

УДК 539.3

© 1998 г. А.О. Ватульян, В.М. Шамшин

НОВЫЙ ВАРИАНТ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ДИНАМИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предлагается вариант граничных интегральных уравнений (ГИУ) первого рода в динамических задачах теории упругости, основанных не на фундаментальных решениях, а на исследовании аналитических свойств трансформант Фурье вектора перемещения. Построена система трех ГИУ первого рода с фредгольмовыми ядрами, проведено исследование эквивалентности исходной краевой задачи о колебаниях ограниченной области и полученной системы ГИУ. Предложен вариант численной реализации, сочетающий идеи классического метода граничных элементов и метода регуляризации А.Н. Тихонова. Приведены результаты численных экспериментов.

При исследовании динамических задач теории упругости классический вариант метода ГИУ, основанный на знании фундаментальных решений [1, 2], позволяет получить решение внутри области при помощи интегральных операторов Сомильяны, ядра которых выражаются через фундаментальную матрицу Купрадзе и имеют особенности. В ряде случаев (в задачах анизотропной теории упругости, в осесимметричных задачах изотропной теории упругости и задачах электроупругости) фундаментальные решения не могут быть выражены в явном виде. Были построены [3, 4] интегральные представления фундаментальных решений для плоских задач анизотропной теории упругости, однако для их дальнейшего практического применения (реализации варианта метода граничных элементов) требуется вычисление многократных интегралов при формировании соответствующих алгебраических систем. Была предложена [5] альтернативная формулировка ГИУ первого рода в динамических задачах анизотропной теории упругости, не требующая знания фундаментальных решений и опирающаяся лишь на анализ характеристического многочлена оператора теории упругости, в предположении, что характеристические поверхности не пересекаются. К сожалению, в изотропной теории упругости две из характеристических поверхностей совпадают, и предлагаемый подход требует более тщательного исследования. Отметим, что идеи, связанные с исследованием аналитичности преобразования Фурье и формулировкой ГИУ, по-видимому, впервые, были изложены [6] при получении ГИУ первого рода в задаче о колебаниях полупространства с неровной границей.

1. Формулировка ГИУ первого рода в пространственных динамических задачах изотропной теории упругости. Рассмотрим установившиеся колебания упругого тела, занимающего односвязную область $V \subset \mathbb{R}^3$, звездную относительно некоторого шара, с кусочно-гладкой границей S . Уравнения установившихся колебаний изотропного упругого тела плотности ρ с частотой ω , имеют вид [7]

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещений, \mathbf{T} – тензор напряжений Коши, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – линейный тензор деформаций:

$$\mathbf{T} = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon} \right], \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (1.2)$$

Будем считать, что заданы следующие граничные условия:

$$\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{t}_n|_{S_\sigma} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{t}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}, \quad S = S_u \cup S_\sigma \quad (1.3)$$

Построим систему ГИУ первого рода на основе идей, изложенных ранее [5]. Будем считать, что краевая задача (1.1)–(1.3) имеет при достаточно гладких вектор-функциях \mathbf{f} и \mathbf{g} решение $\mathbf{u} \in W_2^1(V)$. Проведем интегральное преобразование Фурье уравнения (1.1) с параметром $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, для этого умножим уравнение (1.1) на $e^{i\alpha \cdot \mathbf{x}}$ и проинтегрируем его по области V . Преобразуя объемные интегралы в поверхностные на основании теоремы Гаусса–Остроградского, получим

$$\beta \alpha \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \tau \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{v}(\alpha), \quad \beta = \frac{\mu}{1 - 2\nu}, \quad \tau = (\mu \alpha \cdot \alpha - \rho \omega^2) \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{v}(\alpha) = \int_S \mathbf{t}_n e^{i\alpha \cdot \mathbf{x}} dS - 2\beta \nu i \alpha \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} e^{i\alpha \cdot \mathbf{x}} dS - \mu i \alpha \cdot \int_S (\mathbf{n} \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{n}) e^{i\alpha \cdot \mathbf{x}} dS \quad (1.5)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \int_V \mathbf{u} e^{i\alpha \cdot \mathbf{x}} dV$$

\mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности S . Разрешая соотношение (1.4) относительно компонент вектора $\tilde{\mathbf{u}}$, получим

$$\tilde{\mathbf{u}} = \Delta^{-1} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}, \quad \Delta = \tau(\tau + \beta \alpha^2), \quad \mathbf{R} = \left\| r_{mn} \right\| \quad (1.6)$$

$$r_{mm} = \tau + (\alpha^2 - \alpha_m^2), \quad r_{mn} = -\beta \alpha_m \alpha_n, \quad n \neq m$$

Известно, что преобразование Фурье вектор-функции $\mathbf{u} \in W_2^1(V)$, где V – односвязная область, звездная относительно некоторого шара, есть целая функция экспоненциального типа [8] в силу оценки

$$|\tilde{\mathbf{u}}(\alpha)| \leq C \exp \left[\max_{\mathbf{x} \in V} |\mathbf{x}| \cdot |\operatorname{Im} \alpha| \right]$$

Однако в силу представления (1.6) главная часть ряда Лорана вектор-функции $\tilde{\mathbf{u}}$ не равна нулю тождественно, поскольку компоненты $\tilde{\mathbf{u}}$ имеют простые полюса в нулях Δ , т.е. когда годограф вектора α лежит на сферах

$$\alpha = k_1 \eta \quad \text{и} \quad \alpha = k_2 \eta \quad (1.7)$$

где

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\eta = (\cos \theta \cos \psi, \cos \theta \sin \psi, \sin \theta), \quad |\eta| = 1, \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

c_1, c_2 – скорости распространения продольных и поперечных волн.

Для устранения возникающего противоречия необходимо потребовать обращения в нуль коэффициентов главной части ряда Лорана, т.е. вычетов на этих сферах. Поскольку полюса простые, то достаточно потребовать обращения в нуль $\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$ в случае, когда α принимает значения (1.7).

Пусть $\alpha = k_1 \eta$, тогда исходя из соотношения (1.6) получим линейную систему уравнений относительно компонент вектора \mathbf{v} , откуда находим первое разрешающее уравнение, связывающее между собой компоненты векторов напряжения и переме-

щения на границе области

$$\eta_1 \nu_1(k_1 \eta) + \eta_2 \nu_2(k_1 \eta) + \eta_3 \nu_3(k_1 \eta) = 0 \quad (1.8)$$

Пусть теперь $\alpha = k_2 \eta$, тогда аналогично предыдущему находим второе и третье разрешающие уравнения

$$\eta_3 \nu_1(k_2 \eta) - \eta_1 \nu_3(k_2 \eta) = 0, \quad \eta_3 \nu_2(k_2 \eta) - \eta_2 \nu_3(k_2 \eta) = 0 \quad (1.9)$$

Итак, задача (1.1)–(1.3) сводится к решению системы, разрешающих соотношений (1.8), (1.9), которую можно записать в виде

$$\int_S \mathbf{K}^\sigma(\mathbf{x}, \eta) \cdot \mathbf{t}_n(\mathbf{x}) dS + \int_S \mathbf{K}^u(\mathbf{x}, \eta) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS = 0 \quad (1.10)$$

$$\mathbf{K}^u = \mu i s \cdot \begin{vmatrix} An_1 + B\eta_1 & An_2 + B\eta_2 & An_3 + B\eta_3 \\ D\eta_1 - B\eta_3 & D\eta_2 & B\eta_1 + D\eta_3 \\ C\eta_1 & B\eta_3 + C\eta_2 & C\eta_3 - B\eta_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{K}^\sigma = \mathbf{e} \cdot \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ 0 & -\eta_3 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

$$s = \text{diag}(-2k_1 e_1, k_2 e_2, k_2 e_2), \quad \mathbf{e} = \text{diag}(e_1, e_2, e_2), \quad e_j = \exp[ik_j \eta \cdot \mathbf{x}]$$

$$A = \frac{\nu}{1 - 2\nu}, \quad B = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad C = \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{n}, \quad D = \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{n}$$

Учитывая граничные условия (1.3), получим, что исходная задача сводится к системе интегральных уравнений первого рода с фредгольмовыми ядрами $\mathbf{K}^\sigma(\mathbf{x}, \eta)$, $\mathbf{K}^u(\mathbf{x}, \eta)$, определенными на декартовом произведении $S \times S_1$ (S_1 – единичная сфера $|\eta| = 1$):

$$\int_{S_u} \mathbf{K}^\sigma(\mathbf{x}, \eta) \cdot \mathbf{t}_n(\mathbf{x}) dS + \int_{S_\sigma} \mathbf{K}^u(\mathbf{x}, \eta) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS = \mathbf{F}(\eta), \quad |\eta| = 1 \quad (1.11)$$

где

$$-\mathbf{F}(\eta) = \int_{S_\sigma} \mathbf{K}^\sigma(\mathbf{x}, \eta) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) dS + \int_{S_u} \mathbf{K}^u(\mathbf{x}, \eta) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS$$

Соотношения (1.11) представляют собой систему ГИУ, которые связывают неизвестные компоненты вектора напряжения $\mathbf{t}_n|_{S_u}$ и вектора перемещения $\mathbf{u}|_{S_\sigma}$.

Отметим, что ядра $\mathbf{K}^\sigma(\mathbf{x}, \eta)$, $\mathbf{K}^u(\mathbf{x}, \eta)$ бесконечно дифференцируемы по переменным η_j ($j = 1, 2, 3$), а если поверхность S – ляпуновская, т.е. поверхность класса $C^{(1, \zeta)}$, то

$$\mathbf{K}^u(\mathbf{x}, \eta) \in C^{(0, \zeta)}(S) \times C^\infty(S_1), \quad \mathbf{K}^\sigma(\mathbf{x}, \eta) \in C^\infty(S) \times C^\infty(S_1), \quad 0 < \zeta < 1$$

Известно, что процедура обращения операторов Фредгольма первого рода, вообще говоря, является некорректной задачей, в силу неограниченности обратного оператора к (1.11) [9]. Такая ситуация типична для операторов Фредгольма первого рода при произвольной правой части $\mathbf{F}(\eta)$ из некоторого класса функций. Однако в конкретном случае $\mathbf{F}(\eta)$ имеет, согласно (1.11), весьма специфический вид, и это обстоятельство позволяет судить об ограниченности обратного оператора, опираясь на разрешимость исходной задачи в $W_2^1(V)$ и теорему эквивалентности.

Теорема. Пусть $V \subset \mathbf{R}^3$ – односвязная область с кусочно-гладкой границей S , тогда

краевая задача (1.1)–(1.3) эквивалентна задаче о нахождении граничных значений $\mathbf{t}_n|_{S_u}$, $\mathbf{u}|_{S_\sigma}$ из интегральных уравнений (1.11).

Доказательство. Отметим, что система ГИУ (1.11) является следствием краевой задачи (1.1)–(1.3) по построению. Покажем, что если $\mathbf{u}|_{S_\sigma}$ и $\mathbf{t}_n|_{S_u}$ – решение системы (1.11), то их можно продолжить внутрь области V , причем внутри V будут выполняться уравнения движения (1.1) и закон Гука (1.2).

Пусть вектор-функции \mathbf{u} и \mathbf{t}_n – решение ГИУ (1.11). Введем целую вектор-функцию \mathbf{v} согласно (1.5) и вектор-функцию $\tilde{\mathbf{u}}(\alpha)$ согласно (1.6). В силу системы ГИУ (1.11) $\tilde{\mathbf{u}}(\alpha)$ – целые функции экспоненциального типа, и в силу теоремы Пэли–Винера [10] представляют собой преобразование Фурье с носителем в V . Можно убедиться, что вектор-функция

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \tilde{\mathbf{u}}(\alpha) e^{-i\alpha \cdot \mathbf{x}} d\alpha \quad (1.12)$$

удовлетворяет уравнениям (1.1), (1.2) по построению, причем выполнено (1.6). Отметим, что элементы матрицы \mathbf{R} обладают свойством $\mathbf{R}(t\alpha, t\omega) = t^2 \mathbf{R}(\alpha, \omega)$. Покажем, что для вектор-функции, определенной в соответствии с (1.12), (1.6), будут выполнены и граничные условия (1.3).

Действительно, пусть $y \in S_u$ – регулярная точка границы. Докажем, что

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow y \in S_u} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(y)$$

Для этого рассмотрим шар $V_\varepsilon(y)$ с центром в точке y радиуса $\varepsilon > 0$. Введем в рассмотрение область $V_{1\varepsilon} = V \cup V_\varepsilon(y)$, ее границу обозначим $S_{1\varepsilon}$ и запишем равенства (1.5) для $S_{1\varepsilon}$. Тогда

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow y \in S_u} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}_\varepsilon(y)$$

причем $\mathbf{u}_\varepsilon(y)$ определяется согласно (1.12), (1.6), но вместо $\mathbf{v}(\alpha)$ необходимо брать $\mathbf{v}_\varepsilon(\alpha)$. Интеграл по $S_{1\varepsilon}$ представим в виде суммы двух интегралов по S_ε и по $S_\varepsilon^+(y)$, где S_ε – часть поверхности S , лежащей вне шара $V_\varepsilon(y)$, а $S_\varepsilon^+(y)$ – часть сферы, ограничивающей $V_\varepsilon(y)$, лежащая вне V .

Первый интеграл в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ дает интеграл в смысле главного значения по Коши $\mathbf{T}(y)$. Во втором произведем замены переменных

$$\mathbf{x} - y = \varepsilon \boldsymbol{\eta}, \quad \alpha = \varepsilon^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \quad |\boldsymbol{\eta}| = 1$$

Далее учтем, что

$$\Delta(\varepsilon^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \omega) = \varepsilon^{-4} [\mu^2 |\boldsymbol{\gamma}|^4 + o(\varepsilon^2)], \quad \mathbf{R}(\varepsilon^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \omega) = \varepsilon^{-2} [\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\gamma}) + o(\varepsilon^2)], \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.13)$$

$\mathbf{u}(y + \varepsilon \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{u}(y) + o(\varepsilon)$, причем $\mathbf{R}_0(t\boldsymbol{\gamma}) = t^2 \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\gamma})$. Вычисляя интеграл по $S_\varepsilon^+(y)$ и учитывая, что на этой поверхности $\mathbf{n} = \boldsymbol{\eta}$, находим

$$\mathbf{u}(y) = \mathbf{T}(y) + \mathbf{f}(y)/2 \quad (1.14)$$

Продельвая аналогичные построения для случая $\mathbf{x} \notin V$, получим

$$0 = \mathbf{T}(y) - \mathbf{f}(y)/2 \quad (1.15)$$

Таким образом, в силу (1.14), (1.15) первое из предельных соотношений (1.3) доказано.

Для доказательства второго предельного соотношения найдем в соответствии с (1.2) вектор напряжения $\mathbf{t}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$, учитывая (1.12). Тогда

$$\tilde{t}^{(n)}(\alpha) = \Delta^{-1}(\alpha, \omega) \mathbf{Q}(\alpha, \omega, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}(\alpha)$$

элементы матрицы $\mathbf{Q}(\alpha, \omega, \mathbf{n})$ линейным образом зависят от \mathbf{n} и обладают свойством

$$\mathbf{Q}(t\alpha, t\omega, \mathbf{n}) = t^3 \mathbf{Q}(\alpha, \omega, \mathbf{n}), \quad t > 0$$

Пусть $y \in S_\sigma$. Процедура доказательства предельного соотношения в целом повторяет предыдущие построения с учетом того, что

$$\mathbf{Q}(\varepsilon^{-1}\gamma, \omega, \mathbf{n}) = \varepsilon^{-3}[\mathbf{Q}_0(\gamma)\mathbf{n} + o(\varepsilon^2)], \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(единственное отличие от вышеприведенного случая состоит в том, что предел интеграла по S_ε понимается в смысле конечного значения по Адамару.)

Замечания. 1° Эти уравнения удобно использовать вместо классических, когда требуется определить только граничные значения неизвестных, т.е., например, при нахождении контактных напряжений, либо при определении поля смещений на свободной от напряжений части поверхности. Кроме того, эти уравнения можно использовать и в случае, когда на одной части поверхности известны и смещения и вектор напряжения, а на другой части граничные условия неизвестны. Тогда эта система ГИУ позволяет определить и неизвестные граничные условия, если использовать метод квазирешений [11].

2° В случае $\omega = 0$ система ГИУ (1.11) служит условием разрешимости соответствующей статической задачи теории упругости.

2. Аксиально-симметричная деформация тела вращения. В случае аксиально-симметричной деформации тела вращения в системе (1.8), (1.9) можно положить $\eta_2 = 0$ и, переходя к полярной системе координат, проинтегрировать по координате φ . Тогда ядра интегральных уравнений (1.11) выражаются через функции Бесселя, а интегрирование ведется по образующей тела вращения L .

Пусть область V , занимаемая телом вращения, задается уравнением

$$r = \Phi(z), \quad a \leq z \leq b, \quad S = L \times [0; 2\pi)$$

Тогда вектор внешней нормали имеет вид

$$\mathbf{n} = n_r \mathbf{e}_r + n_z \mathbf{e}_z, \quad n_r = \frac{1}{\sqrt{1+(\Phi')^2}}, \quad n_z = \frac{-\Phi'}{\sqrt{1+(\Phi')^2}}$$

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z$ – векторы базиса в полярной системе координат. После интегрирования по координате φ от 0 до 2π . ГИУ (1.11) принимает вид

$$\int_{L_u} \mathbf{K}^\sigma(r, z, \eta_1, \eta_3) \cdot \mathbf{t}_n(r, z) dL + \int_{L_\sigma} \mathbf{K}^u(r, z, \eta_1, \eta_3) \cdot \mathbf{u}(r, z) dL = \mathbf{F}(r, z) \quad (2.1)$$

где

$$-\mathbf{F}(r, z) = \int_{L_\sigma} \mathbf{K}^\sigma(r, z, \eta_1, \eta_3) \cdot \mathbf{g}(r, z) dL + \int_{L_u} \mathbf{K}^u(r, z, \eta_1, \eta_3) \cdot \mathbf{f}(r, z) dL$$

$$L = L_u \cup L_\sigma, \quad \eta_1^2 + \eta_3^2 = 1$$

Здесь L_u – образующая поверхности S_u , а L_σ – образующая поверхности S_σ . Ядра ГИУ (1.11) в осесимметричном случае выражаются следующими формулами:

$$\mathbf{K}^u = \mu \begin{vmatrix} A_1(G_{01} - G_{21}) + A_2 G_{11} & 0 & A_3 G_{01} + A_4 G_{11} \\ B_1(G_{02} - G_{22}) + B_2 G_{02} & 0 & B_4 G_{12} + B_5 G_{02} \\ 0 & C_1 G_{22} + C_2 G_{12} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{K}^\sigma = \begin{vmatrix} i\eta_i G_{11} & 0 & \eta_3 G_{01} \\ i\eta_3 G_{12} & 0 & -\eta_1 G_{02} \\ 0 & i\eta_3 G_{12} & 0 \end{vmatrix}$$

$$G_{ij} = J_i(k_j \eta_1 r), \quad i = 0, 1, 2; \quad j = 1, 2$$

$$A_1 = ik_1 n_r (A + \eta_1^2), \quad A_2 = 2k_1 \eta_1 \eta_3 n_z, \quad A_3 = 2ik_1 n_z (A + \eta_3^2)$$

$$A_4 = 2k_1\eta_1\eta_3n_r, \quad B_1 = -ik_2\eta_3n_r, \quad B_2 = k_2n_z(\eta_3^2 - k_2\mu\eta_1^2)$$

$$B_4 = k_2n_r(\eta_3^2 - \eta_1^2), \quad B_5 = -2k_2\eta_1\eta_3n_z, \quad C_1 = ik_2\eta_1\eta_3n_r, \quad C_2 = k_2\eta_3^2n_z$$

В качестве неизвестных здесь служат векторы

$$\mathbf{t}_n(r, z)|_{S_u} = t_r\mathbf{e}_r + t_\varphi\mathbf{e}_\varphi + t_z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{u}(r, z)|_{S_\sigma} = u_r\mathbf{e}_r + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi + u_z\mathbf{e}_z$$

Отметим, что в случае, когда вектор-функции $\mathbf{g}(r, z)$ и $\mathbf{f}(r, z)$ имеют специальный вид, исходная осесимметричная задача допускает разделение на задачу о продольных колебаниях тела вращения $\mathbf{u} = u_r(r, z)\mathbf{e}_r + u_z(r, z)\mathbf{e}_z$ и крутильных колебаниях $\mathbf{u} = u_\varphi(r, z)\mathbf{e}_\varphi$.

3. Задача кручения. Рассмотрим аксиально-симметричную задачу об установившихся крутильных колебаниях изотропного упругого бруса с переменным поперечным сечением и осью симметрии, совпадающей с осью z . Будем полагать, что

$$\mathbf{f} = f(r, z)\mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{g} = g(r, z)\mathbf{e}_\varphi$$

и искать решение в виде

$$\mathbf{u}(r, z) = u_\varphi(r, z)\mathbf{e}_\varphi$$

Рассматриваемая задача – частный случай задачи, рассмотренной в разд. 2. Отличие задачи кручения от общего случая состоит в том, что в аксиально-симметричной задаче о кручении бруса структура тензора напряжения Коши и структура вектора перемещения таковы, что первые два уравнения системы ГИУ (2.1) удовлетворяются тождественно. Таким образом, задача кручения сводится к ГИУ

$$\int_{L_u} \mathbf{K}^\sigma(r, z, \eta_1, \eta_3) \cdot \mathbf{t}_n(r, z) dL + \int_{L_\sigma} \mathbf{K}^u(r, z, \eta_1, \eta_3) \cdot \mathbf{u}(r, z) dL = \mathbf{F}(r, z) \quad (3.1)$$

где

$$-\mathbf{F}(r, z) = \int_{L_\sigma} \mathbf{K}^\sigma(r, z, \eta_1, \eta_3) \cdot \mathbf{g}(r, z) dL + \int_{L_u} \mathbf{K}^u(r, z, \eta_1, \eta_3) \cdot \mathbf{f}(r, z) dL$$

$$\eta_1^2 + \eta_3^2 = 1, \quad \mathbf{K}^\sigma = i\eta_3 G_{12} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{K}^u = (C_1 G_{22} + C_2 G_{12}) \mathbf{e}_\varphi$$

4. Дискретизация задачи в осесимметричном случае. Для решения системы ГИУ, полученной в разд. 3, будем применять идеи классического метода ГИУ [12]. Для этого разобьем поверхность S на элементы S_q , каждый из которых представляет собой часть поверхности вращения, заключенную между двумя параллельными плоскостями, проходящими перпендикулярно оси симметрии тела вращения. Согласно методу граничных элементов перемещения и усилия задаются в форме кусочно-интерполирующих функций (в простейшем случае считаются постоянными) на каждом из элементов S_q .

Рассмотрим задачу кручения и соответствующее ГИУ (3.1). Введем разбиения

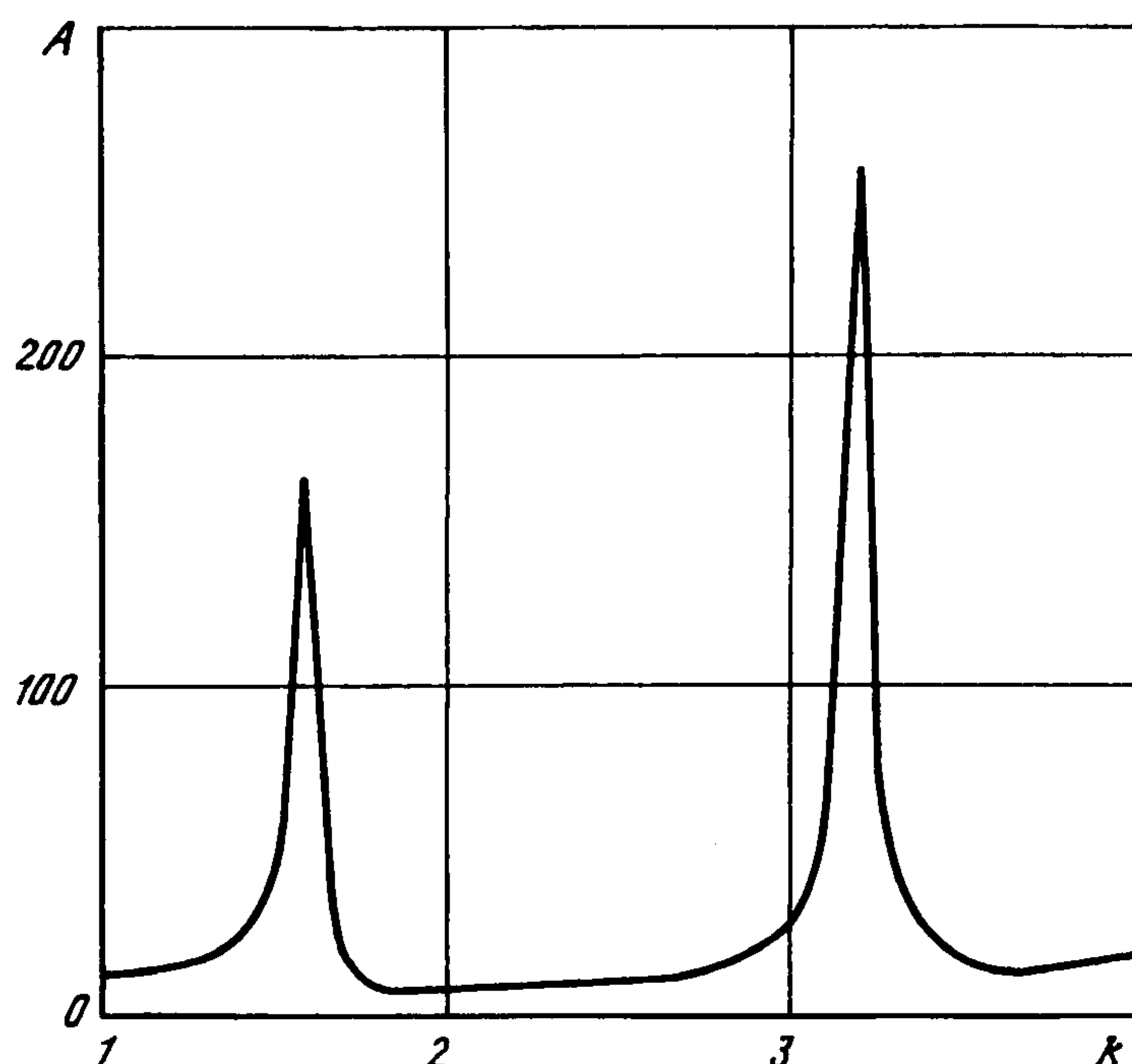
$$L_u = \sum_{q=1}^N L_{uq}, \quad L_\sigma = \sum_{q=1}^M L_{\sigma q} \quad (4.1)$$

Примем кусочно-постоянную аппроксимацию искомых функций на каждом элементе. Введем обозначения

$$t_{n\varphi}|_{L_{uq}} = X_q, \quad q = 1, \dots, N; \quad u_\varphi|_{L_{\sigma q}} = Y_q, \quad q = 1, \dots, M \quad (4.2)$$

Пусть $\{\eta_p\}_{p=1}^P$ – некоторый набор точек коллокации $|\eta_p| = 1$ (всюду далее $p = 1, \dots, P$).

Потребуем, чтобы ГИУ (3.1) выполнялось, когда η пробегает набор точек кол-



локации. Учитывая разбиения (4.1) и аппроксимацию (4.2), получим

$$\sum_{q=1}^N A_{pq} X_q + \sum_{q=1}^M B_{pq} Y_q = F_p \quad (4.3)$$

$$A_{pq} = \int_{L_{uq}} K_3^\sigma(\eta_p) dL, \quad q = 1, \dots, N; \quad B_{pq} = \int_{L_{\sigma q}} K_3^u(\eta_p) dL, \quad q = 1, \dots, M$$

$$-F_p = \sum_{q=1}^N f_q A_{pq} + \sum_{q=1}^M g_q B_{pq}$$

где f_q, g_q – осредненные значения функций f, g на элементах $L_{uq}, L_{\sigma q}$.

Для расчета F_p можно использовать и квадратурные формулы Гаусса, однако именно такой способ расчета F_p через узловые значения f_q, g_q позволяет получить дискретный оператор, у которого порядки погрешностей аппроксимаций левой и правой частей одинаковы. Это существенно при обращении вполне непрерывного оператора [9].

Итак, система (4.3) – дискретный аналог ГИУ (3.1)

5. Численный пример. В качестве примера рассмотрим задачу об установившихся крутильных колебаниях изотропного упругого цилиндрического бруса высоты $2l$, радиуса a . Пусть нижнее основание бруса жестко закреплено $z = -l$, а на верхнем основании $z = l$ заданы перемещения $u = r\theta_\varphi$, боковая поверхность свободна от напряжений $t_n = 0$. Дискретный аналог ГИУ для данной задачи кручения представлен в разделе 4. Проведенные численные эксперименты показали, что для получения максимально эффективных результатов необходимо разделять мнимую и вещественную части из уравнения (4.3), а затем потребовать выполнения каждой из этих систем, например, при $0 \leq \psi \leq \pi$ и $\pi < \psi < 2\pi$, сформировав при этом квадратную матрицу из уравнений этих систем. Такой алгоритм формирования системы позволяет избежать линейной зависимости уравнений, которая возникает при использовании только вещественной или только мнимой частей системы, когда $0 \leq \psi \leq 2\pi$.

Однако матрица дискретного оператора (4.3) плохо обусловлена, это прямое следствие того, что процедура обращения вполне непрерывного оператора некорректна. Поэтому для нахождения искомого граничного значения из уравнения (4.3) необходимо использовать специальные алгоритмы, например, метод Тихонова или используемый в этой работе алгоритм Пейджа–Саундерса [13]. Полученное решение отклоняется от точного менее чем на 1% уже при $M + N = 30$.

Для определения резонансных частот введем амплитудную функцию $A = \max_q |X_q|$, которая принимает максимальное значение из всех значений искомого неизвестного, найденных на

границе. В окрестности резонансных частот наблюдается существенный рост амплитудной функции. График амплитудной функции в окрестности первой и второй резонансных частот при $l/a = 1$ представлен на фигуре.

В таблице приводятся точные k^* и рассчитанные k частоты при $l/a = 1$. Отметим, что при $M + N = 30$ у первых четырех резонансных частот k_n и k_n^* совпадают все значащие цифры, приведенные в таблице.

n	$ k_n - k_n^* \times 10^5$		k_n^*
	$N = 9$	$N = 15$	
1	102	33	1,57080
2	54	21	3,14159
3	38	12	4,71239
4	177	61	6,28319

Интересно отметить, что если рассматривать только вещественную или мнимую части ГИУ, то данный алгоритм позволяет определить либо четные либо нечетные резонансные частоты (номера частот). Однако это не означает, что использование отдельно комплексной или мнимой частей ГИУ недопустимо. Как показывают практические эксперименты, если искомые функции нечетные (четные), то решение, полученное с использованием только мнимой (вещественной) части, хорошо приближается к точному решению.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00633).

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
2. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
3. Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. Естеств. науки. 1989. № 2. С. 81–86.
4. Ватульян А.О., Сюнякова И.М. О колебаниях массивной заглубленной плиты на поверхности ортотропной среды // Изв. РАН. МГТ. 1993. № 6. С. 68–73.
5. Ватульян А.О. О граничных интегральных уравнениях 1-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости. // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 3. С. 312–314.
6. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
7. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Мир, 1970. 939 с.
8. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986. 462 с.
9. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988. 286 с.
10. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 267 с.
11. Иванов В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 1089–1093.
12. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
13. Paige C.C., Saunders M.A. Algorithm 583. LSQR: Sparse linear equations and sparse least squares problems // ACM. Trans. Math. Software. 1982. 8. № 2. P. 195–209.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
18.II.1997