УДК 532.5

© 1998 г. П.Я. Кочина, Н.Н. Кочина

К ВОПРОСУ О ЗЕМЛЯНОЙ ПЕРЕМЫЧКЕ

Исследуется поведение решения задачи о прямоугольной земляной перемычке в окрестности особой точки на пересечении свободной поверхности и промежутка высачивания. Аналогичный результат получен для земляной плотины с наклонным низовым откосом.

Решение задачи о фильтрации через прямоугольную земляную перемычку, найденное П.Я. Кочиной (П.Я. Полубариновой-Кочиной) и подробно описанное [1, 2], было еще более детально исследовано с описанием шести предельных случаев, в каждом из которых одна или несколько постоянных безразмерных характеристик, определяющих решение конкретной задачи, обращается в нуль или бесконечность ([3], табл. 2 на с. 76).

Для прямоугольной земляной перемычки (фиг. 1) в общем случае, когда безразмерные параметры a и b, от которых зависит решение задачи, удовлетворяют неравенствам

$$1 < a < b < \infty \tag{1}$$

в областях, определяющих движение, имеется пять особых точек: A, B, C, D и E. В каждом из упомянутых шести предельных случаев строгие неравенства (1) заменяются какими-либо из следующих неравенств с равенствами:

$$1 \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty \tag{2}$$

Исследуем поведение некоторых искомых функций задачи в окрестности особой точки A на границе между свободной поверхностью и промежутком высачивания (которое будет одинаковым для общего случая и всех предельных случаев).

В плоскости $w = d\omega/dz = u - iv$ решение задачи о перемычке соответствует фиг. 2. Здесь $z = x + iy$, $\omega = \varphi + i\psi$, φ – потенциал скорости, ψ – функция тока, w – комплексная скорость, ω – комплексный потенциал, u и v – составляющие скорости фильтрации по осям x и y, $\varkappa$ – коэффициент фильтрации.

Точка A на фиг. 1 и 2 отделяет свободную поверхность ВА от промежутка высачивания АЕ. Из фиг. 2 видно, что на свободной поверхности ВА выполняется условие

$$u^2 + v^2 + \varkappa v = 0 \tag{3}$$

а на промежутке высачивания АЕ – условие

$$v = -\varkappa \tag{4}$$

На вспомогательной комплексной плоскости ζ (фиг. 3) особым точкам C и D отвечают значения параметров a и b соответственно (в силу (1) и (2) $a \leqslant b$). На фиг. 4 показана область комплексного потенциала ω.

Из фиг. 2 и формул (3), (4) ясно, что в точке A имеют место равенства $u = 0$, $v = -\varkappa$.

В плоскости ζ свободной поверхности отвечает отрезок $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, а промежутку высачивания – луч $\zeta \leqslant 0$, при этом точке A соответствует значение $\zeta = 0$ (фиг. 3).

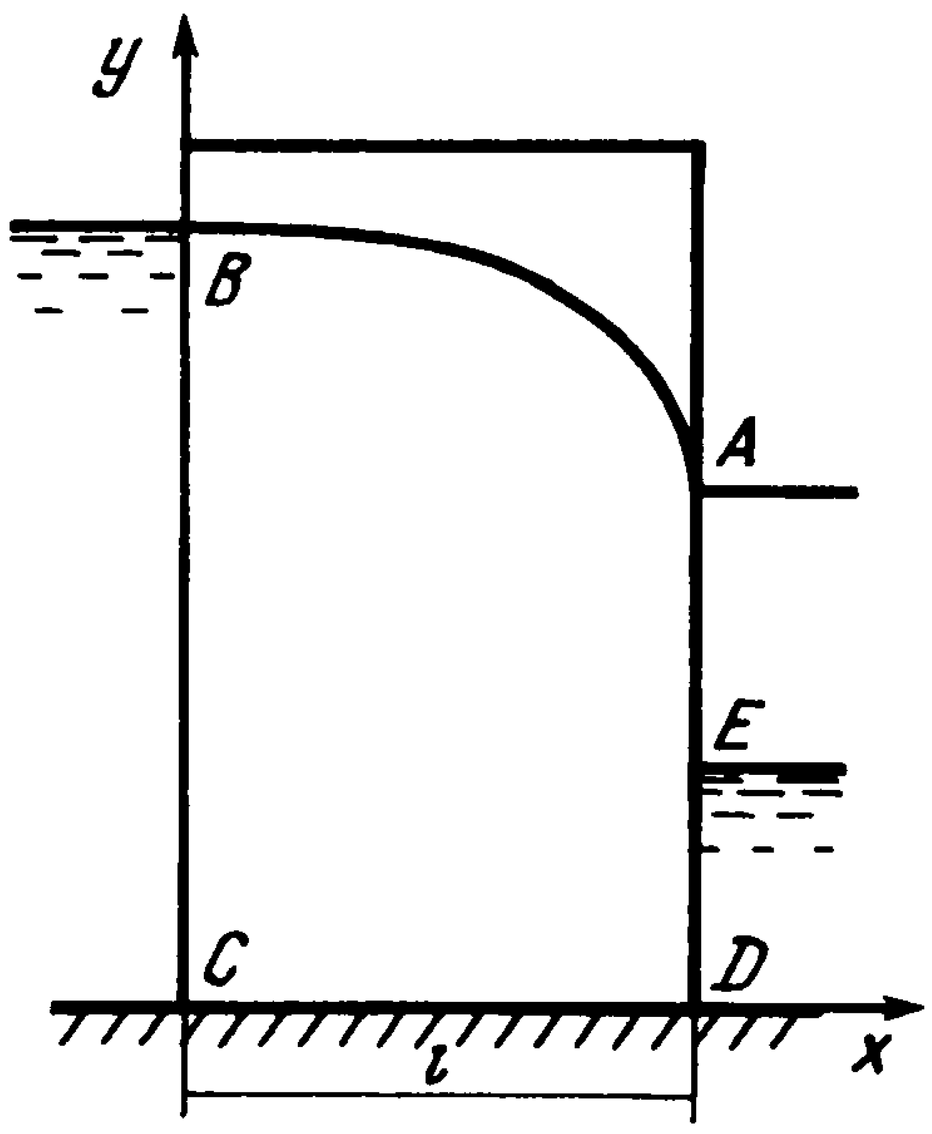
Из решения задачи о прямоугольной земляной перемычке [1, 2] вытекает, что

$$dy/2x = -K(1-\zeta)/K(\zeta) \quad (0 < \zeta < 1) \tag{5}$$

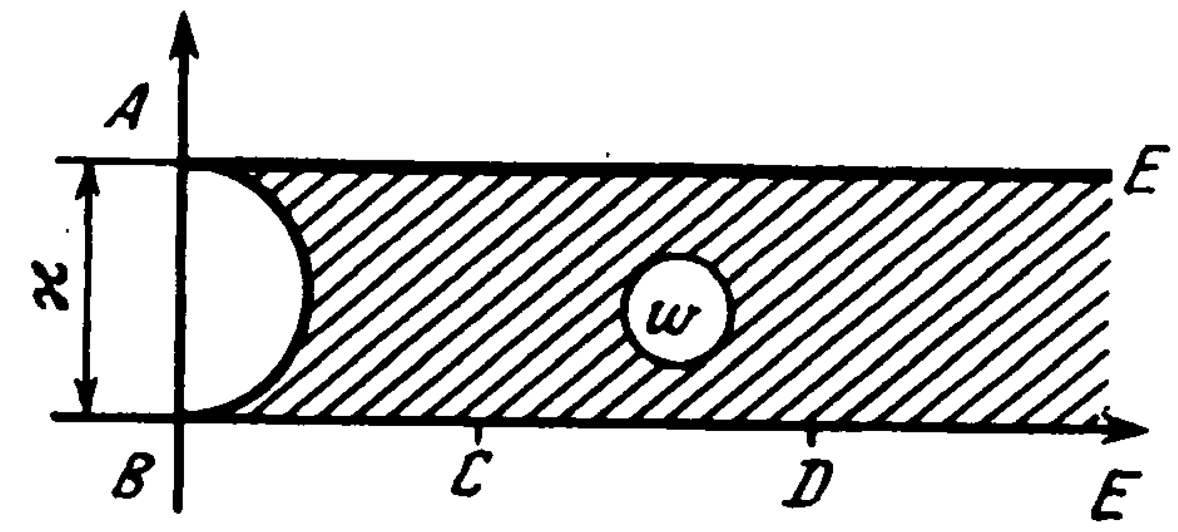
Здесь $K(\zeta)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, рассматриваемый как функция от квадрата модуля $k^2 = \zeta$. Из формулы (5) следует, что $\lim dy/dx = -\infty$ при $\zeta \to 0$, т.е. на фиг. 1 касательная к свободной поверхности в точке A вертикальна, так как $dy/dx \approx \pi^{-1} \ln \zeta$.

Пусть в точке A $x = l$, $y = y_0$. Используя формулу (5), находим вблизи значения $x = l$ асимптотическое представление

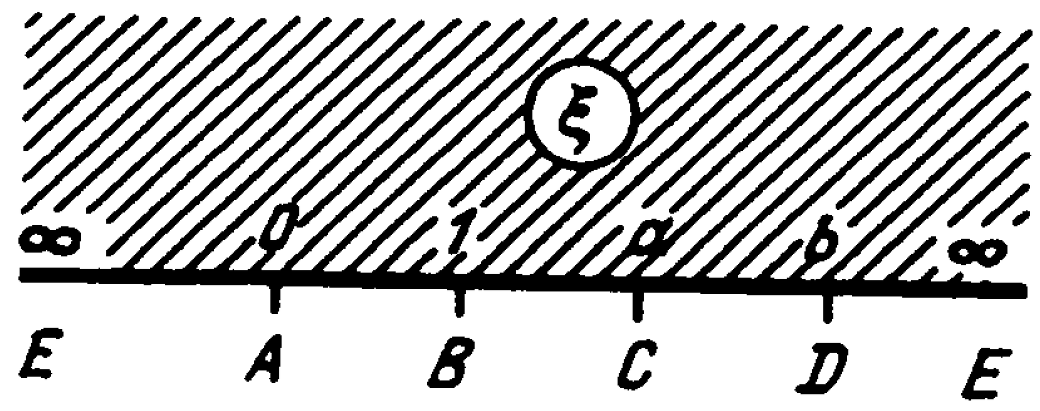
$$y \approx y_0 - \pi^{-1}(l - x) \ln (l - x) \tag{6}$$



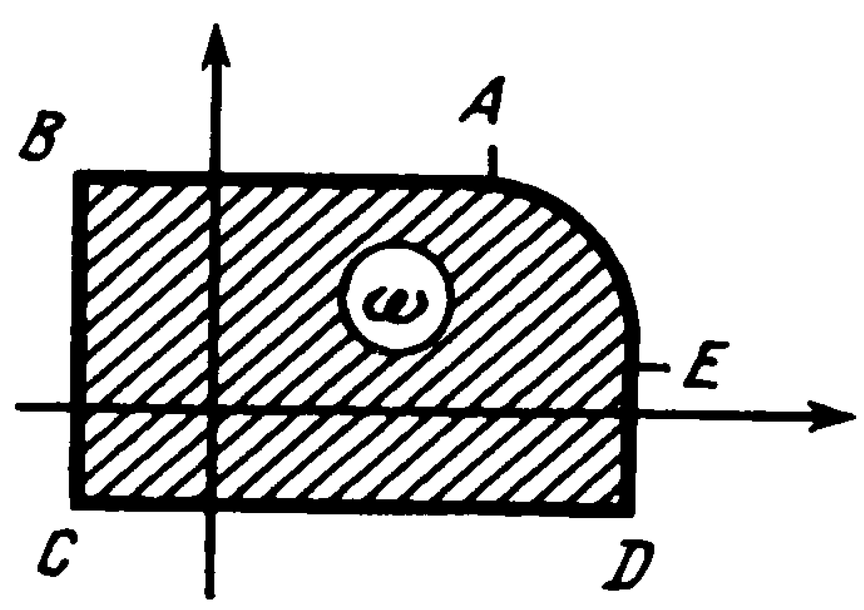
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Таково поведение в окрестности точки A решения задачи о прямоугольной перемычке как для общего случая, так и для всех остальных случаев.

На фиг. 4 на дуге EA параметрическая зависимость ψ от φ определяется формулами (G – некоторая постоянная размерности длины)

$$\varphi = \varphi_0 - \varkappa G \int \frac{K(1/(1-\zeta))d\zeta}{(1-\zeta)\sqrt{(a-\zeta)(b-\zeta)}}, \quad \psi = \psi_0 + \varkappa G \int \frac{K(\zeta/(\zeta-1))d\zeta}{(1-\zeta)\sqrt{(a-\zeta)(b-\zeta)}}$$

Видно, что в точке A $d\psi/d\varphi = 0$, а в точке E $d\varphi/d\psi = 0$.

В случае земляной плотины с наклонным (под углом $\pi\alpha$, $1/2 < \alpha < 1$) низовым откосом, уравнение которого $y = x \operatorname{tg} \alpha$, уравнение свободной поверхности BA в области w имеет снова вид (3), а на промежутке высачивания AE вместо (4) получается соотношение

$$u \cos \alpha + (v + \varkappa) \sin \alpha = 0 \qquad (7)$$

Решая совместно уравнения (3) и (7), получим $v/u = \operatorname{tg} \alpha$, т.е. и в этом случае свободная поверхность касается в точке, соответствующей точке A, промежутка высачивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. *Кочина П.Я., Кочина Н.Н.* Гидромеханика подземных вод и вопросы орошения. М.: Наука, 1994. 238 с.
3. *Кочина П.Я., Кочина Н.Н.* Задачи о движениях со свободной поверхностью в подземной гидродинамике. М.: Редакция журн. "Успехи физ. наук". 1996. 176 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.III.1997