УДК 532.5

© 1998 г. **И.И. Демчик**

К ТЕОРИИ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРОВАНИЯ С УБЫВАЮЩЕЙ СКОРОСТЬЮ

Рассматривается одномерный процесс фильтрования с убывающей по гиперболическому закону скоростью в рамках модели Д.М. Минца [1]. Показана эквивалентность системы модельных уравнений с соответствующими начальным и граничным условиями задаче Гурса для уравнений гиперболического типа. Последняя решена методом Римана на основании предложенного автором способа нахождения функции Римана. При постоянной скорости фильтрования полученные результаты сводятся к известным. Показана эквивалентность гиперболического и линейного законов фильтрования с убывающей скоростью в реальных условиях эксплуатации фильтров.

Система модельных уравнений с начальным и граничным условиями, соответствующая при $\gamma = 0$ модели Д.М. Минца, имеет вид

$$\rho_t + v(t)C_x = 0,\ \rho_t = \beta C - a(t)\rho \tag{1}$$

$$v(t) = v_0/(1+\gamma t),\ a(t) = a_0 v(t);\ v_0,\ \gamma,\ \alpha_0 = \mathrm{const}$$

$$\rho|_{t=0} = 0,\ C|_{x=0} = C_0;\ C_0 = \mathrm{const} \tag{2}$$

Здесь x – координата по толщине фильтра, $v(t)$ – скорость фильтрования, $C(x, t)$ и $\rho(x, t)$ – искомые концентрации взвешенных в жидкости примесей и осадка соответственно, β – кинетический коэффициент, предполагаемый постоянным [2], C_0 – концентрация примесей в жидкости на входе фильтра.

Исключая из системы (1) функцию ρ и полагая $C = U(1 + \gamma t)^{-z}$, где $z = a_0 v_0 \gamma^{-1}$, приходим к уравнению гиперболического типа

$$U_{xt} + b(t)U_t - pU = 0,\ b(t) = \beta v_0^{-1}(1+\gamma t),\ p = \beta v_0^{-1}\gamma(z-1) \tag{3}$$

Из условий (2) и системы (1) получаем

$$U|_{x=0} = C_0(1+\gamma t)^z,\ U|_{t=0} = C_0 \exp(-\beta v_0^{-1} x) \tag{4}$$

Задача (3), (5) является частным случаем задачи Гурса [3], для решения которой достаточно найти соответствующую функцию Римана R. Согласно методу определения функции Римана, предложенному автором, для общего линейного уравнения второго порядка гиперболического типа с двумя независимыми переменными, применительно к уравнению (3) будем иметь

$$R = \exp[b(t)(x-\xi)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n^n}{n!}(x-\xi)^n \tag{5}$$

$$T_n^n = \int_\eta^t [p-(n-1)b_t(t)] \int_\eta^t \ldots \int_\eta^t [p-b_t(t)] \int_\eta^t p(dt)^n$$

После подстановки в (5) выражений для $b(t)$ и p получим

$$R = \exp[(1+\tilde{t})(\tilde{x}-\tilde{\xi})] \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z-1}{n} \frac{[(\tilde{t}-\tilde{\eta})(\tilde{x}-\tilde{\xi})]^n}{n!} =$$

$$= \exp[(1+\tilde{t})(\tilde{x}-\tilde{\xi})]\, {}_1F_1[-(z-1),1;-(\tilde{t}-\tilde{\eta})(\tilde{x}-\tilde{\xi})] \tag{6}$$

$$(\tilde{t}-\tilde{\eta}) = \gamma(t-\eta),\ (\tilde{x}-\tilde{\xi}) = \frac{\beta}{v}(x-\xi)$$

Здесь η, ξ – текущие значения x и t соответствено, ${}_1F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

При учете соотношения [4]

$${}_1F_1(\alpha,\gamma;z)=e^z{}_1F_1(\gamma-\alpha,\gamma;-z)$$

функцию Римана можно представить в виде

$$R=\exp[(\tilde{x}-\tilde{\xi})(\tilde{\eta}+1)]_1F_1(z,1;(\tilde{t}-\tilde{\eta})(\tilde{x}-\tilde{\xi})] \tag{7}$$

Далее на основании выражения (6) методом Римана [3] находим

$$C(\tilde{x},t)=\frac{C_0}{(1+\tilde{t})^z}\{e^{-\tilde{x}}{}_1F_1[-(z-1),1;-\tilde{x}\tilde{t}]+zG(x,t,z-1)\} \tag{8}$$

$$G(\tilde{x},\tilde{t},z)=\int_0^{\tilde{t}}(1+\tau)^z e^{-\tilde{x}(1+\tau)}{}_1F_1[-z,1;\tilde{x}(\tau-\tilde{t})]d\tau$$

Остановимся на некоторых особенностях полученного решения. Если величина $z-1$ равна целому неотрицательному числу n, то вырожденный гипергеометрический ряд обрывается, причем [4]

$${}_1F_1(-n,1;-y)=L_n(-y) \tag{9}$$

где L_n – полином Лагерра n-й степени. Справедливо также следующее предельное соотношение [4]:

$$\lim_{n\to\infty}L_n\left(\frac{y}{n}\right)=J_0\left(2\sqrt{y}\right) \tag{10}$$

Здесь J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Поэтому при достаточно больших n в выражении (9) функция ${}_1F_1$ может быть заменена функцией Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента I_0. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}L_n[-\tilde{x}(\tilde{t}-\tau)]=\lim_{n\to\infty}L_n\left[-\frac{\tilde{x}(\tilde{t}_1-\theta)}{n}\right]=I_0\left(2\sqrt{\tilde{x}(\tilde{t}_1-\theta)}\right),\ t_1=a_0\upsilon_0t \tag{11}$$

Таким образом, в этом случае выражение (8) принимает вид

$$C(\tilde{x},\tilde{t}_1)=C_0e^{-\tilde{x}-\tilde{t}_1}\left\{I_0\left(2\sqrt{\tilde{x}\tilde{t}_1}\right)+H(\tilde{x},\tilde{t}_1)\right\},\ H(\tilde{x},\tilde{t}_1)=\int_0^{\tilde{t}_1}e^{\theta}I_0\left(2\sqrt{\tilde{x}(\tilde{t}_1-\theta)}\right)d\theta \tag{12}$$

Переходя к переменной $\varphi=\tilde{x}(\tilde{t}_1-\theta)$, получим известное решение А.Н. Тихонова [5], соответствующее постоянной скорости фильтрования ($\gamma=0$). Вместе с тем, учитывая, что выражение (12) является асимптотическим представлением решения (8) при $z=a_0\upsilon_0\gamma^{-1}\to\infty$, можно сделать вывод о его применимости и в случае $a_0\upsilon_0\gg\gamma$, т.е. при относительно больших скоростях фильтрования и малой прочности образующегося осадка, когда велика вероятность отрыва его частиц под действием потока жидкости.

Концентрация ρ находится аналогичным образом. Исключая из системы (1) функцию C и полагая $\rho=V(1+\gamma t)^{-z}$, приходим к уравнению относительно $V(x,t)$, отличающемуся от уравнения (3) тем, что здесь $p=a_0\beta$. Преобразуя условия (2) при помощи системы (1), получаем

$$V|_{t=0}=0,\ V|_{x=0}=\frac{\beta C_0}{\gamma(1+z)}[(1+\gamma t)^{1+z}-1] \tag{13}$$

В данном случае функция Римана также находится по формуле (5), но с $p=a_0\beta$, и справедлива формула, отличающаяся от (6) заменой $z-1$ на z. Методом Римана [3] находим

$$\rho(\tilde{x},\tilde{t})=\frac{\beta C_0}{\gamma(1+\tilde{t})^z}G(\tilde{x},\tilde{t},z) \tag{14}$$

В случае достаточно больших целых z можно, согласно соотношению (11), вместо (14) использовать выражение

$$\rho(\tilde{x},\tilde{t}_1)=\frac{\beta C_0}{a_0\upsilon_0}e^{-\tilde{x}-\tilde{t}_1}H(\tilde{x},\tilde{t}_1) \tag{15}$$

Решения (8), (14) и их асимптотические представления (12), (15) имеют конкретный статистический смысл, поскольку система уравнений (1) сводится к стохастическим уравнениям типа Колмогорова – Феллера относительно концентраций C и ρ. В частности, было показано [6] следующее: сводимость математической модели Д.М. Минца [1], являющейся прототипом системы (1) при $\gamma = 0$, к уравнениям Колмогорова – Феллера; тождественность решения (15) для концентрации ρ интегральной функции распределения Релея – Райса и возможность его представления в виде арифметических операций над пуассоновскими вероятностями захвата взвешенных частиц примеси и отрыва частиц образующегося осадка.

Отметим, что решения (8), (14) хорошо аппроксимируют случай линейно убывающей скорости фильтрования. Действительно, в широком диапазоне реальных условий эксплуатации фильтров к концу времени их защитного действия t_* скорость фильтрования снижается не более чем на 10–15%. Это означает, что

$$v(t) = v_0/(1+\gamma t) \approx v_0(1-\gamma t) \text{ при } t \leq t_*$$

т.е. при указанных ограничениях на скорость фильтрования гиперболический и линейный законы ее изменения можно считать эквивалентными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Минц Д.М.* Теоретические основы технологии очистки воды. М.: Стройиздат, 1964. 156 с.
2. *Сандуляк А.В.* Очистка жидкостей в магнитном поле. Львов: Выща шк., 1984. 166 с.
3. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 295 с.
4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
5. *Жуховицкий А.А., Забежинский Я.Л., Тихонов А.Н.* Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. I // Журн. физ. химии. 1945. Т. 19. Вып. 6. С. 253–261.
6. *Кочмарский В.З., Демчик И.И.* Статистическая интерпретация математической модели процесса фильтрования Минца // Теорет. основы хим. технологии. 1989. Т. 23. № 3. С. 405–407.

Ровно

Поступила в редакцию
13.VIII.1997

УДК 532.516

© 1998 г. **В.Г. Жаринов**

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВЯЗКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ОКОЛО ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Получены точные решения ряда задач о неустановившемся течении вязкой несжимаемой жидкости для специальных классов распределения скоростей, приводящих уравнения Навье – Стокса к линейному виду. В отличие от известных решений подобных задач учитываются более общие краевые условия и неодномерность течений. Рассматриваются задачи о сглаживании разрыва скорости и распространении вихря в пространстве, о течении жидкости над бесконечной плоской поверхностью, в бесконечном двугранном угле и между параллельными плоскостями.

1. Сглаживание разрыва скорости и распространение вихря. Будем полагать, что в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ составляющие скорости в направлении соответствующих координат имеют вид

$$u_1 = u_1(x_3, t), \; u_2 = u_2(x_3, t), \; u_{30} = \text{const}$$