

УДК 539.375

© 1998 г. С.А. Назаров

**ТРЕЩИНА НА СТЫКЕ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ.
СИНГУЛЯРНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ И ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

Для задачи о деформации составной анизотропной плоскости с трещиной (в линейной постановке, без каких-либо предположений о симметрии) перечисляются все возможные степенные решения и обнаруживаются общие связи между обычными и сингулярными решениями. Вычисляется асимптотика приращения потенциальной энергии деформации в случаях прямолинейного распространения трещины, отклонения отростка или ветвления. Окончательная формула приводится к виду, однотипному с классическим вариантом формулы Гриффитса, и ассоциируется с двумя инвариантными интегралами. Предлагаются два подхода, силовой и энергетический, к определению мод корневых особенностей напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины.

1. Постановка задачи. Пусть нижняя и верхняя полуплоскости \mathbf{R}_\pm^2 заполнены однородными анизотропными материалами, вообще говоря, различными, и соединены по лучу Λ_+ ; здесь $\Lambda_\pm = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2: x_2 = 0, \pm x_1 > 0\}$, $\mathbf{R}_\pm^2 = \{x: \pm x_2 > 0\}$. Как известно, для многих целей достаточно изучить степенные решения (СР)

$$U(x) = r^\lambda \Phi(\varphi, \ln r) \tag{1.1}$$

соответствующих однородных уравнений равновесия в \mathbf{R}_\pm^2 , краевых условий на Λ_- и условий сопряжения (контакта) на Λ_+ . В (1.1) (r, φ) – полярные координаты на $\mathbf{R}^2 \setminus \Lambda_-$; $r = |x|$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$; $\lambda \in \mathbf{C}$, $l \mapsto \Phi(\varphi, l)$ – векторные полиномы. Подчеркнем, что u – трехмерный вектор; не предполагается, что пространственная задача распадается на независимые плоскую и антиплоскую задачи.

Введем необходимые обозначения. Под $u^\pm = (u_1^\pm, u_2^\pm, u_3^\pm)$ подразумеваем вектор смещений в \mathbf{R}_\pm^2 ; u_3^\pm – депланация. Тензоры напряжений обозначаем $\sigma^\pm(u^\pm) = (\sigma_{jk}^\pm(u^\pm))$, где $j, k = 1, 2, 3$. Кроме того, $\partial_p = \partial/\partial x_p$ и $L^\pm(\nabla) u^\pm, N^\pm(\nabla) u^\pm$ – векторы, проекции которых на ось x_j имеют вид

$$-\partial_1 \sigma_{1j}^\pm(u^\pm) - \partial_2 \sigma_{2j}^\pm(u^\pm), \sigma_{2j}^\pm(u^\pm) \tag{1.2}$$

В декартовой записи $L^\pm(\nabla)$ и $N^\pm(\nabla)$ – (3×3) -матричные дифференциальные операторы второго и первого порядков. Наконец, $\epsilon(u)$ – тензор деформаций с компонентами $\epsilon_{jk}(u)$ и, если $\Omega_\pm \subset \mathbf{R}_\pm^2$, то $E^\pm(u^\pm, v^\pm; \Omega_\pm)$ – упругая энергия, запасаемая телом Ω_\pm при деформации $\epsilon(u^\pm)$, т.е.

$$E^\pm(u^\pm, v^\pm; \Omega_\pm) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jk}(u^\pm) \sigma_{jk}(u^\pm) dx = E^\pm(v^\pm, u^\pm; \Omega_\pm) \tag{1.3}$$

$$E(u, v; \Omega) = E^+(u^+, v^+; \Omega \cap \mathbf{R}_+^2) + E^-(u^-, v^-; \Omega \cap \mathbf{R}_-^2) \tag{1.4}$$

Итак, СР (1.1) удовлетворяет соотношениям

$$L^\pm(\nabla)U^\pm(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}_\pm^2 \quad (1.5)$$

$$\mp N^\pm(\nabla)U^\pm(x) = 0, \quad x \in \Lambda_- \quad (1.6)$$

$$U^+(x) = U^-(x), \quad N^+(\nabla)U^+(x) = N^-(\nabla)U^-(x), \quad x \in \Lambda_+ \quad (1.7)$$

Через U^\pm обозначается сужение U на \mathbf{R}_\pm^2 , а след U^\pm при $x_2 = 0$ понимается как предел при $x_2 \rightarrow \pm 0$. Для любых достаточно гладких вектор-функций u и v справедливо тождество Бетти

$$\int_{\Omega} v Lu dx + \int_{\partial\Omega} v \sigma^{(v)}(u) ds + \int_{\Lambda_+ \cap \partial\Omega} v (N^+ u^+ - N^- u^-) dx_1 = 2E(u, v; \Omega) \quad (1.8)$$

Здесь Ω – подобласть $\mathbf{R}^2 \setminus \Lambda_-$, ds – элемент длины дуги, $v = (v_1, v_2)$ – единичный вектор внешней нормали, $\sigma^{(v)} = (\sigma_1^{(v)}, \sigma_2^{(v)}, \sigma_3^{(v)})$. Кроме того,

$$L(\nabla)u(x) = L^\pm(\nabla)u^\pm(x), \quad x \in \Omega_\pm \equiv \Omega \cap \mathbf{R}_\pm^2 \quad (1.9)$$

$$\sigma_j^{(v)}(u; x) = v_1(x) \sigma_{j1}^\pm(u^\pm; x) + v_2(x) \sigma_{j2}^\pm(u^\pm; x)$$

$$x \in (\partial\Omega)_\pm \equiv \{x \in \partial\Omega : \pm x_2 \geq 0\}$$

Задача (1.5)–(1.7) линейна, т.е. контакт берегов игнорируется даже в случае, когда возникают осциллирующие сингулярности, отвечающие комплексным λ в (1.1), и требуются нелинейные условия контакта для устранения перехлеста берегов (см. [1–3] и др.). Тем не менее благодаря результатам [4–6], локализуя нелинейные эффекты, сформулированная задача вполне осмыслена и исследованию сингулярностей ее решений посвящено большое количество публикаций ([4–19] и др.), где в основном изучался случай распада задачи (1.5)–(1.7) на плоскую и антиплоскую и проводились прямые аналитические вычисления. В данной статье используется подход [20] (см. также [21], гл. 7), пригодный для общих самосопряженных систем с кусочно постоянными коэффициентами и позволяющий избегать рутинных выкладок.

2. Дифференцирование вдоль трещины. Приведем сначала известные факты теории эллиптических задач в областях с угловыми (коническими) точками ([22–24] и [21, 25], гл. 3). Число λ в (1.1) является собственным для задачи на дуге $(-\pi, \pi)$, которая получается подстановкой в (1.5)–(1.7) вектора $r^\lambda \Phi(\varphi)$. Для краткости оператор такой задачи запишем одним символом $A(\lambda)$. Абстрактная функция $\lambda \mapsto A(\lambda)$ (пучок) квадратична. Жорданова цепочка (ЖЦ) $\Psi^0, \dots, \Psi^{\kappa-1}$ длиной κ , отвечающая собственному числу (СЧ) λ_* пучка A , состоит из собственного Ψ^0 и присоединенных векторов $\Psi^1, \dots, \Psi^{\kappa-1}$, которые находятся из задач

$$A(\lambda_*)\Psi^k = -\sum_{p=1}^k \frac{1}{p!} \frac{d^p A}{d\lambda^p}(\lambda_*)\Psi^{k-p}, \quad k = 0, \dots, \kappa-1 \quad (2.1)$$

Каждой ЖЦ отвечает набор СР

$$V^k(x) = r^{\lambda_*} \sum_{p=1}^k \frac{1}{p!} (\ln r)^p \Psi^{k-p}(\varphi), \quad k = 0, \dots, \kappa-1 \quad (2.2)$$

Любое СР (1.1) может быть представлено в виде (2.2), где Ψ^0, \dots, Ψ^k – некоторая ЖЦ, отвечающая СЧ λ_* .

Обозначим Σ спектр пучка A или, что то же, множество показателей в нетривиальных СР (1.1) задачи (1.5)–(1.7). Ввиду вещественности коэффициентов опера-

торов L^\pm и N^\pm

$$\lambda \in \Sigma \Rightarrow \bar{\lambda} \in \Sigma \quad (2.3)$$

Черта означает комплексное сопряжение. Задача (1.5)–(1.7) формально самосопряжена, т.е. в соответствии с [25], § 5.5, [21], § 6.1, имеем

$$\lambda \in \Sigma \Rightarrow -\bar{\lambda} \in \Sigma \quad (2.4)$$

Коэффициенты операторов постоянны и вектор $\partial_1 U$, полученный дифференцированием (1.1) по x_1 , также удовлетворяет (1.5)–(1.7). Так как $\varphi \mapsto \Phi(\varphi, \ln r)$ – гладкая функция при $\varphi \neq 0$, равенство $\partial_1 U$ возможно только тогда, когда $U^\pm(x) = x_2^k a^\pm$. Непосредственными вычислениями проверяется, что в случае $k \geq 2$ нарушается уравнение (1.5), а в случае $k = 1$ – условие (1.6). Остается очевидная возможность: $U^\pm = a$ – жесткое смещение. Итак,

$$0 \in \Sigma; \lambda \in \Sigma \setminus 0 \Rightarrow \lambda - 1 \in \Sigma \quad (2.5)$$

3. Полиномиальное свойство функционала энергии. Для формы (1.3) справедливо неравенство

$$E^\pm(u^\pm, u^\pm; \Omega_\pm) \geq c_\pm \|\varepsilon(u^\pm); L_2(\Omega_\pm)\|^2 \quad (3.1)$$

Тензор деформаций, а значит, и левая часть (3.1), вырождается только на жестких смещениях $(c_1 - c_0 x_2, c_2 + c_0 x_1)$. Такое свойство квадратичной формы (1.4) называется полиномиальным ([25], § 5.1; [21], §§ 5.4, 6.1); оно дает много полезных сведений о задаче (1.5)–(1.7). Так, согласно теореме 5.5.2 из [25] или 6.1.2 из [21] СЧ $\lambda = 0$ отвечают три собственных вектора (СВ)

$$\Phi^{1,0} = e^1 = (1, 0, 0), \quad \Phi^{2,0} = e^2 = (0, 1, 0), \quad \Phi^{3,0} = e^3 = (0, 0, 1) \quad (3.2)$$

Для каждого из них имеется присоединенный $\Phi^{j,1}$. Не существует ЖЦ с длинами, большими двух, и на мнимой оси $i\mathbf{R} = \{\lambda \in \mathbf{C}: \operatorname{Re} \lambda = 0\}$ нет других СЧ. СР $V^{j,1}$, найденные по $\Phi^{j,0}$, $\Phi^{j,1}$ и $\lambda_* = 0$ при помощи (2.2), соответствуют силам, сосредоточенным в вершине $x = 0$ трещины Λ_- .

Рассматривались [25, 21] операторы с гладкими коэффициентами, но коэффициенты оператора $L(\nabla)$ терпят разрыв на Λ_+ . Это не сказывается на ходе проверки используемых утверждений, поскольку условия сопряжения (1.7) обрабатываются в точности так же, как и краевые условия (1.6).

Приведенная информация позволяет заключить, что при целом m на прямой $m + i\mathbf{R} = \{\lambda \in \mathbf{C}: \operatorname{Re} \lambda = m\}$ расположено только одно СЧ $\lambda = m$, т.е.

$$\lambda \in \Sigma, \operatorname{Re} \lambda = m \in \mathbf{Z} \Rightarrow \lambda = m \quad (3.3)$$

В разд. 5 будет доказано, что СЧ $\lambda = m \in \mathbf{Z} \setminus 0$ отвечают в точности три линейно независимых СР (для $m = 0$ их шесть: $V^{j,0} = \Phi^{j,0}$ и $V^{j,1} = \Phi^{j,0} \ln r + \Phi^{j,1}$; $j = 1, 2, 3$). Можно проверить, что любое СР, порожденное СЧ $\lambda = m < 0$, оказывается комбинацией производных $\partial_1^m V^{j,1}$, а СР с показателем $\lambda = m > 0$ – векторный полином.

4. Условия биортогональности. Ближайшая цель – показать, что спектр, помимо целых точек, располагается только на прямых $i\mathbf{R} + n + 1/2$, где $n \in \mathbf{Z}$. Благодаря (2.5) и (2.3) достаточно установить, что свободны от спектра полосы $\Pi_0 = \{\lambda \in \mathbf{C}: 0 < \operatorname{Re} \lambda < 1/2\}$ и $\Pi_1 = \{\lambda \in \mathbf{C}: 1/2 < \operatorname{Re} \lambda < 1\}$. Для проверки последнего потребуются сведения общего характера ([2, 3], а также [25, 21], § 3.5). Известно, что для любого

(нетривиального!) СР

$$U(x) = r^\lambda \sum_{p=0}^s \frac{1}{p!} (\ln r)^p \Phi^{s-p}(\varphi) \quad (4.1)$$

найдется СР $V^n(x)$ вида (2.2) с $\lambda_* = -\bar{\lambda}$, такое, что

$$Q(U, V^n; \Gamma) \equiv \int_{\Gamma} \overline{\{V^n(x) \sigma^{(v)}(U; x) - U(x) \sigma^{(v)}(V^n; x)\}} ds = 1 \quad (4.2)$$

В дополнение к (4.2) для остальных СР из (2.2) имеем

$$Q(U, V^k; \Gamma) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, n+1, \dots, \kappa-1 \quad (4.3)$$

и в случае $s = 0, \kappa > 1$ обязательно $n > 0$. В (4.2) и (4.3) Γ – любой кусочно гладкий путь, соединяющий противоположные берега разреза Λ_- и не пересекающий его самого. Наконец, если U и V удовлетворяют (1.5)–(1.7) вблизи Γ , то ([20] и [21], лемма 7.4.4)

$$Q(\partial_1 U, V; \Gamma) = -Q(U, \partial_1 V; \Gamma) \quad (4.4)$$

Пусть в полосе Π_0 (или в Π_1) есть СЧ λ . Возьмем соответствующее СР (4.1). Производная $\partial_1 U$ также является нетривиальным СР и порождается СЧ $\lambda - 1$. По $\partial_1 U$ отыскивается еще одно СР

$$V(x) = r^{1-\bar{\lambda}} Y(\varphi, \ln r) \quad (4.5)$$

подчиненное требованию (см. (4.2) и (4.4))

$$1 = Q(\partial_1 U, V; \Gamma) = Q(\partial_1 V, U; \Gamma) \quad (4.6)$$

При этом СЧ $1 - \bar{\lambda}$ попадает в Π_1 (или в Π_0) и, следовательно, $U \neq V$. Итак, построены две пары СР $\partial_1 U, V$ и $\partial_1 V, U$, связанные условиями биортогональности (4.6).

В разд. 8, рассматривая задачу об удлинении трещины на величину h , убедимся в следующем: если в начальном положении трещины решение совпадает с суммой

$$c_U U(x) + c_V V(x) \quad (c_U, c_V \in \mathbf{R}) \quad (4.7)$$

то приращение ΔU потенциальной энергии удовлетворяет соотношению

$$\Delta U = -hc_U c_V + o(h) \quad (4.8)$$

Важно, что для вывода (4.8) требуется соблюсти лишь три условия: соотношение (4.6), неравенство $U \neq V$ и включение $\operatorname{Re} \lambda \in (0, 1)$.

Согласно (4.8) приращению ΔU можно придать любой знак за счет выбора c_U и c_V в (4.7). В то же время $\Delta U \leq 0$, поскольку решение задачи доставляет минимум функционалу энергии, а при росте трещины функциональное пространство, на котором ищется минимум, расширяется. Возникшая неувязка отвергает сделанное предположение, и потому

$$\Sigma \cap \Pi_0 = \Sigma \cap \Pi_1 = \emptyset \quad (4.9)$$

Подобная схема рассуждений годится и для проверки алгебраической простоты СЧ $\lambda \in i\mathbf{R} + 1/2$. Пусть $\operatorname{Re} \lambda = 1/2$, $U(x) = r^\lambda \Phi(\varphi)$, но $\kappa > 1$, т.е. имеется СР с логарифмом. Тогда $\partial_1 U(x) = r^{\lambda-1} \Theta(\varphi)$, а значит, в СР (4.5), биортогональном с $\partial_1 U$, $1 - \bar{\lambda} = \lambda$ и Y – полином ненулевой степени (см. комментарий к (4.3)). Таким образом, $U \neq V$, что и требуется.

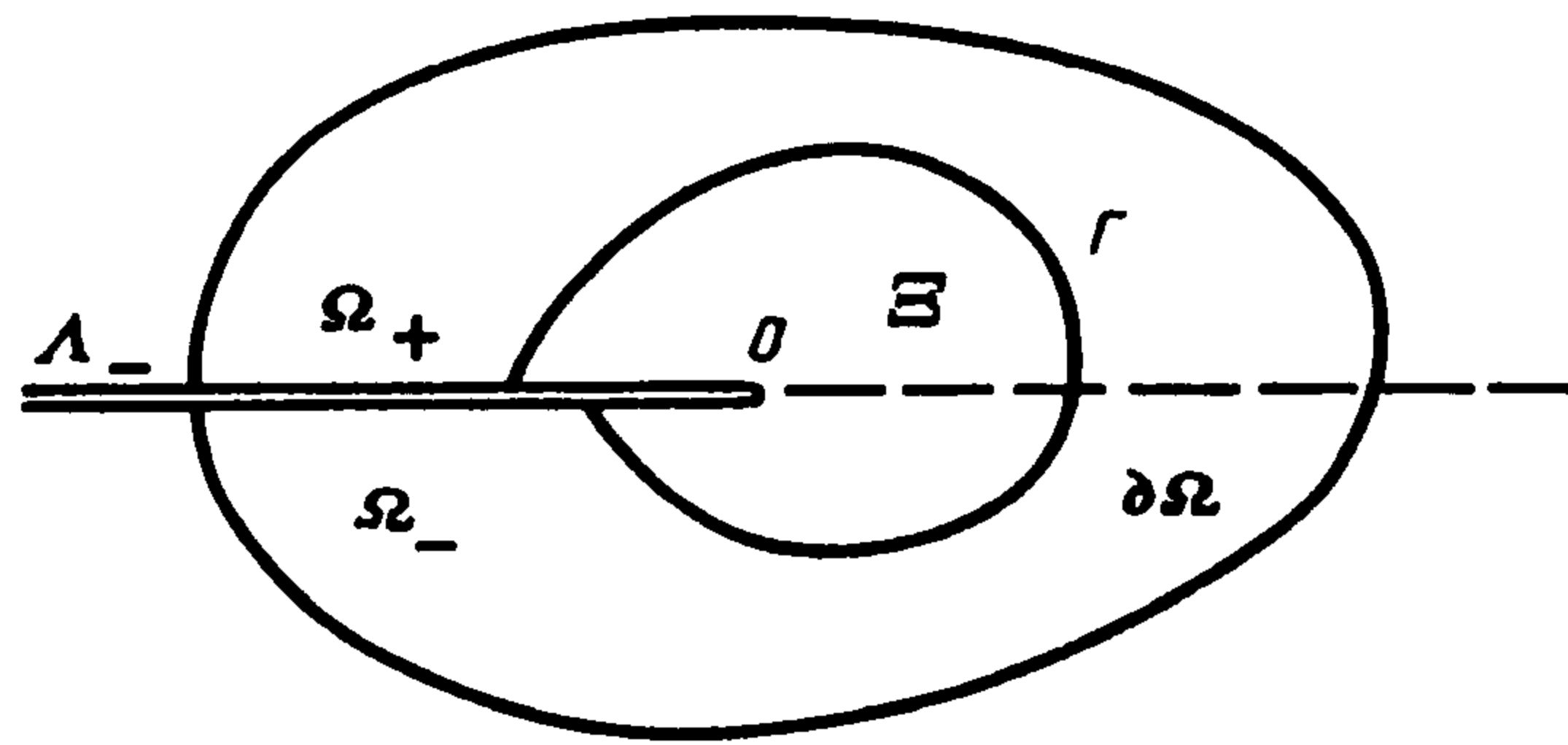
Убедимся, что суммарная (полная алгебраическая) кратность СЧ на каждой из прямых $i\mathbf{R} + l/2$, где $l \in \mathbf{Z}$, $l \neq 0$, равна трем (напомним, что у $\lambda = 0$ кратность 6). Тем

самым будет восполнен пробел в доказательстве из разд. 3 и, кроме того, в силу (2.3)–(2.5) получим

$$\Sigma = \{n, n + 1/2, \pm i\gamma + n + 1/2; n \in \mathbf{Z}\} \quad (4.10)$$

причем $\gamma \geq 0$. Как обычно, достаточно ограничиться рассмотрением прямых $i\mathbf{R} + 1/2$ и $i\mathbf{R} + 1$.

Если полуплоскости \mathbf{R}_{\pm}^2 заполнены одним и тем же изотропным материалом, нужное утверждение известно: СЧ $\lambda = 1/2$ и $\lambda = 1$ трехкратные, причем СР для $\lambda = 1/2$ порождают корневые особенности напряжений трех мод, а в случае $\lambda = 1$ СР соответствуют повороту вокруг оси $x_3 = 0$ и двум одноосным нагружениям параллельно трещине (плоская и антиплоская задачи).



Непрерывным изменением упругих модулей можно перейти от изотропной к любой однородной анизотропной плоскости с разрезом, а затем, варьируя модули только в нижней полуплоскости, – к задаче (1.5)–(1.7). Поскольку при вполне непрерывном возмущении пучка полная алгебраическая кратность СЧ сохраняется (точную формулировку теоремы см. в [26], § 1.3) и по доказанному ранее СЧ не могут покидать свои прямые или убегать на бесконечность (указанная трансформация параметризуется точками $t \in [t_0, t_1]$), упомянутое утверждение становится теоремой после придания точного смысла пучку A , фигурирующему в (2.1).

Напомним обобщенную постановку задачи в области Ω (фигура)

$$L(\nabla) u^{\pm}(x) = F(x), \quad x \in \Omega_+ \cup \Omega_- \quad (4.11)$$

$$\sigma^{(v)}(u; x) = G(x), \quad x \in (\partial\Omega)_+ \cup (\partial\Omega)_- \quad (4.12)$$

$$u^+(x) = u^-(x), \quad N^+(\nabla)u^+(x) - N^-(\nabla)u^-(x) = H(x), \quad x \in \Lambda_- \cap \Omega \quad (4.13)$$

Под обобщенным решением понимается элемент u соболевского пространства $W_2^1(\Omega)^3$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$2E(u, v; \Omega) = \int_{\Omega} (f^0 v + \sum_{k=1}^2 f^k \partial_k v) dx + \int_{\partial\Omega} g v ds + \int_{\Lambda_- \cap \Omega} h v dx_1, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega)^3 \quad (4.14)$$

$$F = f^0 - \sum_{k=1}^2 \partial_k f^k, \quad G = g + \sum_{k=1}^2 n_k f^k, \quad H = h + f^{2-} - f^{2+}$$

$$f^{q\pm} \in L_2(\Omega_{\pm}), \quad g \in L_2(\partial\Omega), \quad h \in L_2(\Lambda_+ \cap \Omega)$$

Обобщенная постановка задачи обычным способом (подробности см., например, в [21–25]) переносится на пучок $\lambda \mapsto A(\lambda)$ с областью определения $W_2^1(-\pi, \pi)^3$. Следующий пучок обладает теми же СЧ и ЖЦ:

$$\mathbf{1} + B(\lambda) = \mathbf{1} + A(\lambda_0)^{-1} (A(\lambda) - A(\lambda_0)): W_2^1(-\pi, \pi)^3 \rightarrow W_2^1(-\pi, \pi)^3 \quad (4.15)$$

В (4.15) $\mathbf{1}$ – тождественный оператор, $\lambda_0 \in \mathbf{C} \setminus \Sigma$ (например, $\lambda_0 = 1/4 \in \Pi_0$), а $B(\lambda)$ – вполне

непрерывный оператор на $W_2^1(-\pi, \pi)^3$ (поскольку коэффициенты при старших производных в системе уравнений на $(-\pi, \pi)$, в краевых условиях и в условиях сопряжения не зависят от λ и, следовательно, исчезают в разности $A(\lambda) - A(\lambda_0)$). Именно B и претерпевает изменения при переходе от изотропной плоскости к составной.

5. Интеграл Эшелби–Черепанова–Райса и расщепление напряженно-деформированного состояния на моды. В теории трещин широко используется инвариантный (не зависящий от пути) интеграл [27–29]

$$J(u; \Gamma) = \int_{\Gamma} \{W(u, \bar{u}; x) \cos(\nu, x_1) - \partial_1 u(x) \cdot \sigma^{(\nu)}(u; x)\} ds \quad (5.1)$$

При этом $\cos(\nu, x_1)$ – направляющий косинус внешней нормали ν к дуге Γ , а W^{\pm} – плотности упругих энергий E^{\pm} . При условии, что F, G и H равны нулю вблизи Γ , для решения u задачи (4.11)–(4.13) справедливо равенство ([20 и 21], § 7.3)

$$J(u; \Gamma) = 2^{-1} Q(\partial_1 u, u; \Gamma) \quad (5.2)$$

Формула (5.2) позволяет вычислить интеграл (5.1). Через Ξ обозначим подобласть Ω , содержащую дугу Γ и множество, ограниченное ею (она замыкается отрезками берегов трещины). Предположим, что

$$F(x) = 0, x \in \Xi; G(x) = 0, x \in \partial\Omega \cap \partial\Xi; H(x) = 0, x \in \Lambda_+ \cap \Xi \quad (5.3)$$

Для решения $u \in W_2^1(\Omega)^3$ задачи (4.11)–(4.13) справедлива формула

$$u(x) = c + \sum_{\omega=0, \pm} K_{\omega} r^{i\gamma\omega + 1/2} \Phi^{\omega}(\varphi) + O(r) \quad (5.4)$$

Здесь K_0, K_{\pm} – коэффициенты интенсивности напряжений (КИН); Φ^0, Φ^{\pm} – СВ, отвечающие СЧ $1/2, \pm i\gamma + 1/2$;

$$U^{\tau}(x) = r^{i\gamma\tau} \Phi^{\tau}(\varphi) \quad (\tau = 0, \pm) \quad (5.5)$$

Так как $J(u; \Gamma) = J(u - c; \Gamma)$, можно считать, что $c = 0$ в (5.4). Стягивая контур Γ к вершине, освобождаемся от остатка $O(r)$. Итак, при учете (4.4) и (4.2) имеем

$$J(u; \Gamma) = \frac{1}{2} \sum_{\tau, \kappa=0, \pm} \bar{K}_{\tau} M_{\tau\kappa} K_{\kappa} \quad (5.6)$$

$$M_{\tau\kappa} = Q(\partial_1 U^{\kappa}, U^{\tau}; \Gamma) = \overline{Q(U^{\tau}, \partial_1 U^{\kappa}; \Gamma)} = \overline{M_{\kappa\tau}} \quad (5.7)$$

Матрица M симметрическая и положительно определенная (см. (5.7) и [20]; [21], § 7.4).

В дополнение к (4.2), (4.3) укажем еще одно свойство СР ([25, 21], § 3.2.1, 3.5.4): если U и V отвечают СЧ λ_1 и λ_2 , но $\lambda_2 \neq -\bar{\lambda}_1$, то

$$Q(U, V; \Gamma) = 0 \quad (5.8)$$

Таким образом, M – диагональная вещественная матрица в случае $\gamma \neq 0$. К тому же, Φ^{\pm} можно взять комплексно сопряженными и получить $M_{++} = M_{--}$. Положим

$$\begin{aligned} U^1 &= 2^{-1/2}(U^+ + U^-), & U^2 &= i2^{-1/2}(U^+ - U^-), & U^3 &= U^0 \\ K_1 &= 2^{-1/2}(K_+ + K_-), & K_2 &= -i2^{-1/2}(K_+ - K_-), & K_3 &= K^0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Теперь U^j вещественны и $K_j \in \mathbf{R}$ при вещественных F, G, H (избавились от комплексных КИН; ср. с [11, 13]). Кроме того, в силу (5.8), (5.7) и (5.9)

$$\begin{aligned} m_p &= Q(\partial_1 U^p, U^p; \Gamma) = 2^{-1} [Q(\partial_1 U^+, U^+; \Gamma) + Q(\partial_1 U^-, U^-; \Gamma)] = \\ &= 2^{-1} (M_{++} + M_{--}) = M_{++} > 0 \quad (p = 1, 2) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$Q(\partial_1 U^1, U^2; \Gamma) = Q(\partial_1 U^2, U^1; \Gamma) = 0, \quad m_3 = M_{00} > 0$$

Итак, формулы (5.4) и (5.6) в обозначениях (5.9) приобретают вид

$$u(x) = c + \sum_{j=1}^3 K_j U^j(x) + O(r) \quad (5.11)$$

$$J(u; \Gamma) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 m_j K_j^2 \quad (5.12)$$

Каждый базис в линейном пространстве $L_{1/2}$ СР с показателями $\text{Re } \lambda = 1/2$ сопровождается своим собственным расщеплением корневой особенности напряженного состояния на моды, а значит, и своими векторами КИН и матрицей M . При $\gamma \neq 0$ базис, комплексный $\{U^+, U^-, U^0\}$ или вещественный $\{U^1, U^2, U^3\}$, определен в (5.5) и (5.9) вполне однозначно. В случае $\gamma = 0$ все СР из $L_{1/2}$ порождены одним и тем же СЧ $\lambda = 1/2$ и потому, оперируя лишь с пучком A , определить канонический базис не удастся.

Покажем, как можно приспособить выбор базисов к силовым или энергетическим критериям разрушения.

Пусть $\gamma = 0$ и $\{U^j\}$ – какой-нибудь базис в $L_{1/2}$. Образует числовую (3×3) -матрицу Σ с элементами

$$\Sigma_{kj} = 2^{-1} r^{1/2} \{ \sigma_{2k}^+(U^j; r, +0) + \sigma_{2k}^-(U^j; r, -0) \} \quad (5.13)$$

Матрица Σ неособенная. В самом деле, пусть $\Sigma b = 0$ для некоторого столбца b . СР $U = b_j U^j$ (с показателем $\lambda = 1/2$) удовлетворяет (1.5) на \mathbf{R}_{\pm}^2 и (1.6) на $\{x: x_2 = 0\}$ (поскольку в соответствии с (1.2) и (5.13), (1.7) $N^{\pm}(\nabla) U(x) = r^{-1/2} \Sigma b = 0$ при $x \in \Lambda_+$). В то же время все СР задачи в полуплоскости имеют целые показатели ([30], § 2 и [21], § 6.4), а значит, $U = 0$ и $b = 0$, т.е. $\det \Sigma \neq 0$.

Элементы матрицы Σ^{-1} , обратной к Σ , обозначим $(\Sigma^{-1})_{qp}$ и введем новый базис $\{U^{0p}\}$ в $L_{1/2}$ равенствами

$$U^{0p} = (2\pi)^{-1/2} \{ (\Sigma^{-1})_{1p} U^1 + (\Sigma^{-1})_{2p} U^2 + (\Sigma^{-1})_{3p} U^3 \}$$

Матрица $\Sigma^0 \equiv \Sigma$, найденная по этому базису, лишь множителем $(2\pi)^{-1}$ отличается от единичной. Таким образом, перезапись разложения (5.11) приводит к классическому определению КИН

$$u(x) = c + \sum_{p=1}^3 K_{0p} U^{0p}(x) + O(r) \quad (5.14)$$

$$\sigma_{2p}(u; r, 0) = 2^{-1} \{ \sigma_{2p}^+(u; r, +0) + \sigma_{2p}^-(u; r, -0) \} = (2\pi r)^{-1/2} K_{0p} + O(1), \quad r \rightarrow +0 \quad (5.15)$$

Так как в условиях нормировки фигурировали напряжения $r^{-1/2} \Sigma_{kj}$ на продолжении трещины, критерий отбора базиса $\{U^{0p}\}$ следует признать силовым.

Соотношение (5.6), преобразованное согласно (5.14), принимает вид

$$J(u; \Gamma) = \frac{1}{2} \sum_{q,p=1}^3 K_q M_{qp}^0 K_p \quad (5.16)$$

Пусть S – унитарная (3×3) -матрица, приводящая матрицу $M^0 = (M_{qp}^0)$ к диагональному

виду ($m_j > 0$ – ее СЧ):

$$SM^0S^{-1} = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3\} \quad (5.17)$$

Построим по S и $\{U^{0p}\}$ новый базис

$$U^j = S_{j1}U^{01} + S_{j2}U^{02} + S_{j3}U^{03} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5.18)$$

Формулы (5.14) и (5.16) приобретают вид (5.11) и (5.12). Новые КИН K_j связаны с K_{0p} теми же соотношениями (5.18) и ввиду унитарности S модули векторов КИН $K = (K_1, K_2, K_3)^t$ и $K_0 = (K_{10}, K_{20}, K_{30})^t$ совпадают (t – знак транспонирования). Кроме того, для величин (5.13), вычисленных по базису (5.18), в силу (5.15) имеем

$$|\Sigma_{1j}|^2 + |\Sigma_{2j}|^2 + |\Sigma_{3j}|^2 = 2\pi \quad (5.19)$$

В разд. 7 выражению (5.12) будет придан смысл приращения потенциальной энергии, т.е. базис (5.18) ассоциируется с энергетическим критерием разрушения. В случае, когда СЧ m_1, m_2 и m_3 различны, S и $\{U^j\}$ находятся однозначно. Если же, например, $m_1 = m_2 \neq m_3$, то S определена с точностью до унитарного множителя, оставляющего неподвижным СВ матрицы M^0 , отвечающий ее СЧ m_3 . Этот произвол в выборе "энергетического" базиса (5.18) не сказывается на виде формулы (5.12), и при желании устранить его приходится привлекать иные соображения. Так, для однородной изотропной плоскости $m_1 = m_2 = \mu^{-1}(1 - \nu)$ и $m_3 = \mu^{-1}$, где μ и ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона, а "силовой" и "энергетический" базисы берутся совпадающими.

Если $\gamma \neq 0$ в (4.10), то $m_1 = m_2$ согласно (5.10), и потому возникли два базиса (5.5) и (5.9); они связаны унитарным преобразованием и равноценны, если иметь в виду формулу (5.12).

Проследим, что происходит с представлением (5.11) при изменении масштаба. Пусть $h > 0$ – безразмерный параметр и

$$(\xi_1, \xi_2) = \xi = h^{-1}x = (h^{-1}x_1, h^{-1}x_2) \quad (5.20)$$

Замена $x \mapsto \xi$ сопровождается преобразованием (3×3) -матрицы $U(x)$, содержащей столбцы $U^j(x)$ из (5.10):

$$\sum_{j=1}^3 K_j U^j(x) = U(x)K = U(h\xi)K = h^{1/2}U(\xi)\Theta^{-1}K \quad (5.21)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} c &= \cos[\gamma \ln h] \\ s &= \sin[\gamma \ln h] \end{aligned} \quad (5.22)$$

При использовании базиса $\{h^{-1}U^j(\xi)\}$ новый вектор КИН приобретает вид $h^{1/2}\Theta^{-1}K$. Однако в обычной ситуации $\gamma = 0$ пересчет КИН сводится к умножению на $h^{-1/2}$; для сохранения этого правила нужно в качестве базиса взять столбцы матрицы $h^{-1}U(\xi)\Theta^{-1}$. Такое преобразование допустимо при энергетическом подходе (так как $m_1 = m_2$, матрицы $m = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3\}$ и Θ^{-1} коммутируют, а формула (5.12) не видоизменяется). Классическое определение КИН (силовой подход) в случае $\gamma \neq 0$ обсуждалось в [6], где указана необходимость введения дополнительного структурного параметра r_s , фиксирующего масштаб. Подобный параметр нужен и в определении (5.9): U^j следует выбрать так, чтобы величины

$$\Sigma_{jk}^s = r_s^{1/2} \{ \sigma_{2k}^+(U^j; r_s, +0) + \sigma_{2k}^-(U^j; r_s, -0) \} \quad (5.23)$$

были подчинены (5.19). При $\gamma = 0$ правая часть (5.23) не зависит от r_s , а формулы (5.23) и (5.13) неразличимы.

6. Формула Гриффитса в случае ветвления трещины. Рассмотрим задачу (4.11)–(4.13) в предположениях (5.3), ей отвечает функционал потенциальной энергии деформации (используем тождество Бетти (1.8))

$$U = E - A = -2^{-1}A \quad (6.1)$$

$$A = \int_{\Omega} F u dx + \int_{\partial\Omega} G u ds + \int_{\Lambda_+ \cap \Omega} H u dx_1 \quad (6.2)$$

Здесь E – упругая энергия, A – работа внешних сил.

Допустим, что в результате разрушения трещина приобрела N отростков, расположенных под углами θ_n к оси x_1 . Случай $N = 1$ не исключается. Пусть $h_n = h l_n$ – длины отростков и величины l_1, \dots, l_n сравнимы с характерным размером области Ω ; $h > 0$ – малый параметр. Изучим асимптотику решения задачи (4.11)–(4.13) в сингулярно возмущенной области Ω_h , содержащей трещину с отростками. Считаем, что их берега свободны от напряжений, а нагружение $\{F, G, H\}$ осталось прежним. Функционалы из (6.1), найденные по решению задачи в Ω_h , обозначим U_h, E_h, A_h . Введем "быстрые" переменные ξ равенствами (5.21). Область Ω_h , записанная при помощи координат (5.21), после перехода к $h = 0$ трансформируется в составную плоскость $\omega = \omega_+ \cup \omega_-$, ослабленную полубесконечным разрезом Λ_- и исходящими из его вершины трещинами $\Lambda_n = \{\xi: \varphi = \theta_n, \rho \in [0, l_n]\}$; здесь (ρ, φ) – полярные координаты, $\rho = |\xi| = h^{-1}r$. С отростком Λ_n свяжем декартовы ξ^n и полярные (ρ_n, φ_n) координаты с центром в его конце $P^n = (l_n \cos \theta_n, l_n \sin \theta_n)$; $\varphi_n \in (-\pi, \pi)$; $\xi_1^n = \rho_n \cos \varphi_n$, $\xi_2^n = \rho_n \sin \varphi_n$. Наконец, $\tau^n = (\cos \theta_n, \sin \theta_n)$ и $\tau^n \cdot \nabla_{\xi} = \cos \theta_n \partial_1 + \sin \theta_n \partial_2 = \partial / \partial \xi_1^n$.

Собираясь применить метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [21, 31–33] и др.), опишем ряд специальных решений предельных задач в Ω и ω . Были введены ([19, 23, 34], см. также [21, 25], § 4.3) весовые функции – сингулярные решения однородной задачи (4.11)–(4.13)

$$\zeta^j = m_j^{-1} \partial_1 U^j + \zeta^{j0} \quad (6.3)$$

При этом U^j берется из (5.12), а $\zeta^{j0} \in W_2^1(\Omega)^3$ – регулярная часть ζ^j .

При помощи тождества Бетти и формул (5.7), (5.10), (5.17) получаем известное интегральное представление КИН

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F \zeta^j dx + \int_{\partial\Omega} G \zeta^j ds + \int_{\Lambda_+ \cap \Omega} H \zeta^j dx_1 = \\ = -Q(u, \zeta^j; \Gamma) = -Q\left(\sum_{i=1}^3 K_i U^i, m_j^{-1} \partial_1 U^j; \Gamma\right) = K_j \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$-Q(U^j, \partial_1 U^k; \Gamma) = Q(\partial_1 U^k, U^j; \Gamma) = m_j \delta_{j,k} \quad (6.5)$$

Аналогичными сингулярными решениями задачи в ω являются векторы

$$\eta^j(\xi) = U^j(\xi) + \eta^{j0}(\xi) = U^j(\xi) + \sum_{k=1}^3 N_{jk} m_k^{-1} \partial_1 U^k(\xi) + Q(\rho^{-1}), \quad \rho \rightarrow \infty \quad (6.6)$$

В (6.6) $\partial_1 = \partial / \partial \xi_1$, а вещественная (3×3) -матрица $N = (N_{jk})$ симметрическая и положительно определенная, так как оказывается матрицей Грама

$$\begin{aligned} E(\eta^{j0}, \eta^{k0}; \omega) = \int_{\partial\omega} \sigma^{(v)}(\eta^{j0}) \eta^{k0} ds = \int_{\partial\omega} \sigma^{(v)}(\eta^{j0}) \eta^k ds = \\ = Q(\eta^{j0}, \eta^{k0}; \Gamma) = Q\left(\sum_{p=1}^3 N_{jp} m_p^{-1} \partial_1 U^p, U^k; \Gamma\right) = N_{jk} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Реализуем процедуру сращивания. Удобно пользоваться (3×3) -матрицами U, ζ, η со столбцами U^j, ζ^j, η^j , а также m и Θ . В качестве основного члена внешнего (на удалении от вершины O) разложения решения u^h сингулярно возмущенной задачи возьмем решение $u \in W_2^1(\Omega)^3$ задачи (4.10)–(4.13). Учитывая (5.21), переписываем (5.11) в виде

$$u(x) = c + U(x)K + O(r) = c + h^{1/2}U(\xi)\Theta^{-1}K + O(h\rho) \quad (6.8)$$

Главные члены внутреннего разложения, которое обслуживает ту же вектор-функцию u^h вблизи точки O и используют масштаб ξ , обязаны вести себя при $\rho = |\xi| \rightarrow \infty$ согласованно с асимптотическими слагаемыми, выделенными справа в (6.8). Поэтому разумно начать это разложение с суммы

$$c + h^{1/2}\eta(\xi)\Theta^{-1}K \quad (6.9)$$

В силу (6.6) она допускает представление

$$c + h^{1/2}\left[U(\xi) + \frac{\partial U}{\partial \xi_1}(\xi)m^{-1}N\right]\Theta^{-1}K + O(h^{1/2}\rho^{-1}) \quad (6.10)$$

Применив (5.21) с заменой h, ξ на h^{-1}, x , вернемся к медленным переменным x и получим вместо (6.10) новое представление

$$c + U(x)K + h\frac{\partial U}{\partial x_1}(x)\Theta m^{-1}N\Theta^{-1}K + O(h^{3/2}\rho^{-1}) \quad (6.11)$$

Первые два слагаемых из (6.11) присутствуют в средней части (6.8), а третье фиксирует поведение около вершины коэффициента при h во внешнем разложении. Как уже упоминалось, матрицы Θ и m^{-1} коммутируют, т.е. третье слагаемое из (6.11) равно

$$h\partial_1 U(x)m^{-1}\Theta N\Theta^{-1}K \quad (6.12)$$

Вспоминая теперь о весовых функциях (6.4), обладающих теми же сингулярностями, что и (6.14), уточняем внешнее разложение вторым членом:

$$u(x) + h\zeta(x)\Theta N\Theta^{-1}K \quad (6.13)$$

Поправки высших порядков в обоих разложениях (6.9) и (6.13) не понадобятся.

Оценки остатков в найденной асимптотике выводятся по стандартной схеме ([33], гл. 5 и [21], § 6.5), но далее указывается только погрешность приближенной формулы для приращения энергии

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_h - U = -2^{-1}(A_h - A) = \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\Omega} F(u^h - u)dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} G(u^h - u)ds - \frac{1}{2}\int_{\Lambda_+ \cap \Omega} H(u^h - u)dx_1 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Поскольку на удалении от вершины O сумма (6.13) приближает u^h , то, замещая ею u^h в (6.14) и учитывая (6.4), приходим к нужному результату

$$\Delta U = -2^{-1}hK^t\Theta N\Theta^{-1}K + O(h^{3/2}) \quad (6.15)$$

7. Перезапись формулы Гриффитса. Даже в случае $\gamma = 0$, когда Θ – единичная матрица, соотношение (6.15) неудовлетворительно из-за присутствия матрицы N . Придадим (6.15) более удачный вид, оперируя с величинами, допускающими физическое толкование.

С каждой из трещин-отростков Λ_n связываются три СР U^{jn} отвечающих СЧ на

$i\mathbf{R} + 1/2$, а также числа γ_n и $m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, m_3^{(n)}$. Кроме того, справедливы представления

$$\eta^p(\xi) = c^p + \sum_{j=1}^3 \mathbf{K}_j^{pn} U^{jn}(\xi^n) + O(\rho_n), \quad \rho_n \rightarrow 0 \quad (7.1)$$

Образуюем столбцы $(\mathbf{K}_1^{pn}, \mathbf{K}_2^{pn}, \mathbf{K}_3^{pn})^t$ и составим из них матрицу $\mathbf{K}^{(n)}$. По аналогии с разд. 6 введем матрицы $U^{(n)}, m^{(n)}$ и $\Theta^{(n)}$. В результате

$$c + h^{1/2} \eta(\xi) \Theta^{-1} K = c + h^{1/2} U^{(n)}(\xi^n) \mathbf{K}^{(n)} \Theta^{-1} K + O(h^{1/2} \rho_n) \quad (7.2)$$

Поскольку приближение (6.9) обслуживает окрестность точки O , куда попадают трещины Λ_n , то в силу (7.2) и (5.21) для столбца $K^{(n)}(h)$, содержащего КИН поля u^h в вершине P^n , выполняется соотношение

$$K^{(n)}(h) = \Theta^{(n)} \mathbf{K}^{(n)} \Theta^{-1} K + O(h^{1/2}) \quad (7.3)$$

По поводу оценки остатка в (7.3) см. доказательство теоремы 7.2.7 [21].

Теперь найдем связь между матрицами N и $\mathbf{K}^{(1)}, \dots, \mathbf{K}^{(N)}$, для чего воспользуемся инвариантным интегралом [29, 35, 36]

$$J_r(u; \Gamma) = \int_{\Gamma} \{W(u, u; x) x v(x) - \sigma^{(v)}(u; x) r \partial_r u(x)\} ds = 2^{-1} Q(r \partial_r u, u; \Gamma) \quad (7.4)$$

В (7.4) заменим x, r на ξ, ρ , подставим на место u вектор (6.11), а дугу Γ выберем так, чтобы она начиналась на верхнем берегу разреза Λ , охватывала все отростки $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$ и оканчивалась на нижнем берегу. Имеем

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} = \xi \nabla_{\xi} = (l_n \tau^n + \xi^n) \nabla_{\xi} = l_n \frac{\partial}{\partial \xi_1^n} + \rho_n \frac{\partial}{\partial \rho_n} \quad (7.5)$$

Дифференциальное выражение $\rho_n \partial / \partial \rho_n$ не усиливает сингулярности в (7.1), и потому, заменяя интегрирование по Γ интегрированием по окружностям S_n с центрами P^n и радиусами $\delta > 0$, устремляем δ к нулю и получаем при учете (7.5), (5.11) и (8.3), что

$$\begin{aligned} J_{\rho}(\eta \Theta^{-1} K; \Gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N l_n Q\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1^n} \eta \Theta^{-1} K, \eta \Theta^{-1} K; S_n\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N l_n K^t \Theta \mathbf{K}^{(n)t} m^{(n)} \mathbf{K}^{(n)} \Theta^{-1} K = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N l_n K^t \Theta \mathbf{K}^{(n)t} \Theta^{(n)t} m^{(n)} \Theta^{(n)} \mathbf{K}^{(n)} \Theta^{-1} K = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N l_n K^{(n)}(h)^t m^{(n)} K^{(n)}(h) + O(h^{1/2}) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Найдем иное выражение для инвариантного интеграла. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$Q(\rho \partial_{\rho} U^j, \partial_1 U^k; \Gamma) + Q(\rho \partial_{\rho} \partial_1 U^j, U^k; \Gamma) = -m_j \delta_{j,k} \quad (7.7)$$

Теперь в силу (5.8), (4.4) и (7.7)

$$\begin{aligned} 2J_{\rho}(\eta \Theta^{-1} K; \Gamma) &= -Q(\rho \partial_{\rho} U \Theta^{-1} K, \partial_1 U m^{-1} N \Theta^{-1} K; \Gamma) - \\ &- Q(\rho \partial_{\rho} \partial_1 U m^{-1} N \Theta^{-1} K, U \Theta^{-1} K; \Gamma) = K^t \Theta m m^{-1} N \Theta^{-1} K = K^t \Theta N \Theta^{-1} K \end{aligned} \quad (7.8)$$

Сравнивая (7.6) и (7.8), приводим формулу (6.15) к виду

$$\begin{aligned}\Delta U &= -\frac{1}{2}h \sum_{n=1}^N l_n K^{(n)}(h)^t m^{(n)} K^{(n)}(h) + O(h^{3/2}) = \\ &= -\frac{1}{2}h \sum_{n=1}^N l_n \sum_{j=1}^3 m_j^{(n)} K_j^{(n)}(h)^2 + O(h^{3/2})\end{aligned}\quad (7.9)$$

Подчеркнем, что в (7.9) фигурируют длины трещин-отростков, КИН в их вершинах и множители $m_j^{(n)}$, характеризующие материал и направление распространения трещины. В классической формуле Гриффитса порядок ($O(h^2)$) остатка сохраняется при замене K_j на $K_j(h)$ – после такого преобразования она не отличается по виду от (7.9). Наконец, упомянем, что повторение с незначительными изменениями предыдущих выкладок показывает, что

$$\Delta U = J_r(u^h; \Gamma) + O(h^{3/2})$$

8. Приложение. Ликвидируем пробелы в доказательствах из разд. 5 и разд. 7 (формула (4.8) и неравенства $m_j > 0$). Повторим рассуждения из разд. 6 применительно к ситуации, возникшей в разд. 4: имеются СР U и V , отвечающие СЧ λ и $1-\bar{\lambda}$, попадающим в $\Pi = \{\lambda \in \mathbb{C}: 0 < \text{Re } \lambda < 1\}$; при этом $U \neq V$ и справедливы условия (4.6). Рассмотрим поле u , заданное формулой (5.7), и весовые функции

$$\zeta^U = \partial_1 U + \zeta^{U0}, \quad \zeta^V = \partial_1 V + \zeta^{V0}\quad (8.1)$$

Сингулярное возмущение области Ω заключается в подрастании трещины на длину h , т.е. область ω составлена из полуплоскостей \mathbf{R}_{\pm}^2 , соединенных по лучу $\Lambda_0 = \{\xi: \xi_1 = 0, \xi_2 > 1\}$. Введем декартовы координаты

$$\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0) = (\xi_1 + 1, \xi_2)\quad (8.2)$$

Если $1 - \bar{\lambda} = \lambda_*$ и $V = V^\tau$, $U = U^\times$ (см. (2.2)), то, переходя от медленных x к быстрым переменным ξ , получаем

$$\begin{aligned}V^\tau(x) &= r^{\lambda_*} \sum_{p=0}^{\tau} \frac{1}{p!} (\ln r)^p \Psi^{\tau-p}(\varphi) = h^{\lambda_*} \rho^{\lambda_*} \sum_{p=0}^{\tau} \frac{1}{p!} [\ln \rho + \ln h]^p \Psi^{\tau-p}(\varphi) = \\ &= h^{\lambda_*} \rho^{\lambda_*} \sum_{k=0}^{\tau} \frac{1}{k!} (\ln h)^k \sum_{q=0}^{\tau-k} \frac{1}{q!} (\ln \rho)^q \Psi^{\tau-k-q}(\varphi) = h^{\lambda_*} \sum_{k=0}^{\tau} \frac{1}{k!} (\ln h)^k V^{\tau-k}(\xi)\end{aligned}\quad (8.3)$$

$$U^\times(x) = r^\lambda \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\ln r)^p \Phi^{\times-p}(\varphi) = h^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\ln h)^j U^{\times-j}(\xi)\quad (8.4)$$

Применим процедуру сращивания и обнаружим, что ввиду (4.7) и (8.3), (8.4) основные члены внутреннего разложения следует взять такими:

$$W^h(\xi^0) = c_V h^{\lambda_*} \sum_{k=0}^{\tau} \frac{1}{k!} (\ln h)^k V^{\tau-k}(\xi^0) + c_U h^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\ln h)^j U^{\times-j}(\xi^0)\quad (8.5)$$

В соответствии с [37] из (8.2) выводим

$$W^h(\xi^0) = W^h(\xi) + \partial_1 W^h(\xi) + \dots\quad (8.6)$$

Под многоточием подразумеваются старшие производные (по ξ_1) поля $W^h(\xi)$ или остаток $o(\rho^{-1})$. Возвращаясь в (8.6) к медленным переменным x и пересчитывая преобразования (8.3) в обратном порядке с дополнительной расстановкой ∂_1 , приходим к соотношению

$$W^h(\xi^0) = c_U U(x) + c_V V(x) + h[c_U \partial_1 U(x) + c_V \partial_1 V(x)] + \dots$$

Используя (8.1), выстраиваем два члена внешнего разложения

$$c_U U(x) + c_V V(x) + h[c_U \partial_1 U(x) + c_V \partial_1 V(x)]$$

Для вывода (4.8) осталось повторить выкладки (6.4) и (6.14)

$$\Delta U = -2^{-1} h Q(c_U \partial_1 U + c_V \partial_1 V, c_U U + c_V V; \Gamma) + o(h) = -h c_U c_V + o(h)$$

Пусть $c_U = 1$, $c_V = 0$ и $U = K_+ U^+ + K_- U^- + K_0 U^0$. В случае прямолинейного развития трещины специальные решения (6.6) находятся явно: $\eta^\tau(\xi) = U^\tau(\xi^0)$, $\tau = 0, \pm$. Согласно (8.6) $\eta^\tau(\xi) = U^\tau(\xi) + \partial_1 U^\tau(\xi) + \dots$. Теперь положительная определенность матрицы M (а значит, и матрицы m) вытекает из формулы

$$\Delta U = \frac{h}{2} Q(U, \zeta^U; \Gamma) = \frac{h}{2} Q\left(\sum_{x=0,\pm} K_x U^x, \sum_{\sigma=0,\pm} K_\sigma \partial_1 U^\sigma; \Gamma\right) +$$

$$+ o(h) = -\frac{h}{2} \sum_{\sigma,x=0,\pm} \bar{K}_\sigma M_{\sigma x} K_x + o(h)$$

Автор благодарит Н.А. Волкову и М.Н. Кубенкова за помощь в расчетах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01069).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Comninou M.* The interface crack // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1977. V. 44. N 4. P. 631–636.
2. *Comninou M.* The interface crack in a shear field // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1978. V. 45. N 2. P. 287–290.
3. *Comninou M., Schmueser D.* The interface crack in a combined tension-compression and shear field // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1979. V. 46. N 2. P. 345–348.
4. *Салганик Р.Л.* О хрупком разрушении склеенных тел // *ПММ.* 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 957–962.
5. *Гольдштейн Р.В., Салганик Р.Л.* О трещинах, распространяющихся между плоскими пластинками на прямолинейной границе склейки // *ПМТФ.* 1963. № 5. С. 62–68.
6. *Rice J.R.* Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1988. V. 55. N 1. P. 98–103.
7. *Williams M.L.* The stresses around a fault or crack in dissimilar media // *Bull. Seismol. Soc. America.* 1959. V. 49. N 2. P. 199–204.
8. *Черепанов Г.П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластине с разрезами // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.* 1962. № 1. С. 131–137.
9. *Erdogan F.* Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1963. V. 30. N 2. P. 232–237.
10. *Моссаковский В.И., Рыбка М.Т.* Обобщение критерия Гриффитса–Снеддона на случай неоднородного тела // *ПММ.* 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 1061–1069.
11. *Rice J.R., Sih G.C.* Plane problems of cracks in dissimilar media // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1965. V. 32. N 2. P. 418–423.
12. *England A.H.* A crack between dissimilar media // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1965. V. 32. N 2. P. 400–402.
13. *Willis J.R.* Fracture mechanics of interface cracks // *J. Mech. Phys. Solids.* 1971. V. 19. N 6. P. 353–368.
14. *Clements D.L.* A crack between dissimilar anisotropic media // *Int Crn. J. Eng. Sci.* 1971. V. 9. N 2. P. 257–265.
15. *Ting T.C.T.* Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites // *Intern. J. Solids Struct.* 1986. V. 22. N 9. P. 965–983.
16. *Bassani J.L., Qu J.* On elasticity solutions for cracks on bimaterial and bicrystal interfaces // *Mater. Sci and Eng.* 1989. V. A107. P. 177–184.

17. *Wu K.C.* Stress intensity factor and energy release rate for interfacial cracks between dissimilar anisotropic materials // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1990. V. 57. N 4. P. 882–886.
18. *Suo Z.* Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media // *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A.* 1990. V. 427. N 1873. P. 331–358.
19. *Gao H.* Weight function method for interface cracks in anisotropic bimetals // *Intern. J. of Fract.* 1992. V. 56. N 2. P. 139–158.
20. *Назаров С.А.* Весовые функции и инвариантные интегралы // *Вычисл. механика деформируемого твердого тела.* 1990. № 1. С. 17–31.
21. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994. 525 p.
22. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // *Тр. Моск. мат. о-ва.* 1967. Т. 16. С. 209–292.
23. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // *Math. Nachr.* 1977. В. 76. S. 29–60.
24. *Bogy D.B.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1968. V. 35. N 3. P. 460–466.
25. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991. 336 с.
26. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.
27. *Черепанов Г.П.* Распространение трещин в сплошной среде // *ПММ.* 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476–488.
28. *Rice J.R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1968. V. 35. N 2. P. 379–386.
29. *Knowles J.K., Sternberg E.* On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1972. V. 44. N 3. P. 187–211.
30. *Borchers W., Pileckas K.* Existence, uniqueness and asymptotics of steady jets // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1992. V. 120. N 1. P. 1–49.
31. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
32. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
33. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. 430 s.
34. *Bueckner H.F.* A novel principle for computation of stress intensity factor // *ZAMM.* 1970. Bd. 50. N. 9. S. 529–546.
35. *Budiansky B., Rice J.R.* Conservation laws and energy release rates // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1973. V. 40. N 1. P. 201–203.
36. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков // *Изв. РАН. МТТ.* 1995. № 1. С. 104–119.
37. *Назаров С.А.* Локальная устойчивость и неустойчивость трещин нормального отрыва // *Изв. Ан СССР. МТТ.* 1988. № 3. С. 124–129.