УДК 539.3:534.1

© 1998 г. С.А. Коренский

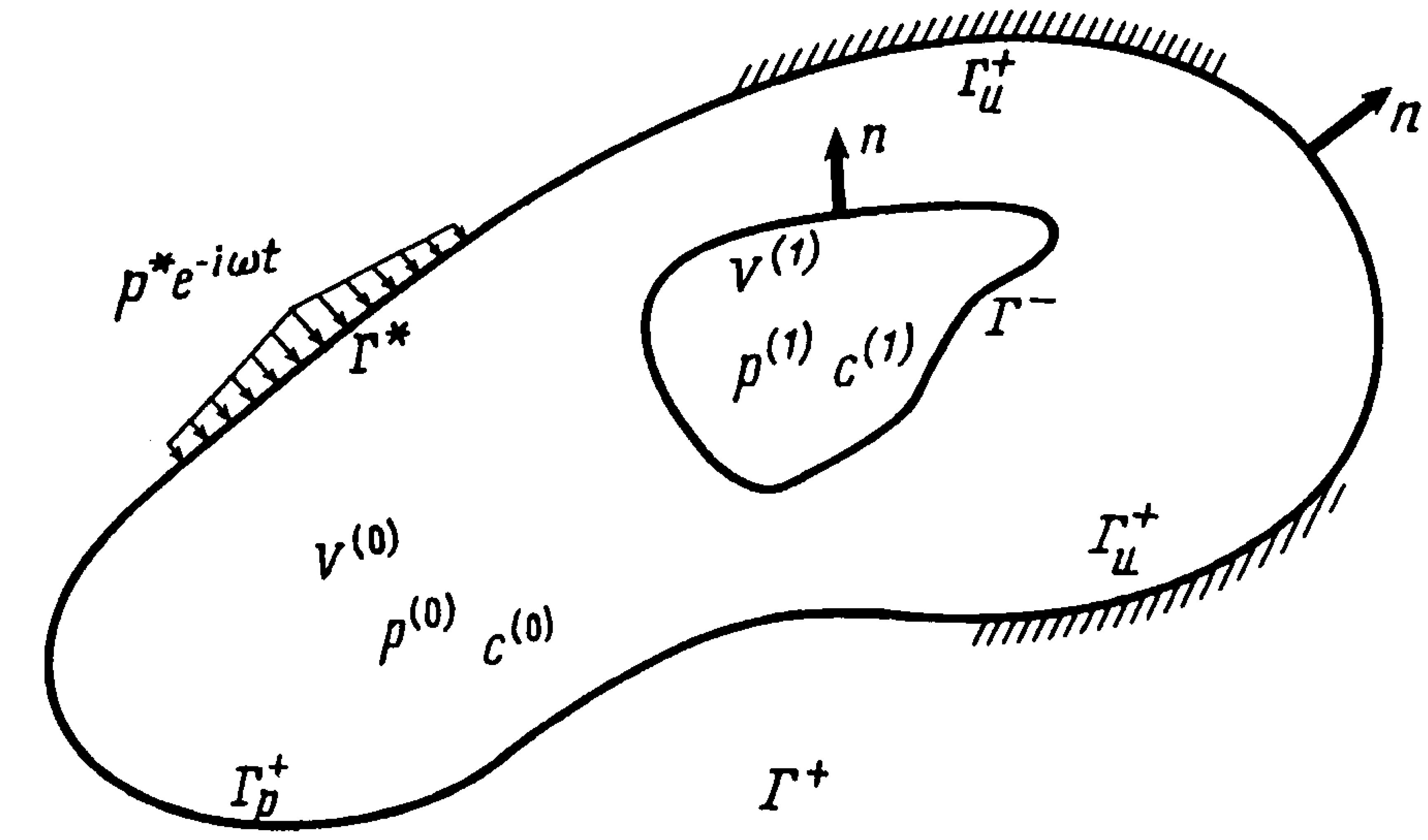
О ФОРМУЛИРОВКЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ

Рассматривается упругое ограниченное анизотропное тело с упругим включением. На части границы тела действует осциллирующий источник, возбуждающий колебания в упругом теле. На другой его части заданы нулевые перемещения, а на остальной части – нулевые усилия. Вводится вариация формы поверхности тела и включения непрерывной кривизны и линеаризуется задача теории упругости относительно этой вариации. Указывается алгоритм построения интегральных представлений для таких линеаризованных задач. Исследуются предельные свойства линеаризованных операторов и формулируются специальные граничные интегральные уравнения анизотропной теории упругости, связывающие вариации граничных полей смещений и напряжений с вариацией формы граничной поверхности. Приводятся примеры приложений этих уравнений в геометрических обратных задачах, в которых требуется восстановить неизвестную часть границы тела или форму упругого включения на основе информации о волновом поле на доступном для наблюдения участке поверхности тела.

К формулировке специальных граничных интегральных уравнений теории упругости [1–5] приводит задача анализа влияния малых изменений формы границы на волновые поля в упругой среде. Задача, обратная к задаче анализа влияния, состоит в уточнении априорной информации о форме неизвестной части граничной поверхности на основе данных о волновом поле на доступном для наблюдений (измерений) участке границы среды и называется линеаризованной обратной задачей. Для ее решения необходимо решать прямую задачу с использованием системы классических граничных интегральных уравнений [6–8] и обращать систему специальных граничных интегральных уравнений. Итерационная процедура последовательного уточнения формы искомой границы позволяет решать нелинейные обратные задачи [2–5].

Пусть упругая среда занимает ограниченную область W, а включение занимает область $V^{(1)} \subset W$. Границы тела $\Gamma^+ = \partial W$ и включения $\Gamma^- = \partial V^{(1)}$ будем считать поверхностями непрерывной кривизны. Будем полагать, что включение $V^{(1)}$ и внешняя среда $V^{(0)} = W \setminus V^{(1)}$ однородны и каждая из них характеризуется тензором упругих постоянных $c^{(m)}$ и плотностью $\rho^{(m)}(m = 0, 1)$ (фигура). Верхний индекс $m = 1$ указывает на принадлежность величины к среде включения, а $m = 0$ – к внешней среде. На участке границы тела $\Gamma^* \subset \Gamma^+$ действует осциллирующий во времени источник $p^* e^{-i\omega t}$, возбуждающий колебания в упругой среде. Оставшийся участок границы $\Gamma^+ \setminus \Gamma^*$ разобьем на две части: Γ_p^+ и Γ_u^+. Пусть на участке Γ_p^+ граница свободна от напряжений, а на Γ_u^+ поле смещений равно нулю. Предположим, что в упругой среде реализуется режим установившихся колебаний.

После отделения временного множителя $e^{-i\omega t}$ приведенная выше краевая задача



описывается уравнениями движения

$$\nabla \cdot \sigma^{(m)} + \rho^{(m)}\omega^2 u^{(m)} = 0, \quad x \in V^{(m)}, \quad m = 0,\ 1 \tag{1}$$

определяющими соотношениями

$$\sigma^{(m)} = c^{(m)} \odot \nabla u^{(m)}, \quad x \in V^{(m)}, \quad m = 0,\ 1 \tag{2}$$

граничными условиями

$$p^{(0)} = p^*; \quad x \in \Gamma^*; \quad p^{(0)} = 0, \quad x \in \Gamma_p^+; \quad u^{(0)} = 0, \quad x \in \Gamma_u^+ \tag{3}$$

и условиями сопряжения на границе включения

$$u^{(0)} = u^{(1)}, \quad p^{(0)} = p^{(1)}, \quad x \in \Gamma^- \tag{4}$$

В случае полости или абсолютно жесткого включения достаточно поставить одно граничное условие на Γ^-:

$u^{(0)} = 0,\ \ x \in \Gamma^-$ (абсолютно жесткое включение)

$p^{(0)} = 0,\ \ x \in \Gamma^-$ (полость)

Здесь σ – тензор напряжений, u – вектор смещений, $p = \sigma \cdot n$ – вектор напряжений на площадке с нормалью n. Будем также считать, что в среде присутствует трение, пропорциональное скорости. Для этого достаточно в уравнениях движения ω заменить на ω_ε, где $\omega_\varepsilon = \omega + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

С использованием фундаментальных решений U_r [9] уравнений (1), (2)

$$\nabla \cdot (c^{(m)} \odot \nabla U_r^{(m)}) + \rho^{(m)}\omega^2 U_r^{(m)} = -e_r \delta(x,\ \xi) \tag{5}$$

$$x,\ \xi \in \mathbf{R}^3, \quad r = 1,\ 2,\ 3$$

где e_r – вектор декартового базиса, а $\delta(x, \xi)$ – трехмерная дельта-функция Дирака, интегральные представления для вектора смещений через волновые поля на Γ^+ и Γ^- запишем в виде

$$u^{(m)}(\xi) = \mathbf{S}^{(m)}[u^{(m)},\ p^{(m)},\ \Gamma^{(m)},\ \xi] \quad \xi \in V^{(m)}, \quad m = 0,\ 1$$

$$\Gamma^{(0)} = \partial V^{(0)} = \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \quad \Gamma^{(1)} = \partial V^{(1)} = \Gamma^-$$

$$\mathbf{S}^{(m)} = (\mathbf{S}_1^{(m)},\ \mathbf{S}_2^{(m)},\ \mathbf{S}_3^{(m)})$$

$$\mathbf{S}_r^{(m)}[u,\ p,\ \Gamma,\ \xi] = \int\limits_\Gamma (p(x) \cdot U_r^{(m)}(x,\ \xi) - u(x) \cdot P_r^{(m)}(x,\ \xi))d\Gamma_x$$

$$P_r^{(m)}(x,\ \xi)=\Sigma_r^{(m)}(x,\ \xi)\cdot n(x),\quad \Sigma_r^{(m)}(x,\ \xi)=c^{(m)}\odot\nabla U_r^{(m)}$$

где $S^{(m)}$ – оператор Сомильяны, n – внешняя нормаль к Г.

Введем вариацию формы поверхности непрерывной кривизны Г как скалярную функцию $\nu(x)$, $x\in\Gamma$, $\nu\in C^1(\Gamma)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\|\nu,\ _s\|\ll 1,\quad \|\varkappa\nu\|\ll 1,\quad \|k\nu\|\ll 1 \tag{6}$$

Здесь $\|\cdot\|=\max_\Gamma|\cdot|$, $(\ ),_s=s\cdot\nabla(\ )$, s – любой единичный вектор в касательной плоскости к Г, $\varkappa$ – максимальная по модулю главная кривизна, k – максимальное волновое число.

Зададим поверхность $\tilde\Gamma^-$ в системе координат, связанной с Γ^- посредством функции вариации формы ν

$$\tilde r=r+d,\quad d=\nu n,\quad x\in\Gamma^- \tag{7}$$

где r и $\tilde r$ – радиус-векторы поверхностей Γ^- и $\tilde\Gamma^-$. Аналогично введем поверхность $\tilde\Gamma^+$ и дополнительно потребуем, чтобы $\tilde\Gamma^-$ и $\tilde\Gamma^+$ были простыми поверхностями и не имели общих точек.

Рассмотрим краевую задачу (1)–(4) в областях, ограниченных поверхностями $\tilde\Gamma^+$ и $\tilde\Gamma^-$. Все величины, относящиеся к этой краевой задаче будем помечать волной. Линеаризуем разность

$$\tilde u^{(m)}(\xi)-u^{(m)}(\xi)=\mathbf{S}^{(m)}[\tilde u^{(m)},\ \tilde p^{(m)},\ \tilde\Gamma^{(m)},\ \xi]-\mathbf{S}^{(m)}[u^{(m)},\ p^{(m)},\ \Gamma^{(m)},\ \xi] \tag{8}$$

$$\xi\in\tilde V^{(m)}\cap V^{(m)},\quad m=0,\ 1$$

Далее индекс m будем опускать.

Пусть (α,β) – ортогональная система координат на Г. Введем обозначения: $(\ )_\alpha=\partial(\ )/\partial\alpha$, $(\ )_\beta=\partial(\ )/\partial\beta$; r_α, r_β – ортогональные векторы в касательной плоскости; $a=r_\alpha/|r_\alpha|$, $b=r_\beta/|r_\beta|$ – ортонормированный базис в касательной плоскости. Якобиан преобразования элемента поверхности $d\Gamma$ в элемент поверхности $d\tilde\Gamma$ имеет вид

$$J=[(1-\varkappa_1\nu)^2(1-\varkappa_2\nu)^2+\nu^2,\ _a+\nu^2,\ _b+2\nu(\nu,\ _aN-2\nu,\ _a\nu,\ _bM+\nu,\ _bL)+$$
$$+\nu^2[\nu^2,\ _a(N^2+M^2)+2\nu,\ _a\nu,\ _bM(\varkappa_1+\varkappa_2)+\nu^2,\ _b(L^2+M^2)]]^{1/2}$$

где L, M, N: $n,\ _a=La+Mb$; $n,\ _b=Ma+Nb$.

С использованием соотношений

$$\tilde n d\tilde\Gamma=(r+d)_\alpha\times(r+d)_\beta d\alpha d\beta=(1+\nu^2K)nd\Gamma+[(r_\alpha\times d)_\beta-(r_\beta\times d)_\alpha]d\alpha d\beta+$$

$$+\nu O(\|\nu_\alpha\|+\|\nu_\beta\|)d\Gamma-(r_\alpha\times d)d\alpha d\beta=\frac{\nu}{|r_\beta|^2}r_\beta d\Gamma,$$

$$(r_\beta\times d)d\alpha d\beta=\frac{\nu}{|r_\alpha|^2}r_\alpha d\Gamma$$

$$(\ )_\alpha=r_\alpha\cdot\nabla(\ ),\quad (\ )_\beta=r_\beta\cdot\nabla(\ )$$

где K – гауссова кривизна, и разложений вида

$$\Sigma_r(x+\nu n,\ \xi)=\Sigma_r(x,\ \xi)+\Sigma_r,\ _n(x,\ \xi)\nu(x)+O(\|\nu^2\|)$$

линеаризуем сингулярную часть оператора $\mathbf{S}$; аргументы и индекс r для краткости будем опускать. Получим

$$\int_{\tilde\Gamma} \tilde u\cdot\Sigma\cdot\tilde n d\tilde\Gamma \cong \int_\Gamma \hat u\cdot(\Sigma+\Sigma,_n \nu)\cdot(nd\Gamma+[(r_\alpha\times d)_\beta-(r_\beta\times d)_\alpha]d\alpha d\beta)\cong$$

$$\cong\int_\Gamma \hat u\cdot(\Sigma\cdot n+\nabla\Sigma\odot(nn+aa+bb)\nu)d\Gamma+$$

$$+\int_\Gamma \hat u\cdot[(\Sigma\cdot(r_\alpha\times d))_\beta-(\Sigma\cdot(r_\beta\times d))_\alpha]d\alpha d\beta=$$

$$=\int_\Gamma \hat u\cdot(\Sigma\cdot n+\nabla\cdot\Sigma\nu)d\Gamma-\int_\Gamma \hat u_\beta\cdot\Sigma\cdot(r_\alpha\times d)-\hat u_\alpha\cdot\Sigma\cdot(r_\beta\times d))d\alpha d\beta=$$

$$=\int_\Gamma \hat u\cdot\Sigma\cdot nd\Gamma+\int_\Gamma (-\rho\omega^2\hat u\cdot U+\hat u,_\alpha\cdot\Sigma\cdot a+\hat u,_b\cdot\Sigma\cdot b)\nu d\Gamma \qquad (9)$$

$$\hat u(x)=\tilde u(x+\nu(x)n(x))$$

Использовалась формула интегрирования по частям и уравнения движения $\nabla\cdot\Sigma=-\rho\omega^2 U,\ x\neq\xi$.

Для линеаризации регулярной части оператора **S** введем функцию $\hat p(x)=$ $=\tilde p(x+\nu(x)n(x))J(x)$. Будем иметь

$$\int_{\tilde\Gamma} \tilde p\cdot Ud\tilde\Gamma\cong\int_\Gamma \hat p\cdot Ud\Gamma+\int_\Gamma \hat p\cdot U,_n \nu d\Gamma \qquad (10)$$

Введем вариации граничных полей формулами

$$\delta u=\hat u-u,\quad \delta p=\hat p-p,\quad x\in\Gamma$$

Подставим (9) и (10) в (8). С точностью до малых высших порядков относительно величин (6) получим следующее линеаризованное интегральное представление:

$$\tilde u(\xi)-u(\xi)\cong \mathbf{S}[\delta u,\ \delta p,\ \Gamma,\ \xi]+\mathbf{L}[\nu,\ u,\ p,\ \Gamma,\ \xi]+\mathbf{L}[\nu,\ \delta u,\ \delta p,\ \Gamma,\ \xi] \qquad (11)$$

$$\xi\in\tilde V\cap V$$

$$\mathbf{L}=(\mathbf{L}_1,\ \mathbf{L}_2,\ \mathbf{L}_3),\quad \mathbf{L}_r(\nu,\ u,\ p,\ \Gamma,\ \xi]=\int_\Gamma G_r(x,\ \xi)\nu(x)d\Gamma_x$$

$$G_r=\rho\omega^2 u\cdot U_r+p\cdot U_r,_n-u,_a\cdot\Sigma_r\cdot a-u,_b\cdot\Sigma_r\cdot b$$

Из единственности решения краевой задачи (1)–(4) следует, что $\|\delta u\|\to 0$ и $\|\delta p\|\to 0$ при $\|\nu\|\to 0$. Будем пренебрегать последним слагаемым в правой части [11].

Рассмотрим область $\Delta\Gamma$ – окрестность $\partial(\tilde V\cap V)$. Зададим пару точек ξ и $\tilde\xi$ в системе координат, связанной с Γ,

$$\xi=x+\tau n(x),\quad \tilde\xi=x+(\tau+\nu(x))n(x),\quad \xi,\ \tilde\xi\in\Delta\Gamma$$

Отметим, что если $\xi\to x\in\ \Gamma$, то $\tilde\xi\to\tilde x\in\tilde\Gamma$, и наоборот. На этих точках определим функции

$$\hat u(\xi)=\tilde u(\tilde\xi(\xi))=\tilde u(\xi+\nu n),\quad \delta u(\xi)=\hat u(\xi)-u(\xi),\quad \xi\in\Delta\Gamma$$

Линеаризуем в $\Delta\Gamma$ левую часть (11) и перейдем к пределу при $\tau\to 0$. Получим

$$\delta u(y)-u,_n(y)\nu(y)\cong\lim_{\xi\to y}(\mathbf{S}[\delta u,\ \delta p,\ \Gamma,\ \xi]+\mathbf{L}[\nu,\ u,\ p,\ \Gamma,\ \xi]),\quad y\in\Gamma \qquad (12)$$

Используем понятие интеграла в смысле главного значения по Коши и представим пределы в правой части (12) через особые интегралы и их скачки. Для скачка выберем обозначение, подчеркивающее его зависимость от подынтегрального выражения вида $v(x)\cdot A(x, \xi)$:

$$\mathbf{M}_\gamma[v\cdot A,\ \Gamma,\ y],\quad y\in\Gamma$$

где γ – угол между направлением стремления (ξ, y) и n; v – удовлетворяет условиям Гёльдера.

Отметим следующее простое свойство скачков:

$$\mathbf{M}_\gamma[v\cdot A,{}_a,\ \Gamma,\ y],=-\mathbf{M}_\gamma[v,{}_a\cdot A,\ \Gamma,\ y] \tag{13}$$

и аналогично для b.

Скачки оператора Сомильяны, вызванные ядрами U_r и P_r, хорошо известны [6] и имеют вид

$$\mathbf{M}_\gamma[v\cdot U_r,\ \Gamma,\ y]=0,\quad \mathbf{M}_\gamma[-\ v\cdot P_r,\ \Gamma,\ y]=\tfrac{1}{2}\chi v_r(y) \tag{14}$$

$$\mathbf{M}_\gamma[\delta p\cdot U_r-\delta u\cdot P_r,\ \Gamma,\ y]=\tfrac{1}{2}\chi\delta u_r(y),\quad \chi=\operatorname{sgn}(\sin\gamma) \tag{15}$$

Для расчета скачков оператора $\mathbf{L}$ дадим другое представление ядра G_r. С использованием соотношений

$$(\Sigma_r\cdot\nabla u)\odot(aa+bb+nn)=\Sigma_r\odot\nabla u$$

$$(\sigma\cdot\nabla U_r)\odot(aa+bb+nn)=\sigma\odot\nabla U_r$$

и теоремы взаимности

$$\Sigma_r\odot\nabla u=\sigma\odot\nabla U_r$$

будем иметь

$$G_r=\rho\omega^2 u\cdot U_r+u,{}_n\cdot P_r-U_r,{}_a\cdot\sigma\cdot a-U_r,{}_b\cdot\sigma\cdot b$$

С использованием (13), (14) получим

$$\mathbf{M}_\gamma[G_r\nu,\ \Gamma,\ y]=-\tfrac{1}{2}\chi u_r,{}_n(y)\nu(y) \tag{16}$$

Заменим в (12) приближенное равенство на строгое и учтем (15) и (16). Будем иметь

$$\tfrac{1}{2}(\delta u(y)-u,{}_n(y)\nu(y))=\mathbf{S}[\delta u,\ \delta p,\ \Gamma,\ y]+\mathbf{L}[\nu,\ u,\ p,\ \Gamma,\ y],\quad y\in\Gamma \tag{17}$$

Восстановим верхний индекс m = 0, 1 в (17). В силу условий сопряжения (4) справедливы соответствующие условия сопряжения для вариации граничных полей на Γ^-:

$$\delta u^{(0)}=\delta u^{(1)},\quad \delta p^{(0)}=\delta p^{(1)},\quad x\in\Gamma^- \tag{18}$$

Используя (4) и (18), введем функции

$$u=u^{(0)}=u^{(1)},\quad p=p^{(0)}=p^{(1)},\quad x\in\Gamma^-$$

$$\delta u=\delta u^{(0)}=\delta u^{(1)},\quad \delta p=\delta p^{(0)}=\delta p^{(1)},\quad x\in\Gamma^-$$

С учетом введенных обозначений перепишем (17) в виде системы

$$\begin{gathered}\mathbf{S}^{(0)}[\delta u^{(0)},\ \delta p^{(0)},\ \Gamma^+,\ y]+\mathbf{L}^{(0)}[\nu,\ u^{(0)},\ p^{(0)},\ \Gamma^+,\ y]-\mathbf{S}^{(0)}[\delta u,\ \delta p,\ \Gamma^-,\ y]-\\ -\mathbf{L}^{(0)}[\nu,\ u,\ p,\ \Gamma^-,\ y]=\begin{cases}\tfrac{1}{2}(\delta u^{(0)}(y)-u,{}_n^{(0)}(y)\nu(y)), & y\in\Gamma^+\\ \tfrac{1}{2}(\delta u(y)-u,{}_n^{(0)}(y)\nu(y)), & y\in\Gamma^-\end{cases}\\ \mathbf{S}^{(1)}[\delta u,\ \delta p,\ \Gamma^-,\ y]+\mathbf{L}^{(1)}[\nu,\ u,\ p,\ \Gamma^-,\ y]=\tfrac{1}{2}(\delta u(y)-u,{}_n^{(1)}(y)\nu(y)),\quad y\in\Gamma^-\end{gathered} \tag{19}$$

В силу граничных условий (3) вариации граничных полей удовлетворяют граничным условиям на Γ^+

$$\delta u^{(0)} = 0, \quad x \in \Gamma_u^+; \quad \delta p^{(0)} = 0, \quad x \in \Gamma_p^+ \cup \Gamma^* \tag{20}$$

и можно ввести функцию δs на Γ^+

$$\delta s = \begin{cases} \delta p^{(0)}, & x \in \Gamma_u^+ \\ \delta u^{(0)}, & x \in \Gamma_p^+ \cup \Gamma^* \end{cases}$$

Полученная линеаризованная система граничных интегральных уравнений (ГИУ) (19) при учете (20) связывает вариации граничных полей δs, δu, δp с вариацией формы границ ν. Решая прямую задачу с заданными формами границ Γ^+ и Γ^-, можно задавать функцию ν и рассчитывать вариации граничных полей. В этом случае полученная система представляет собой три векторных комплексных линейных уравнения относительно трех векторных комплексных функций. Зная вариации граничных полей, можно рассчитывать разности полей смещений в любой внутренней точке тела по формуле (11).

Наибольший интерес специальные ГИУ (19) представляют при решении геометрических обратных задач (ГОЗ), когда требуется восстановить неизвестную граничную поверхность (или ее часть), которую обозначим $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Lambda} \subset (\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+)$, на основе информации о волновом поле на доступном для наблюдения участке T поверхности $\tilde{\Gamma}^+$. Таким образом, формулировка обратной краевой задачи требует дополнительного граничного условия

$$\tilde{u} = f, \quad x \in T \tag{21}$$

Если предположить наличие априорной информации об искомой поверхности $\tilde{\Lambda}$, выраженной в виде известной поверхности

$$\Lambda \subset (\Gamma^- \cup \Gamma^+)(\nu(x) = 0, \quad (\Gamma^- \cup \Gamma^+) \setminus \Lambda = (\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+) \setminus \tilde{\Lambda})$$

которая близка к искомой в смысле (6), то поиск вариации формы известной поверхности и составляет цель ГОЗ. Такую задачу будем называть линеаризованной ГОЗ. После решения прямой задачи с известной формой границ Γ^- и Γ^+ система специальных ГИУ (19) с использованием дополнительного граничного условия (21) представляет собой систему линейных интегральных уравнений относительно неизвестных вариаций граничных полей и вариации формы, т.е. решает линеаризованную ГОЗ.

Можно предложить подход к решению нелинейных ГОЗ, основанный на использовании априорной информации о форме искомой поверхности $\tilde{\Lambda}$, которая выражается заданием поверхности $\Lambda^{(0)}$ (необязательно близкой к искомой). Начиная с $\Lambda^{(0)}$, строится рекуррентная последовательность поверхностей $\Lambda^{(0)}, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \ldots$, которая "стягивается" к искомой форме поверхности, если $\Lambda^{(0)}$ выбрана удачно. Для перехода от $\Lambda^{(i)}$ к $\Lambda^{(i+1)}$ достаточно решать линеаризованную ГОЗ и использовать представление (7) [2].

Рассмотрим несколько частных примеров формулировок специальных ГИУ. Во всех случаях будем считать, что дополнительное граничное условие формулируется на свободном от напряжений участке границы тела ($T \subset \tilde{\Gamma}_p^+$).

Задача 1. Пусть упругая однородная среда занимает пространственно-односвязанный объем $\tilde{W}$ (дефект отсутствует). Требуется определить форму закрепленного участка границы $\tilde{\Gamma}^+ (\tilde{\Lambda} = \tilde{\Gamma}_u^+)$ на основе информации о волновом поле смещений на свободном от напряжений участке границы $T = \tilde{\Gamma}^+ (= \Gamma^+)$.

Воспользуемся верхним уравнением в (19) и, опуская верхний индекс $m = 0$, получим

$$\int\limits_{\Lambda(=\Gamma_u^+)} (\delta p(x)\cdot U_r(x,\ y)+\nu(x)p(x)\cdot U_{r,\ n}(x,\ y))d\Lambda -$$

$$-\int\limits_{\Gamma^*} \delta u(x)\cdot P_r(x,\ y)d\Gamma^* = \int\limits_{T(=\Gamma_p^+)} (f(x)-u(x))\cdot P_r(x,\ y)d\Gamma_p^+ +$$

$$+\begin{cases} -\tfrac{1}{2}u_{r,\ n}(y)\nu(y), & y\in\Gamma_u^+,\\ \tfrac{1}{2}\delta u_r(y), & y\in\Gamma^*\\ \tfrac{1}{2}(f_r(y)-u_r(y)), & y\in\Gamma_p^+\end{cases} \tag{22}$$

Задача 2. Пусть, как и в предыдущей задаче, дефект отсутствует. Требуется определить часть свободного от напряжений участка границы $\tilde{\Gamma}^+(\tilde{\Lambda}\subset\tilde{\Gamma}_p^+)$ на основе информации о волновом поле смещений на известной части свободной поверхности $T=\tilde{\Gamma}_p^+\setminus\tilde{\Lambda}(=\Gamma_p^+\setminus\Lambda)$.

Воспользуемся верхним уравнением в (19) и, опуская верхний индекс $m = 0$, получим

$$\int\limits_{\Lambda(\subset\Gamma_p^+)} (\delta u(x)\cdot P_r(x,\ y)+\nu(x)G_r(x,\ y)|_{p=0})d\Lambda -$$

$$-\int\limits_{\Gamma^*} \delta u(x)\cdot P_r(x,\ y)d\Gamma^* + \int\limits_{\Gamma_u^+} \delta p(x)\cdot U_r(x,\ y)d\Gamma_a^+ =$$

$$= \int\limits_{T(=\Gamma_p^+\setminus\Lambda)} (f(x)-u(x))\cdot P_r(x,\ y)d\Gamma_p^+ +$$

$$+\begin{cases} 0, & y\in\Gamma_u^+\\ \tfrac{1}{2}\delta u_r(y), & y\in\Gamma^*\\ \tfrac{1}{2}(\delta u_r(y)-u_{r,\ n}(y)\nu(y)) & y\in\Lambda\\ \tfrac{1}{2}(f_r(y)-u_r(y)), & y\in\Gamma_p^+\setminus\Lambda\end{cases} \tag{23}$$

Уравнения (22), (23) можно упростить, если избавиться от дополнительных неизвестных путем специального выбора фундаментальных решений (ФР). Будем считать, что ФР удовлетворяют уравнению (5) в W и следующим граничным условиям:

$$U_r=0,\quad x\in\Gamma_u^+;\quad P_r=0,\quad x\in\Gamma_p^+\cup\Gamma^* \tag{24}$$

Так как специальные ФР в W отличаются от ФР в $\mathbf{R}^3$ (5) на регулярную в W функцию, то они сохраняют предельные свойства последних и (22) примет вид

$$\int\limits_{\Lambda(=\Gamma_u^+)} \nu(x)u_{,\ n}(x)\cdot P_r(x,\ y)d\Lambda = \begin{cases} -\tfrac{1}{2}u_{r,\ n}(y)\nu(y), & y\in\Gamma_u^+\\ f_r(y)-u_r(y), & y\in\Gamma_p^+\end{cases}$$

Отметим, что в данном случае $p\cdot U_{r,\ n}=u_{,\ n}\cdot P_r$. С использованием специальных ФР (24) систему (23) преобразуем в следующую систему:

$$\int\limits_{\Lambda(\subset\Gamma_p^+)} \nu(x)G_r(x,\ y)\big|_{p=0}d\Lambda = \begin{cases} 0, & y\in\Gamma_u^+\\ f_r(y)-u_r(y), & y\in\Gamma_p^+\setminus\Lambda\end{cases}$$

Построение специальных ФР, удовлетворяющих граничным условиям (24), представляет собой самостоятельную проблему, для решения которой необходимо формулировать соответствующие ГИУ. Более того, в результате итерационной процедуры последовательных приближений $\Lambda^{(i)}$ изменяются, что влечет за собой перерасчет специальных ФР на каждой итерации. Целесообразен компромиссный вариант: от ФР потребовать выполнения граничных условий только на известной части границы $\tilde{\Gamma}^+ \setminus \tilde{\Lambda}$.

Задача 3. Требуется реконструировать форму упругого включения $\tilde{\Gamma}^-$ в упругом теле $\tilde{W}$ на основе информации о волновом поле смещений на свободном от напряжений участке поверхности $\Gamma^+(T \subset \Gamma_p^+)$. Будем использовать компромиссный вариант выбора ФР, когда $U_r^{(0)}$ удовлетворяют граничным условиям только на известной внешней границе Γ^+, т.е. (24).

В данном случае система (19) примет вид

$$-\mathbf{S}^{(0)}[\delta u,\ \delta p,\ \Gamma^-,\ y] - \mathbf{L}^{(0)}[\nu,\ u,\ p,\ \Gamma^-,\ y] = \begin{cases} 0, & y \in \Gamma_u^+ \\ f(y) - u(y), & y \in T \end{cases} \tag{25}$$

$$-\mathbf{S}^{(m)}[\delta u,\ \delta p,\ \Gamma^-,\ y] - \mathbf{L}^{(m)}[\nu,\ u,\ p,\ \Gamma^-,\ y] =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\delta u(y) - u,{}_n^{(m)}(y)\nu(y)), \quad y \in \Gamma^-, \quad m = 0,\ 1$$

Отметим, что в случае абсолютно жесткого включения или полости в системе (25) достаточно, соответственно, u и δu или p и δp положить равными нулю; при этом нижнее уравнение в (25) при $m = 1$ использовать нет необходимости.

Замечания. 1°. Полученные линеаризованные ГИУ сохраняют сингулярный порядок особенностей, присущий обычным ГИУ.

2°. Решение приведенных выше систем представляет собой некорректную задачу. Наряду с этими уравнениями можно рассматривать аналогичные, но составленные для разных частот ω и разных положений внешней нагрузки Γ^*. При этом неизвестные вариации граничных полей будут изменяться, а вариация формы остается постоянной. Подобная переопределенность является благоприятным фактором при решении некорректных задач.

3°. Переформулировка полученных уравнений для упругих сред на акустические приводит к существенным упрощениям. С точностью до физического смысла волновых полей оператор Сомильяны переходит в оператор Гельмгольца–Кирхгофа, а ядро G оператора $\mathbf{L}$ принимает вид

$$G = k^2 uU + u,{}_n U,{}_n - u,{}_a U,{}_a - u,{}_b U,{}_b$$

где k – волновое число, U – соответствующий акустический потенциал. Полость соответствует акустически жесткой поверхности, а абсолютно жесткое включение – акустически мягкой поверхности.

4°. Изложенная техника построения специальных ГИУ распространяется на случай, когда объем W полуограничен. В частности, была рассмотрена [4, 5] антиплоская задача для упругого полупространства с цилиндрическим включением; полученные ранее специальные ГИУ (для реконструкции формы сечения границы включения) являются частным случаем уравнений (25). При этом специальные ФР, удовлетворяющие граничному условию на границе полупространства, имеют аналитическое представление через функции Ганкеля. Были представлены [4, 5] результаты численных экспериментов, демонстрирующие работоспособность предлагаемого метода решения ГОЗ.

Автор благодарит А.О. Ватульяна за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00240а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kane J.H., Mao S., Everstine G.C.* A boundary element formulation for acoustic shape sensitivity analysis // J. Acoust. Soc. Amer. 1991. 90. № 1. P. 561–573.
2. *Tanaka M., Nakamura M., Yamagiwa K.* Application of boundary element method for elastodynamics to defect shape identification // Math. Comput. Modeling. 1991. 15, № 3–5. P. 295–302.
3. *Ватульян А.О., Гусева И.А.* О восстановлении формы полости в ортотропной полуплоскости по заданному на границе волновому полю // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 149–152.
4. *Ватульян А.О., Коренский С.А.* Метод линеаризации в обратной задаче рассеяния для среды со свободной границей // Акуст. ж. 1995. Т. 41. № 3. С. 395–398.
5. *Ватульян А.О., Коренский С.А.* О восстановлении формы приповерхностного дефекта в полупространстве // Докл. РАН. 1995. 344. № 6. С. 753–755.
6. *Бурчуладзе Т.В., Гегелиа Т.Г.* Развитие метода потенциала в теории упругости. Тбилиси: Мецниереба. 1985. 226 с.
7. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* Метод граничных элементов в механике деформированного твердого тела. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 295 с.
8. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
9. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
18.XI.1996