему.

Следовательно, с учетом (2.10) уравнения относительного движения голономной системы можно представить в форме уравнений Пуанкаре (2.1) или (2.3) или в форме уравнений Четаева (2.6) или (2.7), эквивалентных между собой. Частными случаями изложенного являются результаты [8].

3. Уравнения движения в нелинейных квазикоординатах. Ранее было показано [3], что уравнения Больцмана–Гамеля в линейных квазикоординатах являются частным случаем обобщенных уравнений Пуанкаре, построенных с помощью замкнутой системы инфинитезимальных операторов виртуальных перемещений, и была дана каноническая форма Четаева уравнений в квазикоординатах.

Уравнения в нелинейных квазикоординатах впервые были выведены Гамелем [9] из центрального уравнения Лагранжа с помощью уравнений транзитивности. Ниже эти уравнения выводятся непосредственно из уравнений Лагранжа или Маджи без использования уравнений транзитивности, подобно выводу [4] уравнений Пуанкаре, и сравниваются с последними, а также преобразуются к каноническому виду.

Рассмотрим сначала голономную систему с лагранжевыми координатами $q_i (i = 1,\dots, n)$ и произвольные независимые по $\dot{q}_i$, в общем случае нелинейные, функции

$$\eta_i \equiv f_i(t,q,\dot{q}), \quad i = 1,\dots n \tag{3.1}$$

такие, что $\det(\partial f_i / \partial \dot{q}_j) \neq 0$ $(i,j = 1,\dots,n)$. Разрешая (3.1), находим выражения

$$\dot{q}_i \equiv F_i(t,q,\eta), \quad i = 1,\dots,n \tag{3.2}$$

подстановка которых в (3.1) обращает последние в тождества, причем (δ_{sr} – символ Кронекера)

$$\begin{gathered} f_{si}F_{ir} = f_{ir}F_{si} = \delta_{sr} \\ f_{si} \equiv \partial f_s / \partial \dot{q}_i, \quad F_{ir} \equiv \partial F_i / \partial \eta_r, \quad i,j,r,s = 1,\dots,n \end{gathered} \tag{3.3}$$

Следуя Гамелю, примем условные обозначения $\dot{\pi}_s = \eta_s$, где π_s – нелинейные квазикоординаты, η_s – квазискорости, или по Пуанкаре – параметры действительных перемещений; "частные производные по квазикоординатам" и обратные выражения, а также вариации определим равенствами

$$\frac{\partial}{\partial \pi_s} = F_{is}\frac{\partial}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial}{\partial q_i} = f_{si}\frac{\partial}{\partial \pi_s} \tag{3.4}$$

$$\delta q_i = F_{is}\delta\pi_s, \quad \delta\pi_s = f_{si}\delta q_i, \quad i,s = 1,\dots,n \tag{3.5}$$

Умножая уравнения Лагранжа на F_{is} и суммируя по всем i, получаем уравнения Маджи

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)F_{is} = Q_s^*, \quad Q_s^* = Q_i F_{is}; \quad i,s = 1,\dots,n \tag{3.6}$$

Заменив в функции $L(t,q,\dot q)$ скорости $\dot q_i$ выражениями (3.2), получим обобщенную функцию Лагранжа $L^*(t, q, \eta)$. Так как

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r}\frac{\partial f_r}{\partial \dot q_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L^*}{\partial q_i} + \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r}\frac{\partial f_r}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_r}\right)\frac{\partial f_r}{\partial \dot q_i} + \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r}\frac{d}{dt}\frac{\partial f_r}{\partial \dot q_i}; \quad i,r = 1,\dots,n$$

то уравнения (3.6), если учесть (3.3), (3.4), примут вид уравнений движения голономной системы в нелинейных квазикоординатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} + \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_r}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial f_r}{\partial q_i}\right)F_{is} - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} = Q_s^*; \quad r,s,i = 1,\dots,n \tag{3.7}$$

Используя равенства

$$\frac{\partial L^*}{\partial \eta_r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_r}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial f_r}{\partial q_i}\right)F_{is} = -\frac{\partial L^*}{\partial \eta_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F_r}{\partial \eta_s} - \frac{\partial F_r}{\partial \pi_s}\right)f_{ir} \tag{3.8}$$

вытекающие из уравнений транзитивности, Гамель [9] преобразовал уравнения (3.7) к второй форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} - \frac{\partial L^*}{\partial \eta_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F_r}{\partial \eta_s} - \frac{\partial F_r}{\partial \pi_s}\right)f_{ir} - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} = Q_s^*; \quad r,s,i = 1,\dots,n \tag{3.9}$$

Рассмотрим изменение функции $\varphi(t, q) \in C^2$ на виртуальных перемещениях системы (3.5)

$$\delta\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\delta q_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}F_{is}\delta\pi_s = \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_s}\delta\pi_s = X_s\varphi\delta\pi_s$$

откуда получаем выражения операторов виртуальных перемещений

$$X_s\varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_s} = F_{is}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}, \quad s = 1,\dots,n \tag{3.10}$$

с коммутатором

$$[X_r, X_s]\varphi \equiv X_r X_s\varphi - X_s X_r\varphi = c_{rs}^m X_m\varphi; \quad m,r,s = 1,\dots,n$$

где структурные коэффициенты

$$c_{rs}^m \equiv \left(F_{ir}\frac{\partial F_{js}}{\partial q_i} - F_{is}\frac{\partial F_{jr}}{\partial q_i}\right)f_{mj}; \quad i,j = 1,\dots,n$$

зависят в общем случае не только от t, q_i, но и от η_s, от которых зависят и сами операторы (3.10). Таким образом, система операторов (3.10) представляет собою замкнутую систему, как и операторы (1.10) [4] в обобщенных уравнениях Пуанкаре.

Если ввести обозначения [10]

$$T_s^i \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial \eta_s} - \frac{\partial F_i}{\partial \pi_s}, \quad W_s^r \equiv F_{is}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial f_r}{\partial q_i}\right); \quad i, r, s = 1, \ldots, n \tag{3.11}$$

для коэффициентов Чаплыгина и Воронца–Гамеля соответственно и учесть (3.10), то уравнения (3.7) и (3.9) можно записать в более компактном виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} + \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r} W_s^r - X_s L^* = Q_s^*; \quad i, r, s = 1, \ldots, n \tag{3.12}$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} - \frac{\partial L^*}{\partial \eta_i} f_{ir} T_s^r - X_s L^* = Q_s^*; \quad i, r, s = 1, \ldots, n \tag{3.13}$$

аналогичном виду уравнений Пуанкаре.

Уравнения транзитивности (13) и (13а) Гамеля [9] в обозначениях (3.11) принимают вид [10]

$$\frac{d\delta\pi_s}{dt} - \delta\eta_s = W_r^s \delta\pi_r = -\frac{\partial \eta_s}{\partial \dot{q}_i} T_r^i \delta\pi_r; \quad i, r, s = 1, \ldots, n \tag{3.14}$$

аналогичный виду уравнений (1.11) [4] Пуанкаре, связывающие параметры виртуальных и действительных перемещений.

Из изложенного выше следует, что по крайней мере формально уравнения движения в нелинейных квазикоординатах аналогичны обобщенным уравнениям Пуанкаре.

Приведем теперь уравнения (3.12) и (3.13) к канонической форме уравнений Четаева. Предполагая $\| \partial^2 L^* / \partial\eta_r \partial\eta_s \| \neq 0$, введем вместо переменных η_s и функции L^* (t, q, η) новые переменные y_s и функцию $H^*(t, q, y)$ согласно равенствам

$$y_s = \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s}, \quad H^*(t, q, y) = y_s \eta_s - L^*(t, q, \eta) \tag{3.15}$$

из которых следуют соотношения [2]

$$\eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s}, \quad X_s H^* = -X_s L^*, \quad s = 1, \ldots, n \tag{3.16}$$

Подстановка (3.15), (3.16) в уравнения (3.12) и (3.13) приводит последние к виду канонических уравнений Четаева

$$\frac{dy_s}{dt} + y_r W_s^r + X_s H^* = Q_s^*, \quad \eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s}; \quad i, r, s = 1, \ldots, n \tag{3.17}$$

$$\frac{dy_s}{dt} - y_i T_s^r f_{ir} + X_s H^* = Q_s^*, \quad \eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s}; \quad i, r, s = 1, \ldots, n \tag{3.18}$$

в переменных q_i, y_s.

Рассмотрим в заключение неголономную систему с k степенями свободы, стесненную неинтегрируемыми связями вида

$$\eta_j \equiv f_j(t,q,\dot{q}) = 0, \quad j = k+1,\dots,n \tag{3.19}$$

Дополним (3.19) произвольными независимыми соотношениями

$$\eta_s \equiv f_s(t,q,\dot{q}), \quad s = 1,\dots,k \tag{3.20}$$

такими, что $\det(\partial f_i / \partial \dot{q}_j) \neq 0$ $(i,j = 1,\dots,n)$. Виртуальные перемещения системы определим условиями Четаева

$$\frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i = 0, \quad i = 1,\dots,n; \quad j = k+1,\dots,n \tag{3.21}$$

Учитывая, что при связях (3.19) $\delta\pi_j = 0$ ($j = k + 1,\dots, n$), для виртуальных перемещений будем по-прежнему иметь равенства (3.5), но при $s = 1,\dots, k$. Для неголономной системы уравнения Маджи (3.6) для $s = 1,\dots, k$ аналогично изложенному выше преобразуются к уравнениям вида (3.12) или (3.13), (3.17) или (3.18), где $r, s = 1,\dots, k$, которые и будут уравнениями движения неголономной системы в нелинейных квазикоординатах, совпадающими с уравнениями (1) и (11) Гамеля [9]. Эти уравнения должны быть дополнены уравнениями связей (3.19). Уравнения транзитивности (3.14) сохраняют свой вид, если учесть, что $\delta\pi_r = 0$ для $r = k + 1,\dots, n$.

Отметим, что уравнения (3.7), (3.9), а также (3.17), (3.18), как и (3.14) в случае линейных квазикоординат принимают вид обобщенных уравнений Пуанкаре и Четаева [4] (в отношении уравнений Пуанкаре см. [11]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00261) и Федеральной целевой программы "Интеграция".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique // C.R. Acad. sci. Paris. 1901. V. 132. P. 369–371.
2. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 2. С. 253–262.
3. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре–Четаева // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 3–16.
4. *Румянцев В.В.* Общие уравнения аналитической динамики // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 917–928.
5. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 286 с.
6. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
8. *Румянцев В.В., Водопьянова О.А.* Уравнения Гамильтона для относительного движения // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1998. № 1. С. 73–77.
9. *Hamel G.* Theoretische Machanik. Berlin: Springer, 1949. 796 p.
10. *Новоселов В.С.* Вариационные методы в механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. 71 с.
11. *Papastavridis J.G.* On the Boltzmann–Hamel equations of motion: A vectorial treatment // J. Appl. Mech., 1994. V. 61. N 2. P. 453–459.

Москва

Поступила в редакцию
30.XII.1997