Пусть жидкость в начальный момент покоится, а ее движение возникает в результате того, что нижняя граница мгновенно приобретает постоянную скорость U в своей плоскости в направлении оси Ox_1, а верхняя граница мгновенно приобретает постоянную скорость V в своей плоскости в направлении оси Ox_2. Из (4.1) в данном случае получим

$$u_1(x_3,t) = U\left(1-\frac{x_3}{l}\right) - \frac{2U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \nu t\right]\sin\frac{n\pi x_3}{l}$$

$$u_2(x_3,t) = V\frac{x_3}{l} + \frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \nu t\right]\sin\frac{n\pi x_3}{l}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз. 1963. 727 с.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Казань

Поступила в редакцию 22.IV.1997

УДК 539.3

© 1998 г. Капцов А.В., Кузнецов С.В.

ПРОСТРАНСТВЕННО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Строятся пространственно периодические фундаментальные решения теории колебаний применительно к анизотропным упругим средам с анизотропией общего вида. Дается сравнение с изотропным случаем

Видимо, впервые пространственно периодические фундаментальные решения (ФР) для уравнения Гельмгольца построены Титчмаршем методом разложения в ряд Фурье [1]. Этот метод использовался в [2] применительно к пространственно периодическим уравнениям статики анизотропного тела. ФР для (пространственно) непериодических задач теории колебаний в случае изотропной среды получены в [3].

1. Основные операторы. Рассматривается упругоанизотропная однородная среда в R^3, уравнения колебаний которой имеют вид

$$\mathbf{A}(\partial_x, \omega)\,\mathbf{u} \equiv -\mathrm{div}_x \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_x \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{A}$ – матричный дифференциальный оператор теории колебаний, $\mathbf{C}$ – четырехвалентный тензор упругости, $\mathbf{u}$ – поле перемещений в среде, ω – частота колебаний.

Предполагается, что тензор $\mathbf{C}$ строго эллиптичен, что обеспечивает строгую эллиптичность оператора $\mathbf{A}(\partial_x, 0)$. Среда считается гиперупругой, что гарантирует симметрию тензора $\mathbf{C}$, если его рассматривать как оператор, действующий в пространстве симметричных тензоров второго ранга.

Интегральное преобразование Фурье

$$f^\wedge(\xi) = \int_{R^3} f(x)\exp(2\pi i \xi\cdot\mathbf{x})\,dx$$

примененное к оператору **A**, позволяет получить соответствующий символ:

$$\mathbf{A}\hat{}(\xi, \omega) = (2\pi)^2\xi\cdot\mathbf{C}\cdot\xi - \omega^2\mathbf{I} \tag{1.2}$$

где **I** – единичная диагональная матрица.

По формуле (1.2) может быть получен символ пространственно непериодического ФР уравнения теории колебаний (ФР, преобразованное по Фурье):

$$\mathbf{E}\hat{}(\xi, \omega) = \mathbf{A}\hat{}(\xi, \omega)^{-1} \tag{1.3}$$

В общем случае анизотропии обращение по Фурье выражения (1.3) удается осуществить лишь численно [2], однако для пространственно периодических ФР оказывается достаточным определить символ $\mathbf{E}\hat{}$.

2. Построение периодического фундаментального решения. Рассмотрим тождество

$$\mathbf{A}(\partial_x, \omega)\, \mathbf{E}_p(\mathbf{x}, \omega) = \delta_p(\mathbf{x})\, \mathbf{I} \tag{2.1}$$

где индекс p указывает на пространственную периодичность. Представим периодическую δ-функцию по аналогии с подходом, использованным ранее в [2], в виде ряда

$$\delta_p(\mathbf{x}) = V_Q^{-1} \sum_{\mathbf{m}^* \in \Lambda^*} \exp(2\pi i \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{x}) \tag{2.2}$$

где V_Q – объем фундаментальной области, Λ^* – решетка сопряженного базиса, $\mathbf{m}^*$ – сопряженные узлы.

Разыскивая фундаментальное решение $\mathbf{E}_p$ в виде аналогичного ряда, из (2.1) получим

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{x},\omega) = V_Q^{-1} \sum_{\mathbf{m}^* \in \Lambda^*} \mathbf{E}\hat{}(\mathbf{m}^*,\omega)\exp(2\pi i \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{x}) \tag{2.3}$$

Таким образом, для построения пространственно периодического ФР оказывается достаточным знания символа $\mathbf{E}_p$, легко вычисляемого по (1.3).

Замечание. Для простой кубической структурной решетки с векторами основного базиса единичной длины, векторы сопряженного базиса образуют сопряженную структурную решетку, совпадающую с исходной. В этом случае суммирование в формулах (2.2), (2.3) естественно проводить по узлам решетки основного базиса.

Утверждения. 1^0. Ряд в правой части формулы (2.3) сходится при любых $\omega = 2\pi\sqrt{\mathbf{m}^*\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{m}^*}$, $\mathbf{m}^* \in \mathbf{A}^*$ в топологии $L^1(Q)$.

2^0. Ряд в правой части (2.3) абсолютно расходится при любых значениях ω, **x**.

Доказательство утверждения 1^0 вытекает из общей схемы доказательства формулы суммирования Пуассона для периодических функций [4]. Доказательство утверждения 2^0 следует из расходимости в R^3 мажорантных кратных рядов с асимптотической оценкой

$$|f_m| = O(|m|^{-2}), \quad |m| \to \infty, \quad \mathbf{m} \in \Lambda \tag{2.4}$$

где Λ – произвольная структурная решетка в R^3. В свою очередь оценка (2.4) непосредственно вытекает из формул (1.2), (1.3).

3. Периодическое фундаментальное решение теории колебаний для изотропной упругой среды. Уравнения теории колебаний для оператора теории упругости в изотропном случае имеют в тензорных обозначениях вид

$$(\lambda + \mu)\, u_{j,ij} + \mu\, \Delta u_i + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе, ρ – плотность среды, по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3. Компоненты фундаментального решения E_{mi} удовлетворяют следующему тождеству:

$$(\lambda + \mu)\, E_{mj,ij} + \mu\, \Delta E_{mi} + \rho\omega^2 E_{mi} = \delta(\mathbf{x})\, \delta_{mi} \tag{3.2}$$

Подставляя в (3.2) разложение δ(**x**) и **E**(**x**) в ряды Фурье

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{\mathbf{k}}^{\infty} e^{i(\mathbf{kx})}, \quad E_{mi}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}}^{\infty} E_{mi}^{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kx})}, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \tag{3.3}$$

получаем, что компоненты $E^{\mathbf{k}}_{mi}$ должны удовлетворять следующей системе линейных уравнений:

$$E^{\mathbf{k}}_{jm}\hat{A_{ij}} = \delta_{mi} \tag{3.4}$$

$$\hat{A_{ij}} = \mu(2\pi)^3(\delta_{ij}\beta^2 - \delta_{ij}|k|^2 - (\eta^{-2} - 1)k_i k_j)$$

$$\beta = \omega / C_2, \quad C_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}, \quad C_2 = [\mu/\rho]^{1/2}, \quad \eta = C_2 / C_1$$

где C_1, C_2 – скорости распространения продольной и поперечной волн в упругой среде. В формулах (3.3) предполагается, что параметр **k** принадлежит решетке сопряженного базиса, образованного векторами длины 2π.

Решая систему линейных уравнений (3.4) относительно $\hat{A_{ij}}$, получим

$$E^{\mathbf{k}}_{11} = \frac{1}{\eta^2 D}(\beta^2\eta^2 - \eta^2 k_1^2 - k_2^2 + k_2 k_3(1-\eta^2))(\beta^2\eta^2 - \eta^2 k_1^2 - k_2^2 - k_2 k_3(1-\eta^2))$$

$$E^{\mathbf{k}}_{22} = \frac{1}{\eta^2 D}(\beta^2\eta^2(\beta^2\eta^2 - k_1^2 - k_2^2 - \eta^2) + \eta^2(k_1^4 + k_2^4) + k_1^2 k_2^2(1+\eta^4) + k_1^4 k_3^4(1-\eta^2)^2)$$

$$E^{\mathbf{k}}_{33} = \frac{1}{D}(\beta^2 - k_1^2 - k_2^2)(\beta^2\eta^2 - k_1^2 - k_2^2) \tag{3.5}$$

$$E^{\mathbf{k}}_{12} = \frac{1}{\eta^2 D}(\eta^2 - 1)k_1 k_2(-\beta^2\eta^2 + \eta^2 k_1^2 + k_2^2 - k_3^2(1-\eta^2))$$

$$E^{\mathbf{k}}_{n3} = \frac{1}{D}(\eta^2 - 1)k_n k_3(-\beta^2 + k_1^2 + k_2^2), \quad n = 1,2$$

$$E^{\mathbf{k}}_{ij} = E^{\mathbf{k}}_{ji}, \quad i \neq j$$

$$D = \mu(2\pi)^3(\beta^2 - k_1^2 - k_2^2)((\beta^2\eta^2 - k_2^2)^2 - \eta^2 k_1^2(\beta^2 + \beta^2\eta^2 - k_1^2) -$$

$$- k_1^2 k_2^2(1+\eta^2) - (1-\eta^2)^2 k_3^2(k_1^2 + k_2^2))$$

Формулами (3.5) определяются компоненты пространственно периодического фундаментального решения теории колебаний для изотропной среды.

Исследования, проведенные в настоящей работе, частично финансировались Международным научным фондом (M7Y000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Titchmarsh E.C.* Eigenfunction expansions associated with secondorder differential equations. P. 2. Oxford: Clarendon press, 1958. 404 p.
2. *Кузнецов С.В.* Периодические фундаментальные решения статики анизотропных упругих сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 99–104.
3. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
4. *Wringler S.* Special trigonometric series in K-dimensions // Mem. Amer. Math. Soc. 1965. N 59. 102 p.

Москва

Поступила в редакцию
29.II.1996