

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. В.М. Фомин

АНТИПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ С ДВОЙКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПОЛОСТЕЙ

Методом симметрических потенциалов проводится численное и качественное исследование антиплоских ($S-H$) волн в однородной изотропной упругой среде с системой круговых цилиндрических полостей, обладающей группой симметрии C_{2v}^2 [1].

Для аналогичных задач с более простой группой симметрии – группой трансляций – было ранее предложено решение [2] при помощи теорем сложения для бесселевых функций, однако численное исследование не было проведено.

1. Рассмотрим антиплоские стационарные волновые движения в однородном изотропном упругом пространстве, когда перемещения точек параллельны оси x_3 и величины этих перемещений не зависят от этой координаты. В этом случае амплитудные значения перемещений удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0, \quad \kappa = \omega / v \tag{1.1}$$

(ω – круговая частота волны, v – скорость распространения поперечных волн в среде).

Будем разыскивать решение уравнения Гельмгольца при специальном виде правой части, представляющую собой систему E_M дельта-функций Дирака, сосредоточенных в точках $x_1 = ml_1, x_2 = nl_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, M$) и умноженных на $\exp[i(m\alpha_1 + n\alpha_2)]$:

$$\Delta u + \kappa^2 u = \sum_{m,n=-M}^M \exp[i(m\alpha_1 + n\alpha_2)] \delta(x_1 - ml_1) \delta(x_2 - nl_2) \tag{1.2}$$

Здесь l_j, α_j ($j = 1, 2$) – некоторые постоянные ($|\alpha_j| \leq \pi$). Следуя принципу предельного поглощения, заменим в (1.2) κ^2 на $\kappa^2 + i\epsilon$, а затем произведем двойное преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 . Получим

$$u(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\kappa^2 + i\epsilon - \xi_1^2 - \xi_2^2} \sum_{m,n=-M}^M \exp[im(l_1\xi_1 - \alpha_1) + in(l_2\xi_2 - \alpha_2)] \tag{1.3}$$

Произведем теперь в (1.3) двойное обратное преобразование Фурье. Под ним понимается предел [3]

$$u(x_1, x_2) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \iint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq \xi^2} u(\xi_1, \xi_2) \exp(-i\xi_1 x_1 - i\xi_2 x_2) dx_1 dx_2 \tag{1.4}$$

Распространим систему E_M на всю плоскость, т.е. устремим M к бесконечности. Переходя в (1.3) и (1.4) к пределу при $M \rightarrow \infty$, учитывая равенство [3]

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[-im(\alpha - \xi l)] = \frac{2\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi - \frac{2k\pi - \alpha}{l}\right)$$

и полагая $\varepsilon = 0$, будем иметь из (1.4)

$$\Gamma(\alpha, \omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{l_1 l_2} \sum_{k,j} G_{kj} \exp(-i\xi_{1,k} x_1 - i\xi_{2,j} x_2) \quad (1.5)$$

$$G_{kj} = (\kappa^2 - \xi_{1,k}^2 - \xi_{2,j}^2)^{-1}, \quad \xi_{1,k} = \frac{2k\pi - \alpha_1}{l_1}, \quad \xi_{2,j} = \frac{2j\pi - \alpha_2}{l_2}; \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

В соответствии со сказанным выше под двойной суммой в (1.5) понимается предел соответствующей конечной суммы с $\xi_{1,k}^2 + \xi_{2,j}^2 \leq \xi^2$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Заметим, что

$$\Gamma(\alpha, \omega, x_1 + nl_1, x_2 + ml_2) = \exp(in\alpha_1 + im\alpha_2) \Gamma(\alpha, \omega, x_1, x_2) \quad (1.6)$$

Будем называть в дальнейшем подобные функции α -периодическими, или преобразующимися по неприводимому представлению подгруппы трансляций.

Заметим, что при стремлении частоты ω к $\xi_{kj} = (\xi_{1,k}^2 + \xi_{2,j}^2)^{1/2}$ функция $\Gamma(\alpha, \omega, \mathbf{x})$ (назовем ее α -периодической функцией Грина) стремится к бесконечности, что свидетельствует о резонансе.

Покажем, что ряд в (1.5) сходится при $\omega \neq \xi_{kj}$ и $|\mathbf{x}| \neq 0$. Действуя аналогично известному методу [4], выводим двумерный аналог формулы Эйлера–Маклорена

$$\begin{aligned} \sum_{\rho_k, \eta_j \in \Pi} f(\rho_k, \eta_j) &= \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi} f(v, w) dv dw + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h_1} \int_{v_0}^{v_1} (f(v, w_1(v)) + f(v, w_0(v))) dv + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{h_2} \int_{w_0(v_0)}^{w_1(v_0)} f(v_1, w) dw + \frac{1}{h_2} \int_{w_0(v_1)}^{w_1(v_1)} f(v_1, w) dw \right] + \\ &+ \frac{1}{12} \left[\frac{1}{h_1} \int_{v_0}^{v_1} (f_{01}(v, w_1(v)) - f_{01}(v, w_0(v))) dv + \frac{1}{h_2} \int_{w_0(v_1)}^{w_1(v_1)} f_{10}(v_1, w) dw - \right. \\ &\left. - \frac{1}{h_2} \int_{w_0(v_0)}^{w_1(v_0)} f_{10}(v_0, w) dw \right] + O(\max_{v, w \in \Pi} |f(v, w)|) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\rho_k = h_1 k + a_1, \quad \eta_j = h_2 j + a_2; \quad f_{mn} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial v^m \partial w^n}$$

Здесь Π – область в плоскости v, w , обладающая следующим свойством: пересечение любой прямой $v = \text{const}$ с этой областью либо пусто, либо представляет собой один отрезок; $w = w_0(v)$ и $w = w_1(v)$ – нижняя и верхняя границы Π ; v_0 и v_1 – абсциссы крайней левой и крайней правой точек этой области.

Заметим, что при больших по модулю k и j

$$G_{kj} \sim -(\xi_{1,k}^2 + \xi_{2,j}^2)^{-1}$$

Применим асимптотическое разложение (1.7) к форме (1.5), полагая, что Π – часть кольца $r_1^2 \leq v^2 + w^2 \leq r_2^2$, находящаяся в первом квадранте плоскости vw , $\rho_k = \xi_{1,k}$, $\eta_j = \xi_{2,j}$, $h_1 = 2\pi/l_1$, $h_2 = 2\pi/l_2$; $f(v, w) = -\exp(-ivx_1 - iw x_2)/(v^2 + w^2)$. Тогда $w_0 = (r_1^2 - v^2)^{1/2}$ при $v \leq r_1$ и $w_0 = 0$ при $r_1 \leq v \leq r_2$; $w_1 = (r_2^2 - v^2)^{1/2}$.

Можно убедиться, что однократные интегралы в правой части (1.7) имеют порядок $1/r_1$. Проводя аналогичные рассуждения для остальных квадрантов плоскости v, w и

складывая получающиеся формулы, после перехода в двойном интеграле к полярным координатам $v = r \cos \theta$, $w = r \sin \theta$ находим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l_1 l_2} \sum_{r_1^2 \leq \xi_{1,k}^2 + \xi_{2,j}^2 \leq r_2^2} G_{kj} \exp(-i\xi_{1,k}x_1 - i\xi_{2,j}x_2) = \\ & = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i|\mathbf{x}|r \sin(\theta + \phi)] d\theta dr + O\left(\frac{1}{r_1}\right) = -\frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} J_0(|\mathbf{x}|r) \frac{dr}{r} + O\left(\frac{1}{r_1}\right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Угол ϕ определяется из условий: $\sin \phi = x_1 / |\mathbf{x}|$, $\cos \phi = x_2 / |\mathbf{x}|$, $|\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Последнее равенство в цепочке (1.8) получено с использованием периодичности подынтегрального выражения по θ и интегрального представления Зоммерфельда

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(iz \sin \phi - in\phi) d\phi \quad (1.9)$$

Интеграл

$$\int_1^{\infty} J_0(|\mathbf{x}|r) \frac{dr}{r}$$

сходится при $|\mathbf{x}| \neq 0$, поэтому последнее звено в цепочке равенств (1.8) может быть сделано сколь угодно малым при достаточно большом r_1 . Это и означает сходимость двойного ряда в (1.5) при $|\mathbf{x}| \neq 0$.

Положим теперь $r_2 = \infty$. Интегрируя в последнем звене (1.8) по частям, получаем, что оно имеет порядок $(2\pi)^{-1} \ln|\mathbf{x}|$. Это означает, что α -периодическая функция Грина $\Gamma(\alpha, \omega, \mathbf{x})$ имеет логарифмическую особенность при $|\mathbf{x}| = 0$.

Выделяя эту особенность, запишем

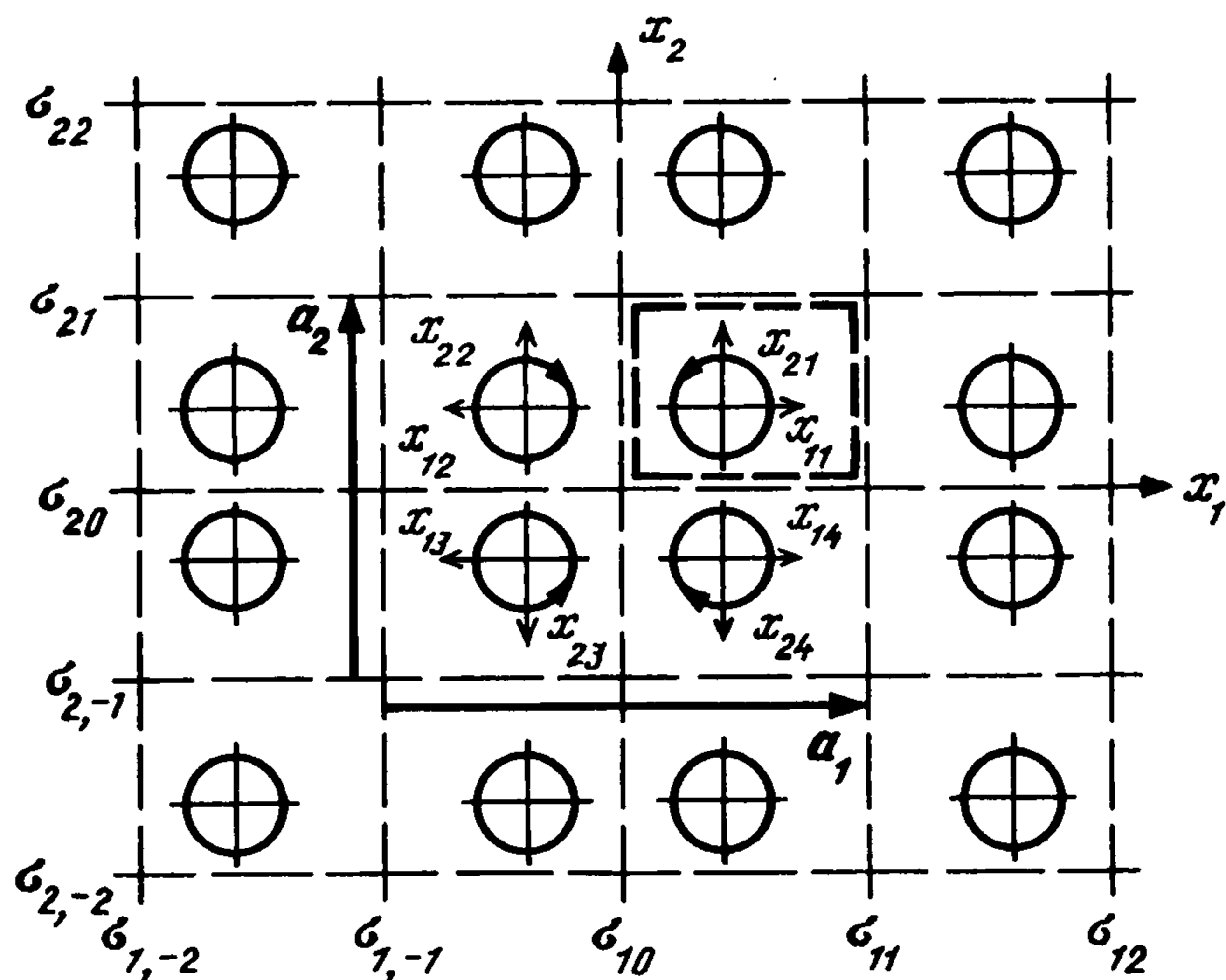
$$\Gamma(\alpha, \omega, \mathbf{x}) = R(\alpha, \omega, \mathbf{x}) + (2\pi)^{-1} \ln|\mathbf{x}| \quad (1.10)$$

$$R(\alpha, \omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{l_1 l_2} \sum_{k,j} (G_{kj} - g_{kj}) \exp(-i\xi_{1,k}x_1 - i\xi_{2,j}x_2)$$

Здесь g_{kj} – коэффициенты разложения функции $(2\pi)^{-1} \ln|\mathbf{x}|$ в двойной ряд Фурье по функциям $\exp(-i\xi_{i,k}x_i - i\xi_{2,j}x_2)$ ($k, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Ряд (1.11) абсолютно сходится и представляет собой непрерывно-дифференцируемую функцию \mathbf{x} .

2. Рассмотрим однородную изотропную упругую среду с системой круговых цилиндрических полостей, инвариантной относительно преобразований группы C_{2v}^2 , состоящей из отражений в двух системах параллельных плоскостей σ_{jk} ($j = 1, 2; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и трансляций (сдвигов) на вектора, кратные векторам \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 (фиг. 1). Выделим так называемый основной прямоугольник, воздействуя на который преобразованиями подгруппы трансляций можно покрыть всю среду (показан жирной сплошной линией). Поместим начало тотальной системы координат $x_1 x_2$ в центр основного прямоугольника. Аналогично выделяется основная элементарная ячейка, воздействуя на которую всеми преобразованиями группы C_{2v}^2 , можно покрыть среду (показана жирной штриховой линией). На каждой из элементарных ячеек (получаемых из основной при помощи элементов группы симметрии) выберем по локальной системе координат таким образом, чтобы они переходили друг в друга при указанных преобразованиях. Совокупность таких систем координат называется инвариантной системой.

Теорема. Частоты гармонических волн в упругой среде с пространственной дискретной группой G симметрии распадаются на серии, отвечающие неприводимым



Фиг. 1

представлениям этой группы: амплитудные функции перемещений точек среды, соответствующие каждой частоте, могут быть выбраны таким образом, что они преобразуются по определенному неприводимому представлению группы G .

Доказательство. В соответствии с теоремой Блоха [5] каждой гармонической волне в среде, инвариантной относительно подгруппы T трансляций, соответствует амплитудная функция перемещений вида $u(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})$, где функция $w(\mathbf{x})$ инвариантна относительно трансляций, \mathbf{k} – волновой вектор.

Функция $u(\mathbf{x})$ преобразуется по неприводимому представлению группы трансляций.

Действительно,

$$u(\mathbf{x} + m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2) = u(\mathbf{x}) \exp(im_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2), \quad \alpha_j = \mathbf{k} \mathbf{a}_j \quad (j=1,2)$$

Подействуем на $u(\mathbf{x})$ элементами точечной подгруппы $H \in G$

$$u_j(\mathbf{x}) = g_j u(\mathbf{x}) = w_j(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k}_j \mathbf{x}) \quad (g_j \in H)$$

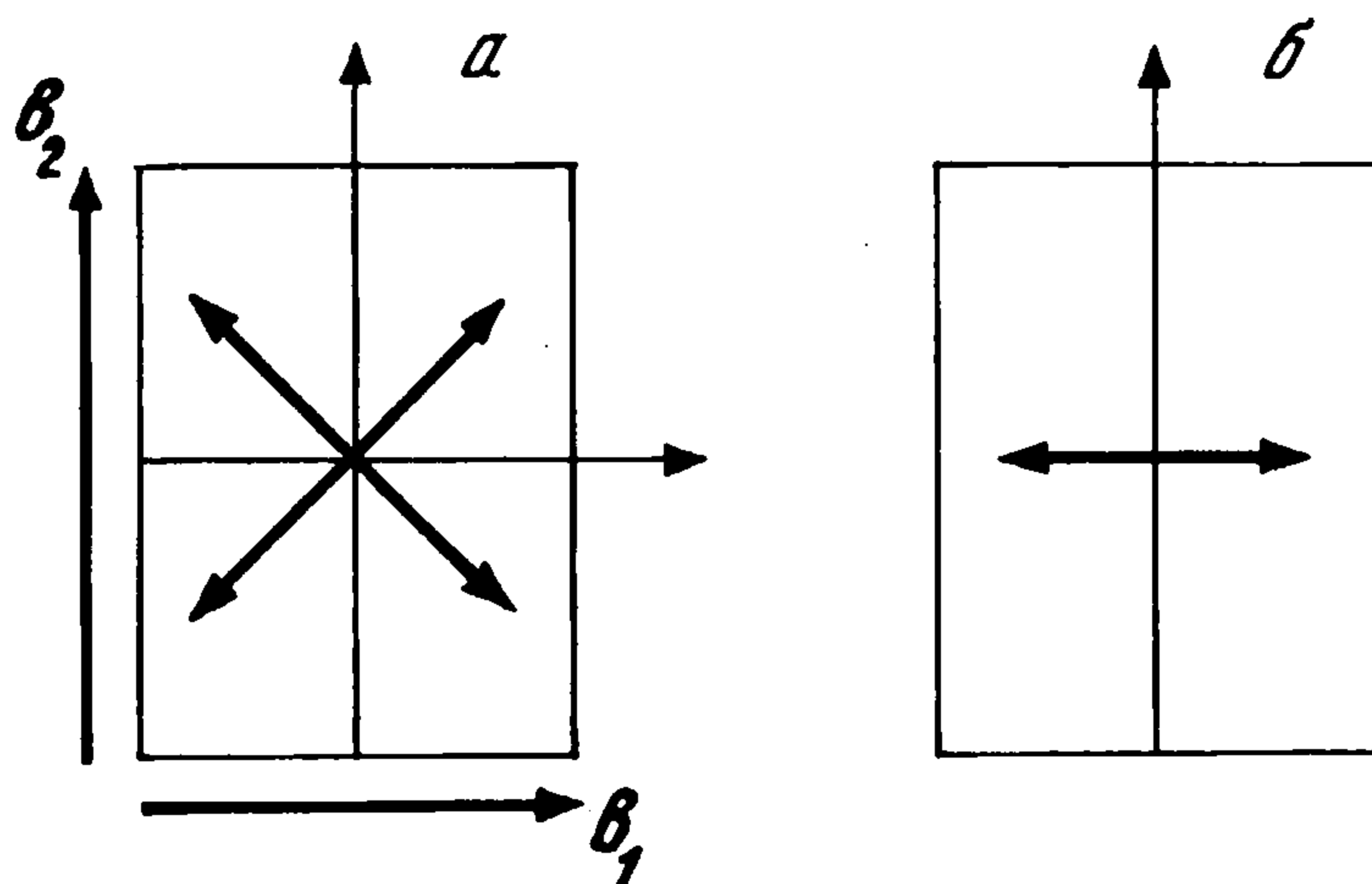
($w_j(\mathbf{x}) = g_j w(\mathbf{x})$, $\mathbf{k}_j = g_j \mathbf{k}$, $j=1,2,\dots,N$; N – порядок группы H).

Из симметрии среды следует, что $u_j(\mathbf{x})$ – амплитудные функции волн, соответствующие одной и той же частоте, и если все \mathbf{k}_j ($j=1,2,\dots,N$) различны, то из способа построения этих функций следует, что они преобразуются по неприводимому представлению группы G [6]. Если же $\mathbf{k}_j = \mathbf{k}_i$ для некоторых j и i (т.е. \mathbf{k}_j инвариантен относительно элементов некоторой подгруппы $H_0 \in H$), то $u_j(\mathbf{x})$ и $u_i(\mathbf{x})$ заменяются их линейными комбинациями, преобразующимися по неприводимым представлениям группы H_0 .

Подобная теорема для свободных колебаний упругих систем с точечной группой симметрии была доказана в кандидатской диссертации автора в 1970 г.

Зона Бриллюэна для решетки Браве [2] с пространственной группой симметрии C_{2v}^2 имеет вид, представленный на фиг. 2. Векторы \mathbf{b}_j , определяющие эту область, вычисляются по формуле $\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j / (2l_j)^2$, $l_j = |\mathbf{a}_j|/2$ ($j=1,2$). Неприводимые представления указанной группы зависят от вектора $\mathbf{k} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2$. Будем рассматривать сначала случай, когда звезда вектора \mathbf{k} состоит из четырех векторов $\pm \alpha_1 \mathbf{b}_1 \pm \alpha_2 \mathbf{b}_2$ (фиг. 2,а). В этом случае неприводимое представление группы четырехмерно и однозначно определяется параметром α [2].

Амплитудные перемещения точек среды при волновом движении, соответствующем этому неприводимому представлению, будем искать в виде суммы потенциалов



Фиг. 2

простого слоя

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{l_0} \int_{\Omega_l} \Gamma(\alpha, \omega, \mathbf{x} - \mathbf{y}_l) q_l(\mathbf{y}_l) ds_l \quad (\mathbf{y}_l \in \Omega_l, l_0 = 4) \quad (2.1)$$

Направления интегрирования вдоль контуров Ω_l показаны на фиг. 1, функция Грина $\Gamma(\alpha, \omega, \mathbf{x})$ вычисляется по формуле (1.5), в которой величина l_j заменена на $2l_j$ ($j = 1, 2$).

Можно показать, что воздействие элементов группы C_{2v} , состоящей из тождественного элемента, отражений в плоскостях $\sigma_{1,0}$, $\sigma_{2,0}$ и поворота на 180° вокруг оси x_3 , переводит функцию $u(\mathbf{x})$ в функции $u_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, 2, 3, 4$) (при этом $u_1(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$), преобразующиеся по четырехмерному неприводимому представлению группы C_{2v}^2 , причем $u_j(\mathbf{x})$ отличаются друг от друга только нумерацией плотностей потенциалов $q_l(\mathbf{y})$ ($l = 1, 2, 3, 4$). Будем называть эти потенциалы симметрическими.

Пусть на контурах Ω_j ($j = 1, 2, \dots, l_0$) заданы граничные условия

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_j \quad (j = 1, 2, \dots, l_0) \quad (2.2)$$

Заметим, что из метода построения функций $u_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, 2, 3, 4$) вытекает, что граничные условия (2.2) выполняются для всех $u_j(\mathbf{x})$ и на всех контурах, если они выполнены для одной функции $u_1(\mathbf{x})$ на четырех контурах основного прямоугольника.

Подставляя выражение (2.1) в (2.2), получим систему интегральных уравнений

$$\sum_{l=1}^{l_0} \int_{\Omega_l} \Gamma(\alpha, \omega, \mathbf{x}_p - \mathbf{y}_l) q_l(\mathbf{y}_l) ds_l = 0 \quad (\mathbf{x}_p \in \Omega_p, \quad p = 1, 2, \dots, l_0) \quad (2.3)$$

Далее будем иметь

$$\Gamma(\alpha, \omega, \mathbf{x}_p - \mathbf{y}_p) = S(\mathbf{x}_p - \mathbf{y}_p) + R(\alpha, \omega, \mathbf{x}_p - \mathbf{y}_p)$$

$$S(\mathbf{x}_p) = (2\pi)^{-1} \ln(x_{1,p}^2 + x_{2,p}^2)^{1/2}$$

$$R(\alpha, \omega, \mathbf{x}_p) = (4l_1 l_2)^{-1} \sum_{k,j} (\Gamma_{kj} - g_{kj}) \exp(-i\xi_{1,k}^{(p)} x_{1,p} - i\xi_{2,j}^{(p)} x_{2,p}) \quad (2.4)$$

$$\Gamma(\alpha, \omega, \mathbf{x}_p - \mathbf{y}_l) = (4l_1 l_2)^{-1} \sum_{k,j} \Gamma_{kj} \exp\{-i\xi_{1,k}^{(p)} [x_{1,p} - P_{pl} y_{1,l} + e_1(1 - P_{pl})] - i\xi_{2,j}^{(p)} [x_{2,p} - Q_{pl} y_{2,l} + e_2(1 - Q_{pl})]\} \quad (p \neq l)$$

Здесь $x_{1,p}$, $x_{2,p}$, $y_{1,l}$, $y_{2,l}$ — координаты точек \mathbf{x}_p и \mathbf{y}_l ($\mathbf{x}_p \in \Omega_p$, $\mathbf{y}_l \in \Omega_l$) в соответствующих локальных системах координат, e_1 , e_2 — координаты центра окружности

Ω_1 в тотальной системе, P_{pl} и Q_{pl} ($p, l = 1, 2, \dots, l_0$) – элементы симметричных матриц, причем

$$\begin{aligned} P_{12} = -1, \quad P_{13} = -1, \quad P_{14} = 1, \quad P_{23} = 1, \quad P_{24} = -1, \quad P_{34} = -1 \\ Q_{12} = 1, \quad Q_{13} = -1, \quad Q_{14} = -1, \quad Q_{23} = -1, \quad Q_{24} = -1, \quad Q_{34} = 1 \end{aligned}$$

и наконец,

$$\xi_{1,k}^{(p)} = [2k\pi - (-1)^{E(p/2)} \alpha_1] / (2l_1), \quad \xi_{2,j}^{(p)} = [2j\pi - (-1)^{E[(p-1)/2]} \alpha_2] / (2l_2)$$

($E(x)$ – целая часть числа x).

Из (2.4) следует, что (2.3) – система интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Введем в каждой из локальных систем координат $x_{1,p}, x_{2,p}$ полярную систему r_p, ϕ_p (или θ_p) (фиг. 1) и представим координаты точек x_p и y_l в следующем виде:

$$x_{1,p} = r_p \cos \theta_p, \quad x_{2,p} = r_p \sin \theta_p, \quad y_{1,l} = r_l \cos \phi_l, \quad y_{2,l} = r_l \sin \phi_l \quad (2.5)$$

Будем искать решение системы (2.3) в виде ряда

$$q_l(y_l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_{lm} \exp(im\phi_l) \quad (2.6)$$

Подставим (2.6) в (2.3), затем умножим на $(2\pi)^{-1} \exp(-in\theta_p)$ и проинтегрируем по θ_p от $-\pi$ до $+\pi$. В результате приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$A_{1,p,n} q_{pn} + \sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{2,p,l,n,m} q_{lm} = 0 \quad (2.7)$$

$$(p = 1, 2, \dots, l_0; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

где

$$A_{1,p,n} = r_0 \ln r_0 \delta_{n,0} - \frac{r_0}{2|n|} (1 - \delta_{n,0})$$

$$A_{2,p,p,n,m} = \frac{\pi r_0}{2l_1 l_2} \sum_{k,j} (\Gamma_{kj} - g_{kj}) F_{kjm}^{(p)} E_{k,j,-m}^{(p)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E^{(p)} \\ F^{(p)} \end{array} \right\}_{kjm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[\pm i r_0 U_{kj}^{(p)}(\theta) - in\theta] d\theta \quad (2.8)$$

$$U_{kj}^{(p)}(\theta) = \xi_{1,k}^{(p)} \cos \theta + \xi_{2,j}^{(p)} \sin \theta$$

Используя представление (1.9), можно показать, что

$$E_{kjm}^{(p)} = \exp(in\psi_{kj}^{(p)}) J_n(r_0 \xi_{kj}^{(p)}), \quad F_{kjm}^{(p)} = (-1)^n E_{kjm}^{(p)} \quad (2.9)$$

причем $\psi_{kj}^{(p)}$ определяется из условий

$$\sin \psi_{kj}^{(p)} = \xi_{1,k}^{(p)} / \xi_{kj}^{(p)}, \quad \cos \psi_{kj}^{(p)} = \xi_{2,j}^{(p)} / \xi_{kj}^{(p)}, \quad \xi_{kj}^{(p)} = [(\xi_{1,k}^{(p)})^2 + (\xi_{2,j}^{(p)})^2]^{1/2}$$

Аналогичные представления имеют и остальные коэффициенты системы (2.7):

$$A_{2,p,l,n,m} = \frac{\pi r_0}{2l_1 l_2} \sum_{k,j} \Gamma_{kj} \exp[-i\xi_{1,k}^{(p)} e_1 (1 - P_{pl}) - i\xi_{2,j}^{(p)} e_2 (1 - Q_{pl})] F_{kjm}^{(p)} E_{k,j,-m}^{(l)} \quad (p \neq l) \quad (2.10)$$

Умножая обе части равенства (2.7) на $|n|$ при $n \neq 0$, приходим к бесконечной

системе линейных алгебраических уравнений

$$B_{1,p,n}q_{pn} + \sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{2,p,l,n,m}q_{lm} = 0 \quad (2.11)$$

$$(p = 1, 2, \dots, l_0; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$B_{1,p,n} = r_0 \ln r_0 \delta_{n,0} - r_0(1 - \delta_{n,0})/2$$

$$B_{2,p,l,0,m} = A_{2,p,l,0,m}, \quad B_{2,p,l,n,m} = A_{2,p,l,n,m}|n| \quad (n \neq 0)$$

Используя гладкость функций $R(\alpha, \omega, x_p - y_p)$ и $\Gamma(\alpha, \omega, x_p - y_l)$ ($p \neq l$) при значениях x_p и y_l , удовлетворяющих (2.5) на квадрате $|\theta, \phi| \leq \pi$, можно убедиться, что $\sum |B_{2,p,l,n,m}|^2 < \infty$, а значит, (2.11) – нормальная системой Коха и может быть решена редукцией [7].

Рассмотрим случай, когда "решеточный" волновой вектор \mathbf{k} коллинеарен вектору \mathbf{b}_1 , но не равен его половине (фиг. 2,б). В этом случае звезда вектора \mathbf{k} состоит из двух векторов: \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$. Точечная группа вектора \mathbf{k} состоит из двух элементов: тождественного и отражения в плоскости $\sigma_{1,0}$ и имеет два одномерных неприводимых представления с номерами $j = 1, 2$. Тогда вектору \mathbf{k} (а значит, и параметру α) соответствует два двумерных неприводимых представления группы C_{2v}^2 с теми же номерами. Строим функции перемещений, преобразующиеся по этим представлениям. В выражении (2.1) следует положить $q_1(\phi_1) = (-1)^j q_4(\phi_4)$, $q_2(\phi_2) = (-1)^j q_3(\phi_3)$ ($j = 1, 2$). При составлении системы интегральных уравнений опять таки из условий симметрии достаточно удовлетворить граничным условиям на контурах Ω_1 и Ω_2 . В результате приходим к системе вида (2.3), в которой $l_0 = 2$. Аналогичные изменения вносятся и в последующие формулы.

Пусть теперь звезда вектора \mathbf{k} состоит только из одного вектора (например, $\mathbf{k} = 0$). Поскольку все неприводимые представления группы c_{2v} одномерны, то и все представления группы C_{2v}^2 в этом случае также одномерны и представлениям обеих групп можно присвоить одинаковые номера. В приведенных выше формулах $l_0 = 1$.

Подставляя решение усеченной системы (2.11) в (2.1), приходим к выражению

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \exp[i\alpha_1 x_1 / (2l_1) + i\alpha_2 x_2 / (2l_2)] \quad (2.12)$$

$$u_0(\mathbf{x}) = \frac{r_0}{4l_1 l_2} \sum_{k,j} \Gamma_{kj} \exp(-is_{1,k} - is_{2,j}) \sum_{l=1}^{l_0} \sum_{m=-n_0}^{n_0} q_{lm} H_{kjl m}$$

$$H_{kjl m} = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\xi_{1,k}^{(1)} y_{1,l} + \xi_{2,j}^{(1)} y_{2,l} + im\theta_l) d\theta_l; \quad s_{1,k} = \frac{k\pi}{l_1}, \quad s_{2,j} = \frac{j\pi}{l_2}$$

Заметим, что в представлении (2.12) функция $u_0(\mathbf{x})$ инвариантна относительно подгруппы трансляций, а экспоненциальный множитель преобразуется по неприводимому представлению этой подгруппы.

С учетом зависимости перемещений от времени можно записать

$$u(\mathbf{x}, t) = |u_0(\mathbf{x})| \exp\{i[a_0(\mathbf{x}) + k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t]\}, \quad a_0(\mathbf{x}) = \arg u_0(\mathbf{x})$$

Эта формула показывает, что на двоякопериодической решетке $\mathbf{x}_{mn} = \mathbf{x}_{00} + m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2$ (\mathbf{x}_{00} – произвольная точка, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $u(\mathbf{x}, t)$ ведет себя как плоская волна, поскольку $|u_0(\mathbf{x})|$ и $a_0(\mathbf{x})$ имеют во всех точках решетки одни и те же значения. Будем называть такие волны решеточно-плоскими (РП-волнами). Вектор \mathbf{k} играет роль волнового вектора, задающего направление движения волны. Длина волны $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}| = 2\pi / (\alpha_1^2 / l_1^2 + \alpha_2^2 / l_2^2)^{1/2}$, фазовая скорость $v = \omega/|\mathbf{k}| = \omega / (\alpha_1^2 / l_1^2 + \alpha_2^2 / l_2^2)^{1/2}$.

Но вообще говоря, РП-волна, конечно же, не является плоской. Двоякопериодическая функция $|u_0(\mathbf{x})|$ определяет "амплитудную модуляцию" РП-волны, а $a_0(\mathbf{x})$ – "фазовую". Назовем $|u_0(\mathbf{x})|$ формой волны.

3. Определитель усеченной системы (2.7) (а значит, и (2.11)) принимает вещественные значения.

Действительно, из (2.10) имеем

$$\bar{A}_{2,p,l,n,m} = \frac{r_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\Gamma}(\alpha, \omega, \mathbf{x}_p - \mathbf{y}_l) \exp(-im\phi_l + in\theta_p) d\phi_l d\theta_p$$

Из (1.5) следует, что $\bar{\Gamma}(\alpha, \omega, \mathbf{x}_p - \mathbf{y}_l) = \Gamma(-\alpha, \omega, \mathbf{x}_p - \mathbf{y}_l)$. Подобное изменение параметра α соответствует переходу из одной локальной системы координат в другую. Поэтому $\bar{\Gamma}(\alpha, \omega, \mathbf{x}_p - \mathbf{y}_l) = \Gamma(\alpha, \omega, \mathbf{x}_{h(p)} - \mathbf{y}_{h(l)})$, где $h(p)$ – перестановка символов $1, 2, \dots, l_0$. Следовательно

$$\bar{A}_{2,p,l,n,m} = A_{2,h(p),h(l),-n,-m} \quad (3.1)$$

Из (3.1) вытекает, что проведение операции комплексного сопряжения над определителем матрицы усеченной системы (2.7) $\Delta_j(\alpha, \omega)$ (параметры α и j определяют неприводимое представление группы C_{2v}^2) приводит к одинаковой перестановке строк и столбцов матриц, что оставляет определитель неизменным: $\bar{\Delta}_j(\alpha, \omega) = \Delta_j(\alpha, \omega)$, т.е. $\Delta_j(\alpha, \omega)$ – вещественная величина.

Корни определителя $\omega_k(\alpha_1, \alpha_2)$ ($k = 1, 2, \dots$) образуют поверхности в пространстве трех переменных $\omega, \alpha_1, \alpha_2$. Будем называть их частотными поверхностями (ЧП). Как отмечалось выше, если в рассматриваемой перфорированной среде распространяется РП-волна с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , то в ней может распространяться и РП-волна с той же частотой и с волновым вектором $\tilde{\mathbf{k}}$, где $\tilde{\mathbf{k}} = (-k_1, k_2)$, либо $\tilde{\mathbf{k}} = (k_1, -k_2)$. Поэтому ЧП симметричны относительно плоскостей $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$. С другой стороны, если увеличить α_i на 2π , то $\xi_{i,k}$ станет равным $\xi_{i,k} = [(k-1)2\pi - \alpha_i] / l_i$. Заменяя в (1.5) k на $k+1$, получим $\Gamma(\tilde{\alpha}, \omega, \mathbf{x}) = \Gamma(\alpha, \omega, \mathbf{x})$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1 + 2\pi, \alpha_2)$ [либо $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 + 2\pi)$], откуда следует, что ЧП двоякопериодичны по α_1 и α_2 с одинаковыми периодами 2π . Таким образом, ЧП достаточно определить на квадрате $0 \leq \alpha_i \leq \pi$ ($i = 1, 2$).

4. Если же контуры отверстий свободны, то проводя рассуждения аналогичные приведенным в разд. 2, приходим к выражению

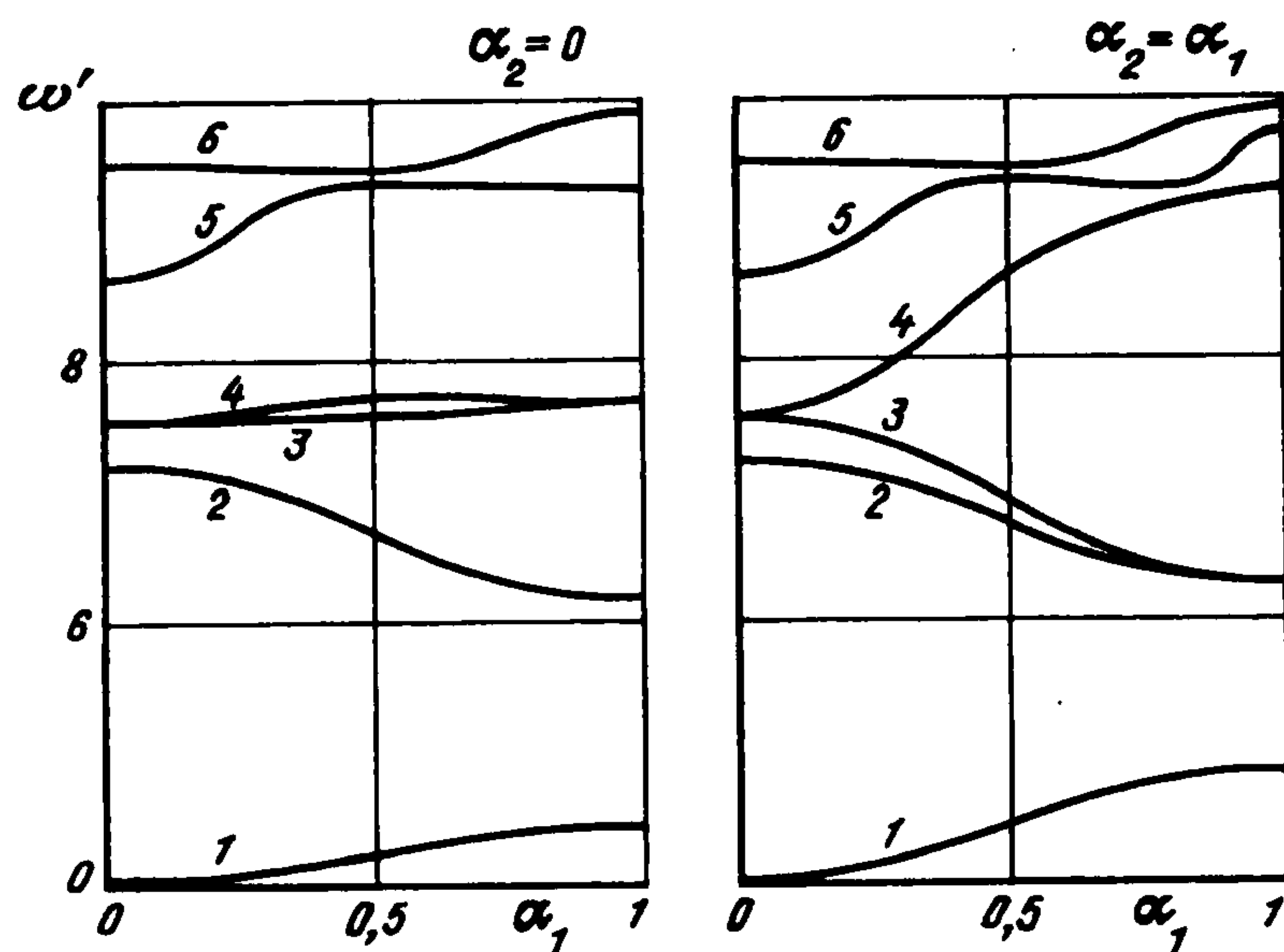
$$\tau(\mathbf{x}) / (2\mu) = \sum_{l=1}^{l_0} \int_{\Omega_l} \Gamma^{(n)}(\alpha, \omega, \mathbf{x} - \mathbf{y}_l) q_l(\mathbf{y}_l) ds_l \quad (4.1)$$

Здесь $\tau(\mathbf{x})$ – касательные напряжения на площадке с нормалью n , расположенной в точке \mathbf{x} ; $\Gamma^{(n)}(\mathbf{x})$ – половина производной α -периодической функции Грина в направлении указанной нормали.

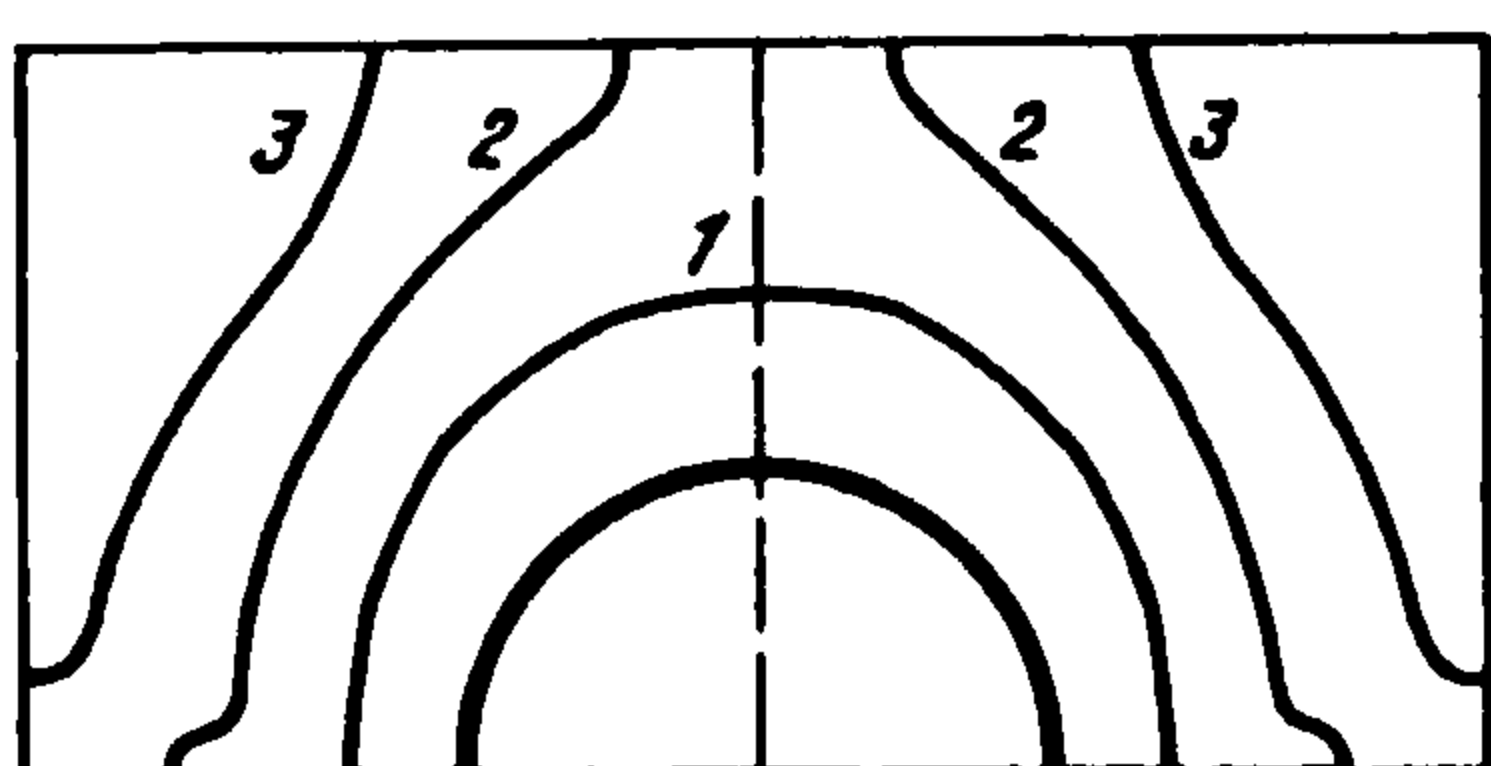
Переходя к пределу в (4.1) при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_p$ ($\mathbf{x}_p \in \Omega_p$), получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которые сводятся к системе (2.11), в которой

$$B_{1,p,n} = \frac{1}{4}(\delta_{n,0} + 1)$$

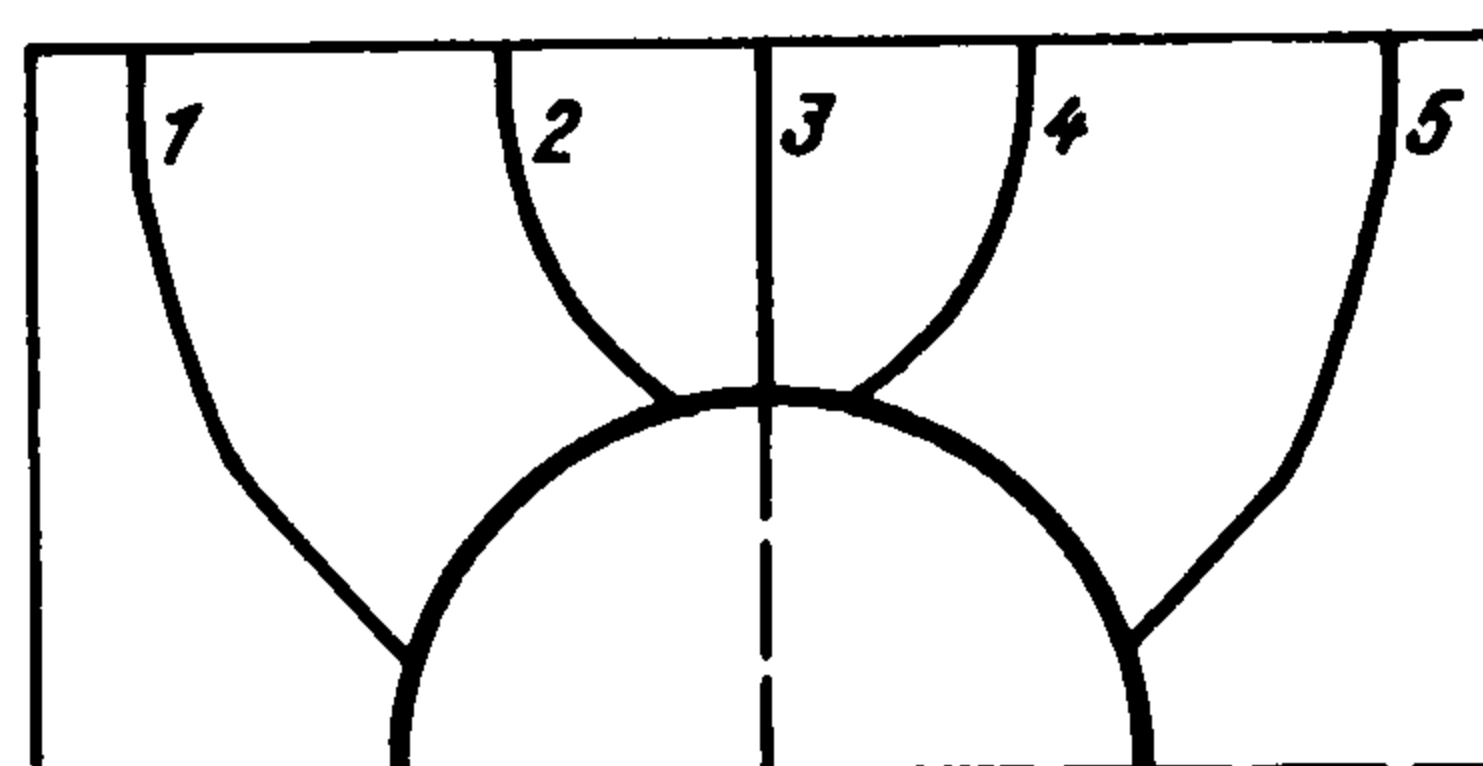
$$B_{2,p,l,n,m} = \frac{r_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma^{(n)}(\alpha, \omega, \mathbf{x}_p - \mathbf{y}_l) \exp(im\phi_l - in\theta_p) d\phi_l d\theta_p$$



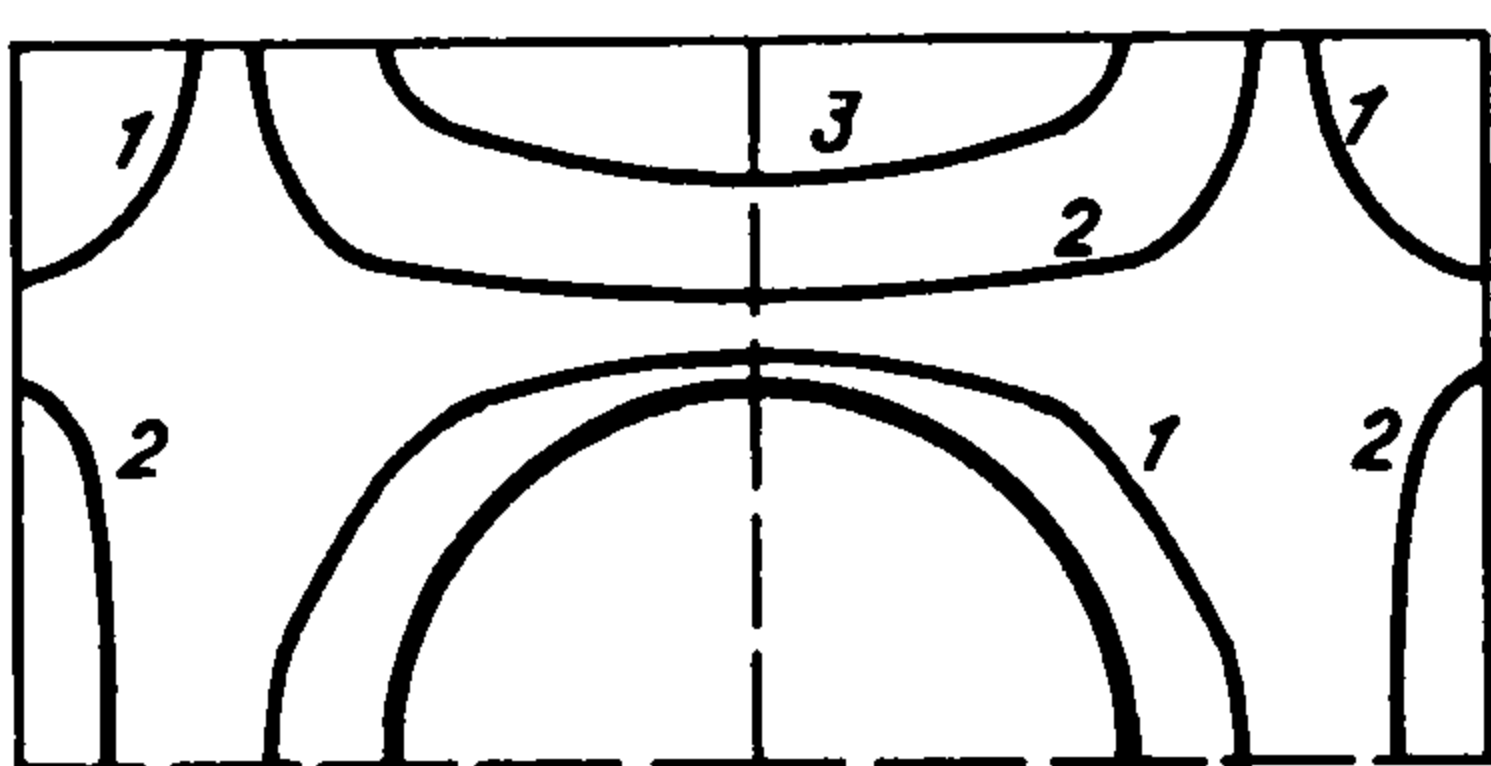
Фиг. 3



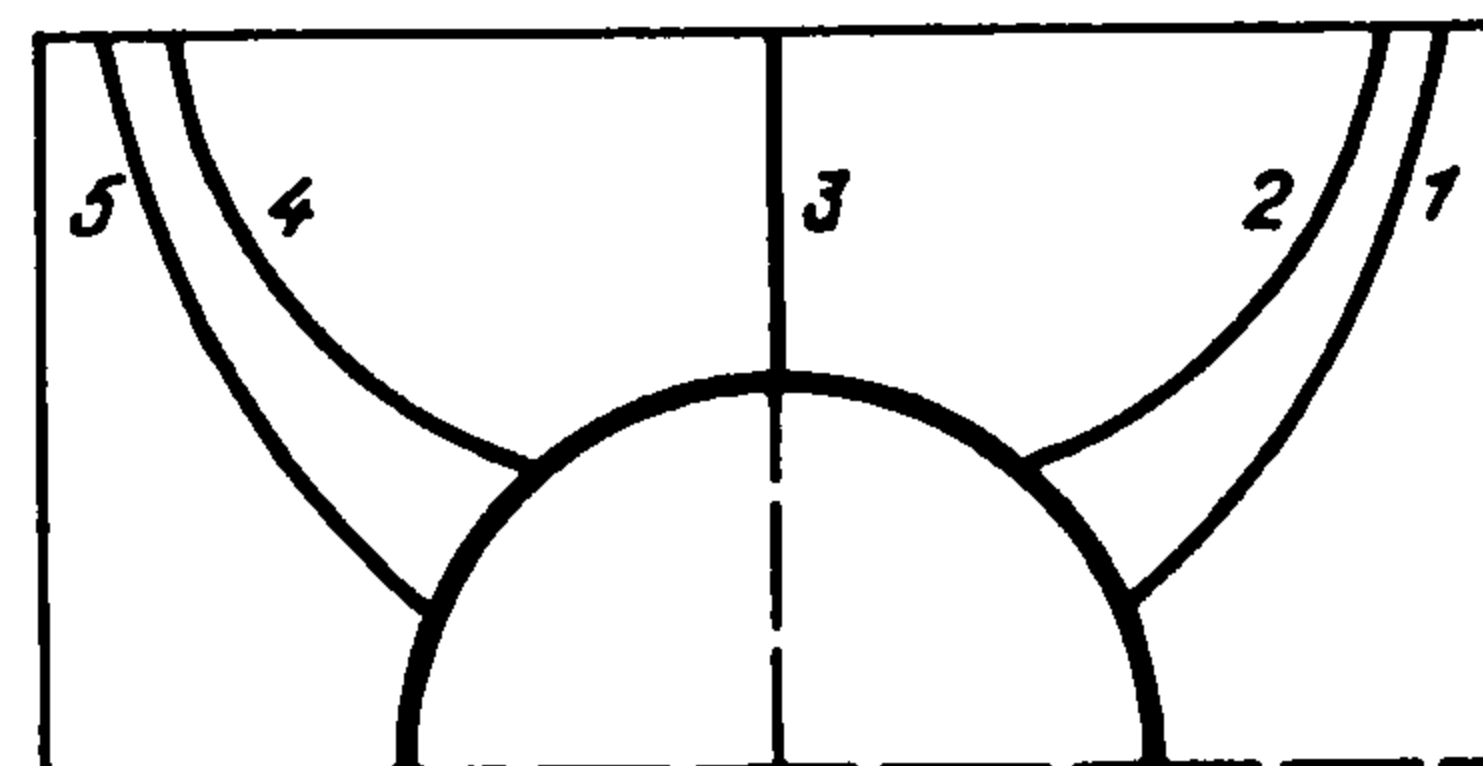
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Как и в разд. 3, $B_{2,p,l,n,m}$ выражаются через бесселевы функции первого рода. Как и в случае защемленных отверстий, полученная система является нормальной системой Коха и может быть решена редукцией.

5. Примеры. Рассмотрим пример, в котором $e_i = l_i/2$ (e_i – координаты центра отверстия на основной элементарной ячейке, $i = 1, 2$) и приняты следующие безразмерные переменные: $x'_i = x_i / l_i$ ($i = 1, 2$), $\omega' = \omega l_1 / \nu$. Будем исследовать случай, когда контуры отверстий защемлены. Примем $l'_1 = l'_2 = 1$, $r'_0 = 0,25$. При заданных значениях α_1 и α_2 оставляем в ряде (2.6) $2n_0 + 1$ членов от $-n_0$ до $+n_0$, усекая тем самым бесконечную систему (2.11) до конечной. При нахождении корней ω'_k определителя этой системы при каждом значении ω' выбираем величину n_0 так, чтобы при дальнейшем ее увеличении определитель менялся на достаточно малую величину (при построении графиков при $n_0 \geq 5$ определитель вычислялся с точностью до 10^{-4}).

На фиг. 3 показаны сечения поверхностей плоскостями $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 = \alpha_1$ (при $l'_1 = l'_2$ ЧП симметричны еще относительно плоскостей $\alpha_2 = \pm\alpha_1$). Поверхности пронумерованы в порядке возрастания частот.

На фиг. 4 приведены линии уровня формы волны ЧП 1 при $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = 0$. Цифрам 1, 2 и 3 соответствуют значения уровня 0,25, 0,5 и 0,75 (функция $|u_0(x)|$ нормирована таким образом, что $\max u_0(x) = 1$; вследствие симметрии показана половина всей картины).

На фиг. 5 изображено движение нулевой линии (линии $\text{Re } u(x, t) = 0$), т.е. положения ее при

$t = (j - 1)T/8$ ($j = 1, 2, 3, 4$; j – соответствующая цифра на фиг. 4; $T = 2\pi/\omega$) на "основном" квадрате $|x'_i| \leq l'_i/2$ ($i = 1, 2$). При $t = T/2$ на квадрате находятся две нулевых линии (обозначены цифрами 1 и 5). В течение следующего полупериода линия занимает положения 2, 3 и 4 в моменты времени $t = (j - 1)T/8 + T/2$ ($j = 2, 3, 4$), но при этом знаки перемещений слева и справа от линии противоположны таковым для первого полупериода. Видно, что волны движутся вправо, что совпадает с направлением решеточного волнового вектора \mathbf{k} .

На фиг. 6 изображены линии уровня формы волны для ЧП 2, а на фиг. 7 – картина движения волн; видно, что в этом случае фронты движутся влево, т.е. в направлении, противоположном вектору \mathbf{k} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз, 1958. 354 с.
2. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 254 с.
3. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1969. 800 с.
5. Бриллюен Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 457 с.
6. Фомин В.М. Интегральное представление функции, заданной на множестве с пространственной группой симметрии // Докл. АН АрмССР. 1985. Т. 81. № 5. С. 195–199.
7. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Одесса

Поступила в редакцию
2.IX.1997