Решения (8), (14) и их асимптотические представления (12), (15) имеют конкретный статистический смысл, поскольку система уравнений (1) сводится к стохастическим уравнениям типа Колмогорова – Феллера относительно концентраций C и ρ. В частности, было показано [6] следующее: сводимость математической модели Д.М. Минца [1], являющейся прототипом системы (1) при $\gamma = 0$, к уравнениям Колмогорова – Феллера; тождественность решения (15) для концентрации ρ интегральной функции распределения Релея – Райса и возможность его представления в виде арифметических операций над пуассоновскими вероятностями захвата взвешенных частиц примеси и отрыва частиц образующегося осадка.

Отметим, что решения (8), (14) хорошо аппроксимируют случай линейно убывающей скорости фильтрования. Действительно, в широком диапазоне реальных условий эксплуатации фильтров к концу времени их защитного действия t_* скорость фильтрования снижается не более чем на 10–15%. Это означает, что

$$v(t) = v_0 / (1 + \gamma t) \approx v_0 (1 - \gamma t) \text{ при } t \leq t_*$$

т.е. при указанных ограничениях на скорость фильтрования гиперболический и линейный законы ее изменения можно считать эквивалентными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Минц Д.М.* Теоретические основы технологии очистки воды. М.: Стройиздат, 1964. 156 с.
2. *Сандуляк А.В.* Очистка жидкостей в магнитном поле. Львов: Выща шк., 1984. 166 с.
3. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 295 с.
4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
5. *Жуховицкий А.А., Забежинский Я.Л., Тихонов А.Н.* Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. I // Журн. физ. химии. 1945. Т. 19. Вып. 6. С. 253–261.
6. *Кочмарский В.З., Демчик И.И.* Статистическая интерпретация математической модели процесса фильтрования Минца // Теорет. основы хим. технологии. 1989. Т. 23. № 3. С. 405–407.

Ровно

Поступила в редакцию
13.VIII.1997

УДК 532.516

 В.Г. Жаринов

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВЯЗКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ОКОЛО ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Получены точные решения ряда задач о неустановившемся течении вязкой несжимаемой жидкости для специальных классов распределения скоростей, приводящих уравнения Навье – Стокса к линейному виду. В отличие от известных решений подобных задач учитываются более общие краевые условия и неоднорность течений. Рассматриваются задачи о сглаживании разрыва скорости и распространении вихря в пространстве, о течении жидкости над бесконечной плоской поверхностью, в бесконечном двугранном угле и между параллельными плоскостями.

1. Сглаживание разрыва скорости и распространение вихря. Будем полагать, что в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ составляющие скорости в направлении соответствующих координат имеют вид

$$u_1 = u_1(x_3, t), \quad u_2 = u_2(x_3, t), \quad u_{30} = \text{const}$$

В этом случае условие несжимаемости удовлетворяется тождественно, а уравнения Навье–Стокса преобразуется к виду

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+u_{30}\frac{\partial u_k}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k}+\nu\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_3^2},\ k=1,2;\rho,\nu=\mathrm{const} \tag{1.1}$$

Рассматривая задачу о движении жидкости, занимающей все пространство, будем считать распределения скоростей в начальный момент известными:

$$u_k(x_3,0)=\varphi_k(x_3),\ k=1,2 \tag{1.2}$$

Давление во всем пространстве будем считать постоянным ($\partial p/\partial x_k \equiv 0$, $k = 1, 2$).

Наряду с неподвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$ введем подвижную систему $O^\circ x_1^\circ x_2^\circ x_3^\circ$ так, что $x_1^\circ = x_1$, $x_2^\circ = x_2$, $x_3^\circ = x_3 - u_{30}t$, $t^\circ = t$. Уравнения в новых переменных не будут содержать слагаемых вида вторых слагаемых в левой части (1.1). Решая задачу Коши [1] для этих уравнений, которые являются автономными, с начальными условиями $u_k(x_3^\circ,\ 0) = \varphi_k(x_3^\circ)$ и возвращаясь к старым переменным, получим решение задачи (1.1), (1.2):

$$\begin{gathered} u_k(x_3,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x_3-u_{30}t,\xi,t)\varphi_k(\xi)d\xi,\ k=1,2 \\ G(x_3-u_{30}t,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\exp\left[-\frac{(x_3-u_{30}t-\xi)^2}{4\nu t}\right] \end{gathered} \tag{1.3}$$

Интеграл Пуассона (1.3) представляет при $t > 0$ ограниченное решение уравнения для любой ограниченной функции $|\varphi_k(\xi)| < M$, непрерывно примыкающее при $t = 0$ к $\varphi_k(x_3)$ во всех точках непрерывности этой функции; функция $\varphi_k(x_3)$ может иметь конечное число точек разрыва первого рода.

Пусть начальные скорости имеют постоянные, но различные значения для $x_3 > 0$ и $x_3 < 0$:

$$u_k(x_3,0)=\varphi_k(x_3)=\begin{cases} U_k, & x_3>0 \\ V_k, & x_3<0;\ k=1,2 \end{cases}$$

В этом случае формулы (1.3) преобразуются к виду [1]

$$\begin{gathered} u_k(x_3,t)=[U_k+V_k+(U_k-V_k)\Phi(z)]/2,\ k=1,2 \\ \Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \exp(-\alpha^2)d\alpha,\ z=\frac{x_3-u_{30}t}{2\sqrt{\nu t}} \end{gathered} \tag{1.4}$$

В отличие от известных решений [2, 3], полученных для плоской задачи, когда плоскость $x_3 = 0$ является поверхностью разрыва скорости одного направления ($u_2 \equiv 0$), формулы (1.4) дают решение задачи о сглаживании разрыва скорости в потоке, имеющем постоянную известную скорость $u_3 = u_{30}$, когда в начальный момент соприкасаются два равномерных потока, направленных друг к другу под некоторым углом, не равным, вообще говоря, 0 или π, т.е. задача не является плоской.

Будем теперь полагать, что

$$u_2=u_{20}=\mathrm{const},\ u_3=u_{30}=\mathrm{const},\ u_1=u_1(x_2,x_3,t)$$

Тогда условие несжимаемости удовлетворяется тождественно, а уравнения Навье–Стокса дают

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_{20}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+u_{30}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) \quad (1.5)$$

Рассматривая задачу о движении жидкости, занимающей все пространство, будем считать давление во всем пространстве постоянным и распределение скорости в начальный момент известным:

$$u_1(x_2,x_3,0)=\zeta(x_2,x_3) \quad (1.6)$$

По аналогии с (1.3) найдем решение задачи (1.5), (1.6)

$$u_1(x_2,x_3,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int G(x_2-u_{20}t,x_3-u_{30}t,t,\xi_2,\xi_3)\zeta(\xi_2,\xi_3)d\xi_2 d\xi_3 \quad (1.7)$$

$$G(y_2,y_3,t,\xi_2,\xi_3)=\frac{1}{4\pi\nu t}\exp\left[-\frac{(y_2-\xi_2)^2+(y_3-\xi_3)^2}{4\nu t}\right]$$

Пусть

$$\zeta(x_2,x_3)=\begin{cases}U, & (x_2,x_3)\in Q=\{0\leq x_2<\infty,\ 0\leq x_3<\infty\}\\ 0, & \forall(x_2,x_3)\notin Q\end{cases}$$

После преобразований получим вместо (1.7)

$$u_1(x_2,x_3,t)=\frac{U}{4}\left[1+\Phi\left(\frac{x_2-u_{20}t}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right]\left[1+\Phi\left(\frac{x_3-u_{30}t}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right]$$

Это соотношение дает решение задачи о сглаживании разрыва скорости в потоке, составляющие скорости которого $u_2=u_{20}$, $u_3=u_{30}$, когда в начальный момент соприкасается равномерный поток, занимающий бесконечный двугранный угол, с неподвижной жидкостью.

Рассматривая задачу о распространении вихря, будем полагать, что в начальный момент времени проекции скорости на оси цилиндрических координат r, θ, z имеют следующие значения:

$$u_r=a_1\cos\theta+a_2\sin\theta,\ u_\theta=\alpha(r)-a_1\sin\theta+a_2\cos\theta,\ u_z=\beta(r)+a_3$$

где a_1, a_2, a_3 = const.

Распределение вихря в начальный момент времени в этом случае дается формулами

$$\operatorname{rot}u=\{\Omega_r,\Omega_\theta,\Omega_z\},\ \Omega_r=0,\ \Omega_\theta=-\frac{d\beta}{dr},\ \Omega_z=\frac{1}{r}\frac{d(r\alpha(r))}{dr}\equiv\omega(r)$$

Исходя из вида начальных условий, будем полагать, что $u_k=u_k(x_1,x_2,t)$ $(k=1,2,3)$, причем представим скорости в виде $u_k(x_1,x_2,t)=v_k(x_1,x_2,t)+a_k$ $(k=1,2,3)$. Введем подвижную систему координат $O^\circ x_1^\circ x_2^\circ x_3^\circ$ так, что $x_1^\circ=x_1-a_1t$, $x_2^\circ=x_2-a_2t$, $x_3^\circ=x_3$, $t^\circ=t$. Перейдя затем в подвижной системе координат к цилиндрическим координатам r°, θ°, z°, получим,что уравнения для $v_{z^\circ}=v_{z^\circ}(r^\circ,t^\circ)$ и $\Omega_{z^\circ}=(r^0)^{-1}\,\partial(rv_{\theta^\circ}(r^\circ,t^\circ))/\partial r^\circ$ являются автономными и по внешнему виду одинаковыми. Кроме того, уравнение для Ω_{z0} аналогично уравнению для подобной составляющей вихря в случае задачи о диффузии вихря в неподвижной среде. Поэтому, используя известное решение [2], будем иметь

$$\Omega_{z^\circ}(r^\circ,t^\circ)=\frac{1}{2\nu t^\circ}\exp\left(-\frac{r^{\circ 2}}{4\nu t^\circ}\right)\int\limits_0^\infty\omega(s)\exp\left(-\frac{s^2}{4\nu t^\circ}\right)J_0\left(\frac{sr^\circ}{2\nu t^\circ}\right)sds$$

и аналогичное выражение для $v_{z^\circ}(r^\circ,t^\circ)$ (при замене $\omega(s)$ на $\beta(s)$), где J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Решение, записанное в проекции скорости на оси цилиндрических координат, будет следующим:

$$u_r(r,\theta,t)=v_{\theta^\circ}(r^\circ,t^\circ)\sin(\theta-\theta^\circ)+a_1\cos\theta+a_2\sin\theta \tag{1.8}$$

$$u_\theta(r,\theta,t)=v_{\theta^\circ}(r^\circ,t^\circ)\cos(\theta-\theta^\circ)-a_1\sin\theta+a_2\cos\theta$$

$$u_z(r,\theta,t)=v_{z^\circ}(r^\circ,t^\circ)+a_3$$

$$r^\circ=\left[r^2-2rt^\circ(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)+\left(a_1^2+a_2^2\right)t^{\circ 2}\right]^{1/2},\quad \operatorname{tg}\theta^\circ=\frac{r\sin\theta-a_2t^\circ}{r\cos\theta-a_1t^\circ}$$

$$v_{\theta^\circ}(r^\circ,t^\circ)=\frac{1}{r^\circ}\int\limits_0^{r^\circ}\Omega_{z^\circ}(r^\circ,t^\circ)r^\circ dr^\circ,\quad t^\circ=t$$

Распределение вихря найдем по формулам

$$\Omega_r\equiv 0,\ \Omega_\theta=-\frac{\partial u_z}{\partial r},\ \Omega_z=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right] \tag{1.9}$$

Таким образом, в отличие от известного решения [2], полученного для плоской задачи о диффузии вихря в неподвижной среде (a_1, a_2, $a_3=0$, $\beta(r)\equiv 0$), формулы (1.8), (1.9) дают решение задачи о распространении вихря в сносящем потоке.

2. Движение жидкости над плоскостью. Рассмотрим задачу о течении над бесконечной плоской поверхностью $x_3=0$: требуется найти решение уравнений (1.1) ($u_{30}=0$) в области $0<x_3<\infty$, $0<t$, удовлетворяющее условиям

$$u_k(x_3,0)=\varphi_k(x_3),\ k=1,2,\ 0\leqslant x_3<\infty$$

$$u_k(0,t)=\mu_k(t),\ u_k(\infty,t)=U_k(t),\ k=1,2,\ 0\leqslant t$$

В отличие от известных решений [3, 4], полученных для плоской задачи, когда плоская граница внезапно приводится в движение в покоящейся жидкости или плоская стенка совершает в собственной плоскости прямолинейные гармонические колебания в покоящейся жидкости, рассматривается более общее решение: с учетом произвольных начальных условий, движения стенки, "внешней скорости" на большом расстоянии от стенки, причем "внешняя скорость" и скорость движения стенки могут быть направлены друг к другу под некоторым углом, не равным, вообще говоря, 0 или π, т.е. задача не является плоской.

Решение представляется в виде

$$u_k(x_3,t)=v_k(x_3,t)+U_k(t)-U_k(0),\ v_k(x_3,t)=v_{k1}(x_3,t)+v_{k2}(x_3,t)$$

$$v_{k1}(x_3,t)=\int\limits_0^\infty g(x_3,\xi,t)\varphi_k(\xi)d\xi,\ v_{k2}(x_3,t)=2\nu\int\limits_0^t\frac{\partial G(x_3,0,t-\tau)}{\partial\xi}\alpha_k(\tau)d\tau$$

$$g(x_3,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x_3-\xi)^2}{4\nu t}\right]-\exp\left[-\frac{(x_3+\xi)^2}{4\nu t}\right]\right\}$$

$$\alpha_k(t)=\mu_k(t)+U_k(0)-U_k(t),\ -\frac{dU_k}{dt}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k},\ k=1,2$$

Пусть плоская поверхность движется не только в своей собственной плоскости со скоростью $\{\mu_1(t),\mu_2(t)\}$, но и перемещается в перпендикулярном направлении с постоянной скоростью u_{30}. Граничные условия тогда будут следующими:

$$u_k(u_{30}t,t)=\mu_k(t),\ k=1,2,0\leqslant t$$

В подвижной системе координат задача сводится к предыдущей. Следовательно, решением данной задачи будут служить вышеуказанные соотношения, где x_3 следует заменить на $x_3-u_{30}t$.

Функции $v_{k2}(x_3,t)$, учитывающие движение стенки, определены для любых ограниченных кусочно-непрерывных функций $\alpha(t)$ [1]. Это позволяет моделировать различные течения, вызываемые, в частности, и внезапным движением, и внезапной остановкой стенки. Пусть, например, плоская стенка, ранее покоившаяся, внезапно начинает двигаться в своей собственной плоскости с постоянной скоростью μ_1 в направлении оси Ox_1. В момент времени $t = t_1$ стенка внезапно останавливается, а в момент времени $t = t_2$, $t_2 > t_1$ внезапно начинает двигаться в собственной плоскости с постоянной скоростью μ_2 в направлении оси Ox_2.

Краевые условия в данном случае имеют вид

$$u_k(x_3,0) \equiv 0,\ u_k(\infty,t) \equiv 0,\ k = 1,2$$

$$u_1(0,t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \mu_1 = \mathrm{const}, & 0 < t \leqslant t_1; \\ 0, & t_1 < t \end{cases} \quad u_2(0,t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant t_2 \\ \mu_2 = \mathrm{const}, & t_1 < t_2 < t \end{cases}$$

В решении участвуют лишь функции v_{k2}. До момента времени $t = t_2$ осуществляется плоское течение; при $t > t_2$ реализуется пространственное течение, обусловленное движением стенки в направлении оси Ox_1 и движением стенки в направлении оси Ox_2:

$$u_1(x_3,t) = \begin{cases} \mu_1[1 - \Phi(z)], & 0 < t \leqslant t_1 \\ \mu_1[\Phi(z(\sqrt{1 - t_1/t})^{-1}) - \Phi(z)], & t_1 < t \end{cases}$$

$$u_2(x_3,t) = \mu_2\left[1 - \Phi(z(\sqrt{1 - t_2/t})^{-1})\right],\ t_2 < t,\ z = x_3(\sqrt{\nu t})^{-1}$$

Для течения над проницаемой плоской поверхностью, когда производится отсос жидкости с постоянной скоростью отсасывания u_{30}, решение представляется в виде

$$u_k(x_3,t) = v_{k1}(x_3,t) + v_{k2}(x_3,t) + U_k(t) - U_k(0),\ k = 1,2$$

$$v_{k1}(x_3,t) = \exp\left(-\frac{u_{30}^2}{4\nu}t\right)\int_0^\infty g(x_3,\xi,t)\varphi_k(\xi)\exp\left[\frac{u_{30}}{2\nu}(x_3 - \xi)\right]d\xi$$

$$v_{k2}(x_3,t) = \frac{\nu}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x_3}{[\nu(t-\tau)]^{3/2}}\exp\left(-\frac{[x_3 - u_{30}(t-\tau)]^2}{4\nu(t-\tau)}\right)\times$$

$$\times[\mu_k(\tau) + U_k(0) - U_k(\tau)]d\tau$$

$$u_3 = u_{30}$$

Рассмотрим еще одну задачу о течении жидкости над проницаемой плоской поверхностью, движущейся в собственной плоскости.

Пусть производится отсос жидкости с постоянной скоростью отсасывания u_{30}. Для определения u_1 имеем уравнение (1.5) ($u_{20} = 0$). Краевые условия имеют вид

$$u_1(x_2,x_3,0) = \zeta(x_2,x_3),\ -\infty < x_2 < \infty,\ 0 \leqslant x_3 < \infty$$

$$u_1(x_2,0,t) = \mu(t),\ 0 \leqslant t;\ u_1(x_2,\infty,t) = U(t),\ 0 \leqslant t$$

Используя переменные

$$v = u_1 + \int_0^t f(t)dt,\ w = v\exp(-\alpha x_3 - \beta t)$$

где $f(t) = \rho^{-1}\partial p/\partial x_1$, $\alpha = u_{30}/(2\nu)$, $\beta = -u_{30}^2/(4\nu)$, и, продолжая нечетным образом функцию $\zeta(x_2, x_3)$ по переменной x_3 в область $-\infty < x_3 < 0$, получим решение задачи

$$u_1(x_2,x_3,t) = v_1(x_2,x_3,t) + v_2(x_3,t) + U(t) - U(0)$$

$$v_1(x_2,x_3,t) = \exp\left(-\frac{u_{30}^2}{4\nu}t\right)\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty G(x_2,\xi_2,t)g(x_3,\xi_3,t)\times$$

$$\times\zeta(\xi_2,\xi_3)\exp\left(\frac{u_{30}}{2\nu}(x_3-\xi_3)\right)d\xi_3 d\xi_2$$

$$v_2(x_3,t)=\frac{\nu}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x_3}{[\nu(t-\tau)]^{3/2}}\exp\left(-\frac{[x_3-u_{30}(t-\tau)]^2}{4\nu(t-\tau)}\right)\times$$

$$\times[\mu(\tau)+U(0)-U(\tau)]d\tau$$

$$u_2=0,\ u_3=u_{30}\ (-dU/dt=f(t))$$

3. Течение в бесконечном двугранном угле. Требуется найти решение уравнения (1.5), где $u_{20}=0$, $u_{30}=0$, в области $0<x_2, x_3<\infty$, $0<t$, удовлетворяющее условиям

$$u_1(x_2,x_3,0)=\zeta(x_2,x_3),\ \ 0\leqslant x_2,x_3<\infty$$

$$u_1(0,x_3,t)=0,\ u_1(x_2,0,t)=0,\ \ 0\leqslant x_2,x_3<\infty,\ \ 0\leqslant t$$

$$u_1(\infty,\infty,t)=U(t),\ \ 0\leqslant t$$

Решение этой задачи представляется в виде

$$u_1(x_2,x_3,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty g(x_2,\xi_2,t)g(x_3,\xi_3,t)\zeta(\xi_2,\xi_3)d\xi_2 d\xi_3+$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty g(x_2,\xi_2,t-\tau)g(x_3,\xi_3,t-\tau)\frac{dU}{d\tau}d\xi_2 d\xi_3 d\tau$$

$$(dU/dt=-\rho^{-1}\partial p/\partial x_1)$$

4. Течение между параллельными плоскостями. В отличие от обычно рассматриваемой задачи [3] о течении, вызванном внезапным движением твердой границы относительно другой неподвижной границы, рассмотрим более общую задачу: требуется найти решение уравнений (1.1) в области $0<x_3<l$, $0<t$, удовлетворяющее условиям

$$u_k(x_3,0)=\zeta_k(x_3),\ \ 0\leqslant x_3\leqslant l;\ \ u_k(0,t)=\mu_{1k}(t),\ \ u_k(l,t)=\mu_{2k}(t),\ \ 0\leqslant t;\ \ k=1,2$$

Учитывая, что $\rho^{-1}\partial p/\partial x_k=f_k(t)$, получим решение этой задачи [1]

$$u_k(x_3,t)=\int_0^l G(x_3\xi,t)\chi_k(\xi)d\xi+\int_0^t\int_0^l G(x_3,\xi,t-\tau)h_k(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\mu_{1k}(t)+\frac{x_3}{l}[\mu_{2k}(t)-\mu_{1k}(t)] \tag{4.1}$$

где

$$\chi_k(\xi)=\zeta(\xi)-\mu_{1k}(0)-\frac{\xi}{l}[\mu_{2k}(0)-\mu_{1k}(0)]$$

$$h_k(\xi,\tau)=f_k(\tau)-\left\{\frac{d\mu_{1k}(\tau)}{d\tau}+\frac{\xi}{l}\left[\frac{d\mu_{2k}(\tau)}{d\tau}-\frac{d\mu_{1k}(\tau)}{d\tau}\right]\right\}$$

$$G(x_3,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\nu t\right]\sin\frac{n\pi x_3}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l},\ \ k=1,2$$

Функции ζ_k, μ_{1k}, μ_{2k}, f_k и величина l известны. Начальные функции $\zeta_k(x_3)$ могут быть кусочно-непрерывными и могут быть не сопряжены с граничными условиями [1] ($\zeta_k(0)\neq$ $\neq\mu_{1k}(0)$, $\zeta_k(l)\neq\mu_{2k}(0)$, $k=1,2$; тем самым указанные соотношения применимы в случае, когда стенки внезапно приводятся в движение). Векторы скоростей движения твердых границ $\{\mu_{11},$ $\mu_{12}\}$, $\{\mu_{21},\mu_{22}\}$могут быть, вообще говоря, неколлинеарны.

Пусть жидкость в начальный момент покоится, а ее движение возникает в результате того, что нижняя граница мгновенно приобретает постоянную скорость U в своей плоскости в направлении оси Ox_1, а верхняя граница мгновенно приобретает постоянную скорость V в своей плоскости в направлении оси Ox_2. Из (4.1) в данном случае получим

$$u_1(x_3,t) = U\left(1-\frac{x_3}{l}\right) - \frac{2U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \nu t\right]\sin\frac{n\pi x_3}{l}$$

$$u_2(x_3,t) = V\frac{x_3}{l} + \frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \nu t\right]\sin\frac{n\pi x_3}{l}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз. 1963. 727 с.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Казань

Поступила в редакцию
22.IV.1997

УДК 539.3

© 1998 г. Капцов А.В., Кузнецов С.В.

ПРОСТРАНСТВЕННО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Строятся пространственно периодические фундаментальные решения теории колебаний применительно к анизотропным упругим средам с анизотропией общего вида. Дается сравнение с изотропным случаем

Видимо, впервые пространственно периодические фундаментальные решения (ФР) для уравнения Гельмгольца построены Титчмаршем методом разложения в ряд Фурье [1]. Этот метод использовался в [2] применительно к пространственно периодическим уравнениям статики анизотропного тела. ФР для (пространственно) непериодических задач теории колебаний в случае изотропной среды получены в [3].

1. Основные операторы. Рассматривается упругоанизотропная однородная среда в R^3, уравнения колебаний которой имеют вид

$$\mathbf{A}(\partial_x, \omega)\,\mathbf{u} \equiv -\mathrm{div}_x \mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_x \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{u} = 0 \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{A}$ – матричный дифференциальный оператор теории колебаний, $\mathbf{C}$ – четырехвалентный тензор упругости, $\mathbf{u}$ – поле перемещений в среде, ω – частота колебаний.

Предполагается, что тензор $\mathbf{C}$ строго эллиптичен, что обеспечивает строгую эллиптичность оператора $\mathbf{A}(\partial_x, 0)$. Среда считается гиперупругой, что гарантирует симметрию тензора $\mathbf{C}$, если его рассматривать как оператор, действующий в пространстве симметричных тензоров второго ранга.

Интегральное преобразование Фурье

$$f^\wedge(\xi) = \int_{R^3} f(x)\exp(2\pi i \xi\cdot\mathbf{x})\,dx$$