УДК 531.38

© 1998 г. Р.С. Суликашвили

О ДВИЖЕНИИ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Рассматривается гиростат в виде шара с шаровой полостью, внутри которой помещен шаровой ротор, вращающийся с постоянной угловой скоростью относительно внешнего шара. Центры внешнего шара с полостью и ротора совпадают. К внешнему шару прикреплены одинаковые точечные массы, сосредоточенные в вершинах октаэдра. Изучается влияние вращения ротора на существование и устойчивость стационарных движений гиростата вокруг центра масс в ньютоновском поле неподвижного притягивающего центра. Исследуются движения, в которых радиус-вектор центра гиростата и гиростатический момент коллинеарны. Показано, что наличие гиростатического момента может существенно изменить характер устойчивости найденных стационарных движений.

1. Потенциальная энергия. Уравнения движения. Первые интегралы. Пусть $Ox_1x_2x_3$ – жестко связанная с гиростатом система координат, такая, что вершины октаэдра, в которых сосредоточены массы m, имеют координаты [1] $A_1 = (1, 0, 0)a$, $A_2 = (-1, 0, 0)a$, $A_3 = (0, 1, 0)a$, $A_4 = (0, -1, 0)a$, $A_5 = (0, 0, 1)a$, $A_6 = (0, 0, -1)a$.

Будем считать, что момент инерции шара равен I_s, вектор гиростатического момента имеет вид $\mathbf{K} = (k_1, k_2, k_3)$. Тогда если тело совершает движение в ньютоновском поле неподвижного притягивающего центра N массы M, то потенциальная энергия имеет вид

$$U = -fmM\sum\frac{1}{|\overrightarrow{NA_i}|} = -fmM\sum[R^2 + 2Ra(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}_i) + a^2]^{-1/2} \tag{1.1}$$

$$R = |\overrightarrow{NO}|,\ \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \frac{1}{R}\overrightarrow{NO},\ \mathbf{e}_i = (e_{1i}, e_{2i}, e_{3i}) = \frac{1}{a}\overrightarrow{OA_i}$$

Уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{d(I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K})}{dt} = (I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K})\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{U}_\gamma,\ \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega};\ I = I_s + I_p;\ \mathbf{U}_\gamma = \frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\gamma}} \tag{1.2}$$

где I_p – центральный момент инерции системы точечных масс. Если вектор гиростатического момента $\mathbf{K}$ постоянный, то в силу сферичности тензора инерции I уравнения движения представимы в виде

$$\frac{dI\boldsymbol{\omega}}{dt} = (I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K})\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{U}_\gamma,\ \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}$$

Уравнения (1.2) допускают три первых интеграла: интеграл энергии $Z_0 = (I\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})/2 + U(\boldsymbol{\gamma}) = h$, интеграл проекции кинетического момента на ось γ $Z_1 = (I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma}) = P_\psi$ и геометрический интеграл $Z_2 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1$. Для интегрируемости уравнений движения не хватает одного первого интеграла.

2. Стационарные движения. Рассмотрим множество стационарных движений гиростата. Оно определяется как совокупность критических точек интеграла энергии на совместном уровне интегралов Z_1 и Z_2. Пусть

$$W_{\lambda,\mu} = Z_0 - \lambda(Z_1 - P_\psi) + \frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{\gamma}^2 - 1)$$

где λ и μ – неопределенные множители Лагранжа.

Тогда множество стационарных движений находится из системы уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial W_{\lambda,\mu}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = I\boldsymbol{\omega} - \lambda I\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial W_{\lambda,\mu}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = -\lambda(I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) + \mathbf{U}_\gamma + \mu\boldsymbol{\gamma} = 0 \\ \frac{\partial W_{\lambda,\mu}}{\partial \lambda} = -(Z_1 - P_\psi) = 0, \quad \frac{\partial W_{\lambda,\mu}}{\partial \mu} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}^2 - 1) = 0\end{gathered} \tag{2.1}$$

В силу первого соотношения (2.1) $\boldsymbol{\omega} = \mu\boldsymbol{\gamma}$ и стационарные движения – это вращения с постоянной угловой скоростью λ. В силу второго и четвертого соотношений (2.1) имеем

$$-\lambda(\lambda I\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{K}) + \mathbf{U}_\gamma + \mu\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 - 1 = 0 \tag{2.2}$$

Таким образом,

$$\mu = \lambda[\lambda I(\boldsymbol{\gamma}) + (\mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma})] - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{U}_\gamma)$$

причем на основании третьего соотношения (2.1)

$$\lambda(I(\boldsymbol{\gamma}) + (\mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma}) = P_\psi$$

Следовательно,

$$\lambda = (P_\Psi - (K,\ \gamma)) / I(\gamma)$$

где $I(\boldsymbol{\gamma}) = I_1\gamma_1^2 + I_2\gamma_2^2 + I_3\gamma_3^2$ – момент инерции тела относительно оси γ. Тогда в силу (2.2)

$$-\frac{[P_\psi - (\mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma})]^2}{I^2(\boldsymbol{\gamma})} I\boldsymbol{\gamma} - \frac{P_\psi - (\mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma})}{I(\boldsymbol{\gamma})}\mathbf{K} + U_\gamma + \mu\boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{2.3}$$

Иными словами, стационарные движения определяются как критические точки эффективного потенциала:

$$W_\mu = \frac{[P_\psi - (\mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma})]^2}{2I(\boldsymbol{\gamma})} + U(\boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{\gamma}^2 - 1) \tag{2.4}$$

Для потенциала (1.1) в общем случае найти все решения системы (2.2), (2.3) достаточно трудно. Будем искать решения, когда вектор $\mathbf{K}$ колинеарен вектору $\boldsymbol{\gamma}$: $\mathbf{K} = k\boldsymbol{\gamma}$. Тогда в силу соотношения (1.1) уравнение для отыскания стационарных движений можно представить в виде

$$-(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{U}_\gamma)\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{U}_\gamma = 0$$

Это уравнение совпадает с уравнениями для определения стационарных движений в случае равенства нулю гиростатического момента. Следовательно, при выполнении условия $\mathbf{K} = k\boldsymbol{\gamma}$ на стационарных движениях гиростата оси вращения совпадают с осями вращения одного твердого тела, отвечающего нулевому значению гиростатического момента, а именно [1], существуют лишь такие вращения, для которых ось проходит либо через вершину, либо через центр грани октаэдра.

Аналогичные результаты справедливы и для любых других правильных многогранников с равными массами в вершинах.

3. Устойчивость стационарных движений. Для исследования устойчивости найденных стационарных решений изучим знакоопределенность второй вариации функции W_μ на линейном многообразии

$$\delta Z_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \delta\boldsymbol{\gamma}) = 0$$

Рассмотрим движения, на которых тело обращено к притягивающему центру какой-либо из своих вершин. Одно из них соответствует ориентации $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$. Тогда

$$\delta Z_1 = 0 \Leftrightarrow \delta\gamma_3 = 0, \;\; 2\delta^2 W_\mu = \varkappa[(\delta\gamma_1)^2 + (\delta\gamma_2)^2]$$

$$\varkappa = -\frac{6fmMR^2a^2}{(R^2+a^2)^{5/2}} - fmMRa\left[\frac{1}{|R+a|^3} - \frac{1}{|R-a|^3}\right] + \frac{P_\psi k - k^2}{I} > 0$$

Как известно [2], при $\mathbf{K} = 0$ и $R > a$ движение устойчиво в вековом смысле. Однако, если величина $|\mathbf{K}|$ достаточно велика, то оба коэффициента Пуанкаре становятся отрицательными и степень неустойчивости оказывается равной двум.

Имеются такие движения, на которых

$$\boldsymbol{\gamma} = (1,1,0)/\sqrt{2} = \boldsymbol{\gamma}_{1-2}$$

Для них тело обращено к притягивающему центру одним из своих ребер. Тогда

$$\delta Z_1 = 0 \Leftrightarrow \{\delta\gamma \; : \; \delta\gamma_1 + \delta\gamma_2 = 0\}, \;\; 2\delta^2 W_\mu = \varkappa_1(\delta\gamma_1)^2 + \varkappa_3(\delta\gamma_3)^2$$

и условия устойчивости имеют вид

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 U(\gamma_{1-2})}{\partial\gamma_1^2} + \frac{P_\psi k - k^2}{I} - \sqrt{2}\frac{\partial U(\gamma_{1-2})}{\partial\gamma_1} > 0$$

$$\varkappa_3 = \frac{\partial^2 U(\gamma_{1-2})}{\partial\gamma_3^2} + \frac{P_\psi k - k^2}{I} - \sqrt{2}\frac{\partial U(\gamma_{1-2})}{\partial\gamma_3} > 0$$

Имеются такие движения, на которых

$$\boldsymbol{\gamma}_{1-3} = (1,1,1)/\sqrt{3}$$

Для них тело обращено к притягивающему центру одной из своих граней. Тогда

$$\delta Z_1 = 0 \Leftrightarrow \{\delta\gamma \; : \; \delta\gamma_1 + \delta\gamma_2 + \delta\gamma_3 = 0\}, \;\; 2\delta^2 W_\mu = 3(A-B)[(\delta\gamma_1)^2 + \delta\gamma_1\delta\gamma_2 + (\delta\gamma_2)^2]$$

$$A = \frac{\partial^2 U(\gamma_{1-3})}{\partial\gamma_1^2} + \frac{P_\psi k - k^2}{I} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial U(\gamma_{1-3})}{\partial\gamma_1}, \;\; B = \frac{\partial^2 U(\gamma_{1-3})}{\partial\gamma_1\partial\gamma_2} + \frac{(2P_\psi - k)^2}{3I}$$

Если $A - B > 0$, движение устойчиво в вековом смысле, а если $A - B < 0$, то оба коэффициента Пуанкаре отрицательны и степень неустойчивости равна двум.

Было показано [2], что при $K = 0$ величина $A - B$ отрицательна при $R > A$ и степень неустойчивости данного движения равна двум. Вместе с тем в пространстве $(P_\psi, \mathbf{K})$ имеется область, для которой эта величина положительна. Соответствующие этой области движения оказываются устойчивыми в вековом смысле.

Работа выполнена при поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-93-1621-ext).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суликашвили Р.С.* О стационарных движениях тел, допускающих группы симметрий правильных многогранников в ньютоновском поле сил // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582–586.
2. *Суликашвили Р.С.* О стационарных движениях тетраэдра и октаэдра в центральном поле тяготения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1987. С. 57–66.

Тбилиси

Поступила в редакцию
21.III.1996