

УДК 539.3

© 1998 г. Е.В. Глушков, Е.В. Кириллова

### ДИНАМИЧЕСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАКЕТА УПРУГИХ СЛОЕВ

Предложенный ранее метод решения скалярных [1] и векторных [2] интегральных уравнений с мероморфным Фурье-символом ядра, возникающих в задачах о динамическом контакте штампа с упругим слоем, обобщается на случай многослойного пакета конечной толщины. Общая схема решения (поиск нулей и полюсов символа ядра в комплексной плоскости, сведение к бесконечной алгебраической системе, исходя из условий устранимости особенностей преобразования Фурье, и ее регуляризация путем учета характера сингулярности решения на границе области контакта) остается в целом прежней. Главное отличие при переходе к многослойному пакету состоит в возрастающих трудностях построения символа ядра и поиска его нулей и полюсов в комплексной плоскости. Дается описание особенностей реализации этих этапов, приводятся численные результаты, показывающие траектории движения полюсов в комплексной плоскости при непрерывном изменении упругих свойств слоев, а также влияние слоистости на характер частотной зависимости контактной жесткости пакета.

Краевые смешанные задачи для слоистых сред с помощью интегрального преобразования Фурье по горизонтальным координатам  $x, y$  сводятся к интегральным уравнениям типа свертки относительно неизвестных контактных напряжений

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\tau}|_{z=0}, \quad \boldsymbol{\tau} = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\};$$

$$\iint_{\Omega} \mathbf{k}(x - \xi, y - \eta) \mathbf{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mathbf{f}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

или к эквивалентным функциональным уравнениям

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}(\alpha_1, \alpha_2) + \boldsymbol{\Phi}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (2)$$

относительно двух неизвестных  $\mathbf{Q}, \boldsymbol{\Phi}$  [3, 4]. Здесь  $\mathbf{f} = \mathbf{u}|_{z=0}$ ,  $(x, y) \in \Omega$  – заданное смещение поверхности в области контакта  $\Omega$ ;  $\mathbf{K}, \mathbf{Q}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\Phi}$  – преобразование Фурье матрицы-ядра  $\mathbf{k}$  и векторов  $\mathbf{q}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}$  ( $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u}|_{z=0}$ ,  $(x, y) \notin \Omega$ ) соответственно.

При произвольной форме области контакта  $\Omega$  для решения уравнения (1) используются прямые численные методы, основанные на аппроксимации области сеткой и разложении неизвестной функции  $\mathbf{q}$  по некоторой системе базисных функций (см., например, вариационно-разностный метод<sup>1</sup>). В случае, если  $\Omega$  – полоса или круг, уравнение (1) становится одномерным (интегрирование только по  $\xi$  или по  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ) и функциональное соотношение (2) соответственно зависит также только от одной переменной  $\alpha = \alpha_1$  или  $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ . Для его решения наряду с

<sup>1</sup> Гольдштейн Р.В., Клейн И.С., Эскин Г.И. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости // Препринт № 33. М.: ИПМ АН СССР, 1973.

разложением по сплайнам или ортогональным полиномам с весом, учитывающим характер особенности решения на границах штампа, используются и аналитические подходы типа метода Винера–Хопфа. Если при этом Фурье-символ ядра  $\mathbf{K}$  – мероморфная функция (как, например, в случае пакета слоев конечной толщины), то решение может быть получено в замкнутой форме в виде ряда с неизвестными коэффициентами  $s_k$ , определяемыми из бесконечной алгебраической системы

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{lk} s_k = f_l, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Был предложен [1, 2] способ сведения задачи к системе (3) и ее регуляризации, основанный, как и классический метод Винера–Хопфа, на учете аналитических свойств функций, входящих в (2), в комплексной плоскости  $\alpha$ , но в отличие от него не требующий факторизации символа ядра  $\mathbf{K}$ . Это особенно важно, когда уравнение (2) векторное (контакт со сцеплением, задачи дифракции нормальных мод на горизонтальной трещине, включении, межслойном дефекте и т.п.), так как факторизация матрицы  $\mathbf{K}$  – самостоятельная, достаточно трудоемкая задача.

В случае многослойного пакета, если полюса  $\zeta_k$  элементов матрицы  $\mathbf{K}$  и нули  $z_l$  ее определителя (корни функций  $\Delta(\alpha)$ ,  $\Delta_2(\alpha)$  в [2]) уже найдены, то дальнейшая схема построения решения формально ничем не отличается от изложенной ранее для однородного слоя [1, 2]. Однако элементы  $\mathbf{K}(\alpha)$  (функции  $M$ ,  $P$ ,  $R$  [2]) уже не выписываются здесь в явном виде, а нули и полюса  $z_l$ ,  $\zeta_k$  не выстраиваются в комплексной плоскости  $\alpha$  вдоль ветвей графика экспоненты в соответствии с известной [3] асимптотикой для  $l, k \rightarrow \infty$ . С точки зрения численной реализации эти отличия существенны, так как:

1) численное построение элементов  $\mathbf{K}(\alpha)$ , например, в соответствии с ранее использовавшимися для многослойных сред алгоритмами [4, 5] дает совпадающие (устраняемые) подмножества нулей и полюсов  $z_l = \zeta_k$ , которые во избежание деления на нуль необходимо аналитически предварительно исключить при формировании системы (3) (см. [1], формула (1, 9), [2], формула (1.6));

2) асимптотические значения  $z_l$ ,  $\zeta_k$  использовались как начальные значения для нахождения "дальних" корней в комплексной плоскости.

Пути преодоления указанных трудностей и особенности модификации численной схемы показаны ниже на примере осесимметричной контактной задачи.

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания пакета  $M$  упругих слоев  $S_i$  толщины  $h_i$ , вызванные заданными смещениями  $f e^{-i\omega t}$  в круговой области  $\Omega$ :

$0 \leq r \leq a$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , на его поверхности (круговой штамп);  $S_i: z_i \leq z \leq z_{i-1}$ ,  $-\infty \leq x, y \leq \infty$ ,  $z_i = z_{i-1} - h_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ ;  $z_0 = 0$ ,  $z_M = -h$ ,  $h$  – общая толщина пакета;  $\lambda_i, \mu_i, \rho_i$  – упругие постоянные и плотность  $i$ -го слоя (фиг. 1). На границах раздела слоев  $z_i$  заданы условия жесткого сцепления:

$$z = z_i: \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i+1}, \quad \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4)$$

Нижняя грань жестко фиксирована

$$z = z_M = -h: \mathbf{u}_M = 0 \quad (5)$$

а на верхней, свободной от напряжений, заданы условия контакта с вибрирующим штампом

$$z = 0: \boldsymbol{\tau}_1 = \begin{cases} \mathbf{q}(r), & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \notin \Omega \end{cases}, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{f}(r), \quad (x, y) \in \Omega \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{u}_i(r, z) = \{u_{ir}, u_{iz}\}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_i(r, z) = \{\tau_{i,r,z}, \sigma_{iz}\}$  – векторы перемещений и напряжений в слое  $S_i$ ,  $\mathbf{f}(r) = \{f_r, f_z\}$  – заданные перемещения штампа и  $\mathbf{q}(r) = \{q_r, q_z\}$  – неизвестные контактные напряжения в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  (крутильные колебания не рассматриваются). Гармонический множитель  $e^{-i\omega t}$  в силу линейности задачи опущен.

Для построения матрицы Грина  $\mathbf{K}(\alpha)$  воспользуемся решением в трансформантах Фурье вспомогательной задачи для однородного слоя  $S_i$ , на гранях которого заданы нагрузки  $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}$

$$\mathbf{U}_i(\alpha, z) = \mathbf{K}_i(\alpha, z) \mathbf{Q}_i(\alpha) + \mathbf{L}_i(\alpha, z) \mathbf{Q}_{i+1}(\alpha),$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1 \quad (7)$$

и для нижнего слоя  $S_M$  с условием (5) на нижней грани

$$\mathbf{U}_M(\alpha, z) = \mathbf{K}_M(\alpha, z) \mathbf{Q}_M(\alpha) \quad (8)$$

Элементы матриц  $\mathbf{K}_i(\alpha, z)$ ,  $\mathbf{L}_i(\alpha, z)$  получены в явном виде, а относительно  $M$  неизвестных  $\mathbf{Q}_i(\alpha)$  из условий равенства перемещений на границах слоев (4) возникает система из  $M-1$  векторного уравнения

$$\mathbf{K}_i(z_i) \mathbf{Q}_i + (\mathbf{L}_i(z_i) - \mathbf{K}_{i+1}(z_i)) \mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{L}_{i+1}(z_i) \mathbf{Q}_{i+2} = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, M-2 \quad (9)$$

$$\mathbf{K}_{M-1}(z_{M-1}) \mathbf{Q}_{M-1} + (\mathbf{L}_{M-1}(z_{M-1}) - \mathbf{K}_M(z_{M-1})) \mathbf{Q}_M = 0$$

позволяющая выразить  $\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \dots, \mathbf{Q}_M$  через  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1$  с помощью матричных рекуррентных соотношений

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{Q}_M, \quad i = 1, 2, \dots, M-1$$

$$\mathbf{D}_{M-1} = \mathbf{K}_{h,M-1}^{-1} (\mathbf{K}_{0,M} - \mathbf{L}_{h,M-1}), \quad \mathbf{D}_M = \mathbf{E} \quad (10)$$

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{K}_{h,i}^{-1} [(\mathbf{K}_{0,i+1} - \mathbf{L}_{h,i}) \mathbf{D}_{i+1} + \mathbf{L}_{0,i+1} \mathbf{D}_{i+2}]$$

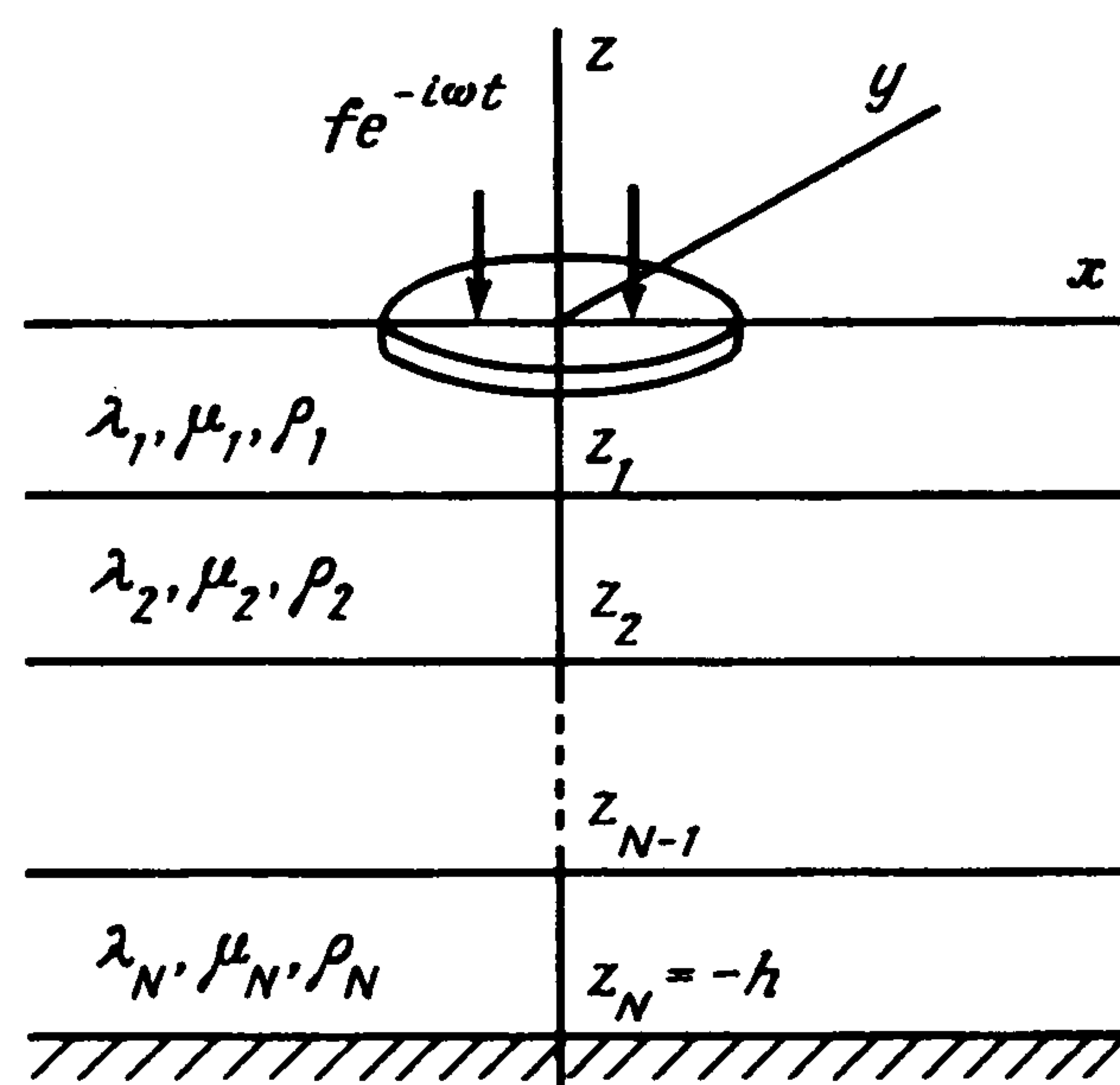
$$i = M-2, M-3, \dots, 1$$

из которых следует

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{K} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_{0,1} + \mathbf{L}_{0,1} \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1^{-1} \quad (11)$$

Здесь  $\mathbf{K}_{0,i}, \mathbf{L}_{0,i}$  – значение матриц  $\mathbf{K}_i(z), \mathbf{L}_i(z)$  на верхней грани слоя  $S_i$ :  $z = z_{i-1}$ , а  $\mathbf{K}_{h,i}, \mathbf{L}_{h,i}$  – на нижней грани  $z = z_i$ . Для краткости записи зависимость функций и матриц-функций от  $\alpha$  в (9) – (11) и далее, как правило, не указывается.

Фактически данный алгоритм является вариантом метода матриц-пропагаторов [6] или передаточных матриц [7] для многослойных сред. Как и в использовавшемся ранее алгоритме [5], матрицы  $\mathbf{K}_{0,i}, \mathbf{L}_{0,i}, \mathbf{K}_{h,i}, \mathbf{L}_{h,i}$  не содержат растущих экспонент, но самое главное явный вид их элементов позволяет выделить и сократить сомножители, дающие устранимые нули и полюса. В частности, для двуслойного пакета из представ-



Фиг. 1

ления (10) следует

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{0,1} + \mathbf{L}_{0,1}(\mathbf{K}_{0,2} - \mathbf{L}_{h,1})^{-1} \mathbf{K}_{h,1}$$

$$\mathbf{K}_{0,1} = \frac{\mathbf{K}_{0,1}^*}{\Delta_1}, \quad \mathbf{K}_{0,1}^* = \begin{vmatrix} i\alpha^2 M_3 - i\alpha P_3 \\ i\alpha P_3 & -R_3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{L}_{0,1} = \frac{\mathbf{L}_{0,1}^*}{\Delta_1}, \quad \mathbf{L}_{0,1}^* = \begin{vmatrix} i\alpha^2 M_1 - i\alpha P_1 \\ -i\alpha P_1 & -R_1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{0,2} = \frac{\mathbf{K}_{0,2}^*}{\Delta_2}, \quad \mathbf{K}_{0,2}^* = \begin{vmatrix} -i\alpha^2 M_2 - i\alpha P_2 \\ -i\alpha P_2 & R_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{h,1} = \frac{\mathbf{K}_{h,1}^*}{\Delta_1}, \quad \mathbf{K}_{h,1}^* = \begin{vmatrix} -i\alpha^2 M_1 - i\alpha P_1 \\ -i\alpha P_1 & R_1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{L}_{h,1} = \frac{\mathbf{L}_{h,1}^*}{\Delta_1}, \quad \mathbf{L}_{h,1}^* = \begin{vmatrix} -i\alpha^2 M_3 - i\alpha P_3 \\ -i\alpha P_3 & R_3 \end{vmatrix}$$

где

$$M_1 = \gamma_2 \chi_2^2 (-\gamma^2 s_1 + \alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 s_2) / (2i\alpha^2), \quad P_1 = \chi_2^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma (c_2 - c_1) / 2$$

$$R_1 = -\gamma_1 (\gamma + \alpha^2) (\gamma_1 \gamma_2 \alpha^2 s_1 + \gamma^2 s_2)$$

$$M_2 = \tilde{\gamma}_2 \tilde{\chi}_2^2 (\alpha^2 \tilde{c}_2 \tilde{s}_1 - \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{c}_1 \tilde{s}_2) / (2i\alpha^2)$$

$$P_2 = (\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 (3\alpha^2 + \tilde{\gamma}_2^2) (1 - \tilde{c}_1 \tilde{c}_2) + (\alpha^2 (\alpha^2 + \tilde{\gamma}_2^2) + 2\tilde{\gamma}_1^2 \tilde{\gamma}_2^2)) \tilde{s}_1 \tilde{s}_2$$

$$R_2 = \tilde{\gamma}_1 \tilde{\chi}_2^2 (\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{c}_2 \tilde{s}_1 - \alpha^2 \tilde{c}_1 \tilde{s}_2)$$

$$M_3 = i\gamma_2 \chi_2^2 (\gamma_1 \gamma_2 \alpha^2 c_1 s_2 - \gamma^2 c_2 s_1) / (2\alpha^2)$$

$$P_3 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma (\alpha^2 + \gamma) (c_1 c_2 - 1) - (\gamma_1^2 \gamma_2^2 \alpha^2 + \gamma^3) s_1 s_2$$

$$R_3 = \gamma_1 \chi_2^2 (\gamma_1 \gamma_2 \alpha^2 c_2 s_1 - \gamma^2 c_1 s_2) / 2$$

$$\Delta_1 = 2\mu_1 (-2\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma^2 (1 - c_1 c_2) - (\gamma^4 + \alpha^4 \gamma_1^2 \gamma_2^2) s_1 s_2)$$

$$\Delta_2 = \mu_2 ((\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 (4\alpha^2 \delta - (\delta^2 + 4\alpha^4) \tilde{c}_1 \tilde{c}_2) + (4\alpha^2 \tilde{\gamma}_1^2 \tilde{\gamma}_2^2 + \alpha^2 \delta^2) \tilde{s}_1 \tilde{s}_2)$$

$$\gamma_n = \sqrt{\alpha^2 - \chi_n^2}, \quad n = 1, 2, \quad \gamma = \alpha^2 - \chi_2^2 / 2$$

$$\chi_1^2 = \frac{\rho_1 \omega^2}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \quad \chi_2^2 = \frac{\rho_1 \omega^2}{\mu_1}, \quad \tilde{\chi}_1^2 = \frac{\rho_2 \omega^2}{\lambda_2 + 2\mu_2}, \quad \tilde{\chi}_2^2 = \frac{\rho_2 \omega^2}{\mu_2}$$

$$\delta = \alpha^2 + \tilde{\gamma}_2^2, \quad c_n = ch\gamma_n h_1, \quad s_n = sh\gamma_n h_1, \quad n = 1, 2$$

для  $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_n, \tilde{c}_n, \tilde{s}_n$  и т.д. представления те же с заменой  $\chi_n$  на  $\tilde{\chi}_n$  ( $n = 1, 2$ ) и  $h_1$  на  $h$ ;

$$(\mathbf{K}_{0,2} - \mathbf{L}_{h,1})^{-1} = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\alpha^2 (iP_4^2 - M_4 R_4)} \mathbf{K}_4^*, \quad \mathbf{K}_4^* = \begin{vmatrix} -iR_4 & \alpha P_4 \\ -\alpha P_4 & -\alpha^2 M_4 \end{vmatrix}$$

$$M_4 = \Delta_1 M_2 - \Delta_2 M_3, \quad P_4 = \Delta_1 P_2 - \Delta_2 P_3, \quad R_4 = \Delta_1 R_2 - \Delta_2 R_3$$

Соотношения

$$\alpha^2 (iP_4^2 - M_4 R_4) = \Delta_2 S, \quad S = S^* \Delta_1$$

$$S^* = i(\Delta_1 T / \mu_2 + \Delta_2 D / \mu_1) / 2 + \alpha^2 (M_3 R_2 + M_2 R_3 - 2i P_2 P_3)$$

$$D = (\alpha^4 + \gamma^2) \gamma_1 \gamma_2 c_1 c_2 - \alpha^2 (\gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma^2) s_1 s_2 - 2\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma$$

$$T = 2\alpha^2 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 (1 - \tilde{c}_1 \tilde{c}_2) + (\alpha^4 + \tilde{\gamma}_1^2 \tilde{\gamma}_2^2) \tilde{s}_1 \tilde{s}_2$$

позволяют выделить и сократить в (13) множители  $\Delta_1, \Delta_2$ ; в результате матрица  $\mathbf{K}$  принимает вид

$$\mathbf{K} = (\mathbf{K}_{0,1}^* + \mathbf{L}_{0,1}^* \mathbf{K}_4^* \mathbf{K}_{h,1}^* / S) / \Delta_1 \quad (14)$$

В скалярном случае контакта без трения окончательное выражение для  $U_z$ , не содержащее устранимых особенностей, переписывается следующим образом:

$$U_z(0) = K_{22} Q_z = Y Q_z / (\Delta_1 S^*)$$

$$Y = -S^* R_3 + i\alpha^2 P_1 (P_1 R_2 - 2R_1 P_2) + R_1^2 M_2 - \Delta_2 X / (2\mu_1)$$

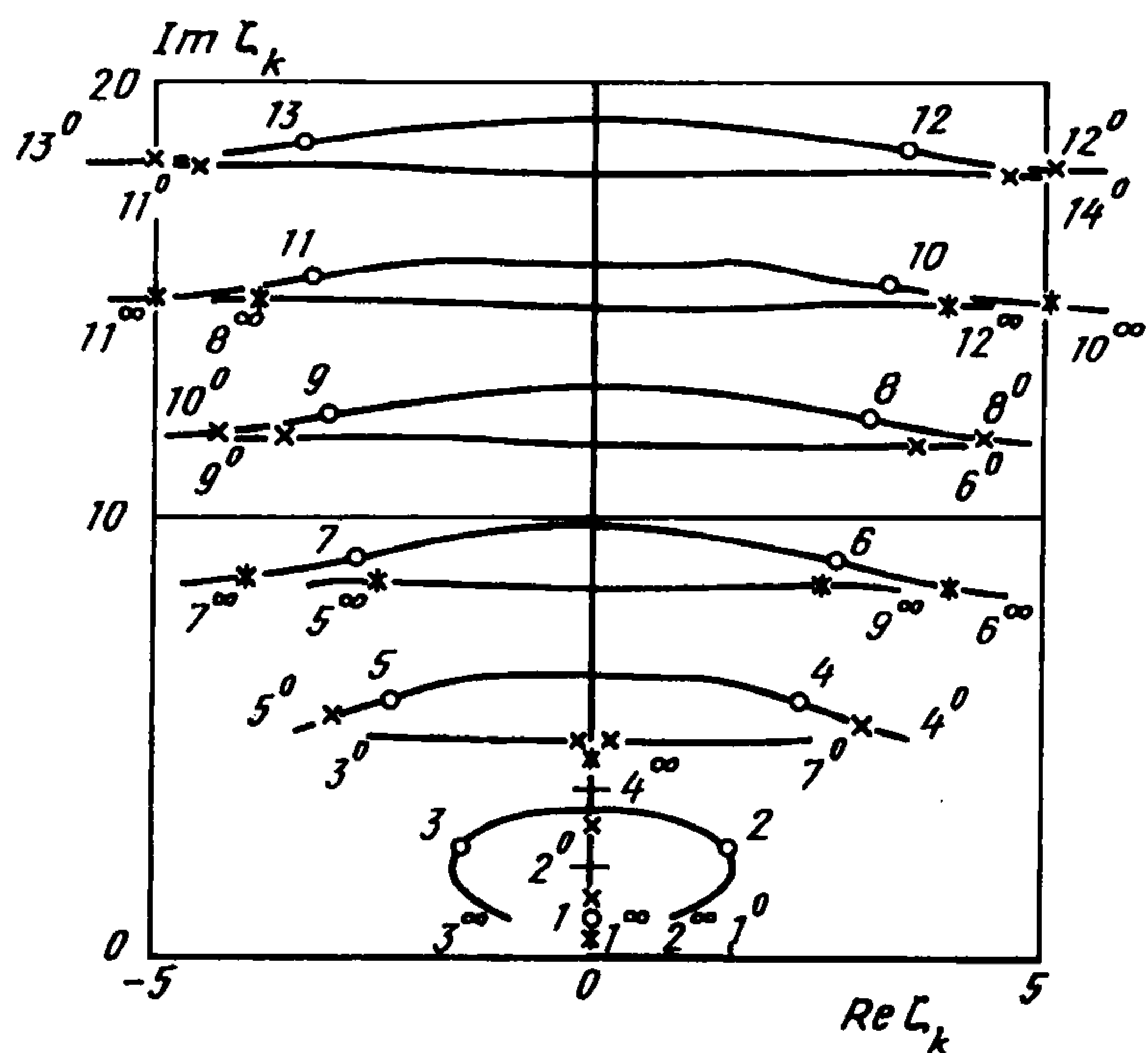
$$X = -i\gamma_1^2 \gamma_2 \chi_2^4 ((\gamma + \alpha^2)(\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 s_1 c_1 + \gamma^2 s_2 c_2) - \\ - 2\gamma \alpha^2 (\gamma c_1 s_2 + \gamma_1 \gamma_2 c_2 s_1)) / 4$$

Нули  $z_l$  в общем случае находятся как нули определителя матрицы  $\mathbf{K}(\alpha)$  (в скалярном случае – нули числителя соответствующего элемента  $\mathbf{K}(\alpha)$ ), а полюса  $\zeta_k$  – как корни уравнения  $\Delta_1(\alpha) S^*(\alpha) = 0$ .

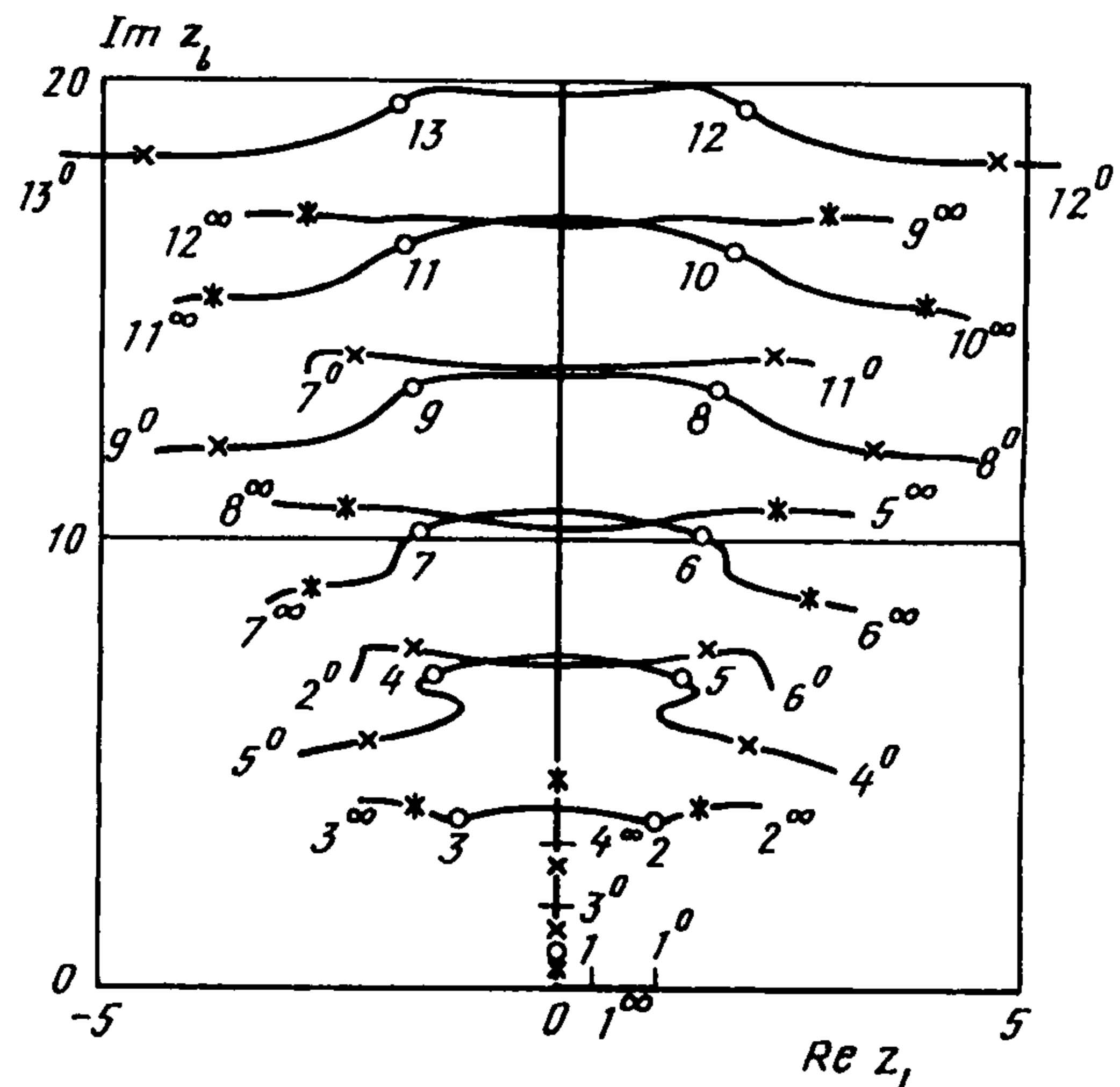
Было показано [8], что при достаточной контрастности упругих свойств слоев дисперсионное уравнение при больших  $\alpha$  распадается на асимптотически независимые дисперсионные уравнения, соответствующие каждому слою в отдельности. Этот факт вполне можно использовать для выбора начальных значений "дальних" корней, однако более надежным, работающим и при малой контрастности слоев, оказался поиск, основанный на пошаговом уточнении их положения при плавном изменении упругих свойств слоев, начиная с известного статического ( $\omega = 0$ ) распределения для однородного слоя. При достижении требуемых значений упругих модулей  $\lambda_i, \mu_i$  и плотности  $\rho_i$  слоев полученный массив значений  $z_l^0, \zeta_k^0$  запоминается в отдельном файле и дальнейшая схема поиска  $z_l(\omega), \zeta_k(\omega)$  для некоторой требуемой частоты  $\omega_1$  не отличается от использовавшейся ранее [1, 2]: траектория движения первых 10–30 корней, сильно зависящих от частоты  $\omega$ , также пошагово прослеживается в комплексной плоскости при  $0 \leq \omega \leq \omega_1$ , а остальные уточняются методом парабол, исходя из начальных значений  $z_l^0, \zeta_k^0$ , которые тем самым играют роль асимптотики корней в прежней схеме. Их число должно быть достаточным для суммирования с требуемой точностью рядов, возникающих при регуляризации системы (3).

В качестве примера на фиг. 2 показаны траектории дрейфа полюсов  $\zeta_k$ , а на фиг. 3 нулей  $z_l$  в комплексной плоскости  $\alpha$  при  $\omega = 0$  для двуслойного пакета ( $h_1 = h_2 = 0.5$ ) при изменении соотношения скоростей поперечных волн слоев  $\beta = v_{s,1}/v_{s,2}$ . Светлыми кружками показано начальное положение первых тринадцати  $z_l, \zeta_k$  для однородного слоя с безразмерными параметрами  $h = 1, v_s = 1, \rho = 1, \nu = 0, 3$  ( $\nu$  – коэффициент Пуассона). Соотношение  $\beta$  варьировалось: 1) от 1 до 0,02 при данных фиксированных значениях для нижнего слоя  $S_2$  (для  $\beta = 0,02$  в нумерации полюсов используется индекс 0); 2) от 1 до 10 при фиксированных свойствах  $S_1$  (индекс  $\infty$ ). Крестиками обозначены промежуточные положения полюсов для  $v_{s,1} = 0,5; v_{s,2} = 1$ , а звездочками – для  $v_{s,1} = 1, v_{s,2} = 0,5$  соответственно.

Относительно регуляризации системы (3) следует отметить, что использовавшийся в [1, 2] метод, основанный на учете асимптотического поведения  $s_k$  при  $k \rightarrow \infty$ , является частным случаем более общей гибридной схемы, занимающей проме-



Фиг. 2



Фиг. 3

жуточное положение между разложением по ортогональным полиномам и сведением к бесконечным системам. Данная схема, предложенная первоначально для регуляризации бесконечных систем в задачах о составных и ступенчатых волноводах [9], оказалась более эффективной и при решении рассматриваемых контактных задач. В рамках данной схемы неизвестные  $s_k$  заменяются в системе (3), начиная с некоторого номера  $k = N_1 + 1$ , не их асимптотикой как в [2], а выражаются через  $N_2$  неизвестных коэффициента разложения  $q(r)$  по ортогональным полиномам:

$$q(r) = \sum_{j=1}^{N_2} c_j \varphi_j(r), \quad \varphi_j(r) = (a-r)^{-1/2} P_{j-1}^{(0, -1/2)}\left(\frac{r}{a}\right)$$

( $P_j^{\alpha, \beta}(x)$  – полиномы Якоби).

Связь между  $s_k$  и  $c_j$  следует из того же явного представления  $s_k$  через  $Q(\zeta_k)$ , которое использовалось ранее для получения асимптотики  $s_k$ . Например, для случая контакта без трения [1] из соотношений

$$s_k = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(a\zeta_k) \operatorname{res} \mathbf{K}(\alpha)|_{\alpha=\zeta_k} \mathbf{Q}(\zeta_k) \zeta_k, \quad \mathbf{Q}(\alpha) = 2\pi \int_0^a q(r) J_0(\alpha r) r dr$$

( $H_0^{(1)}, J_0$  – функции Ганкеля и Бесселя) следует

$$s_k = \sum_{j=1}^{N_2} \mathbf{d}_{kj} c_j, \quad \mathbf{d}_{kj} = \pi i H_0^{(1)}(a\zeta_k) \operatorname{res} \mathbf{K}(\alpha)|_{\alpha=\zeta_k} \zeta_k \int_0^a \varphi_j(r) J_0(\zeta_k r) r dr$$

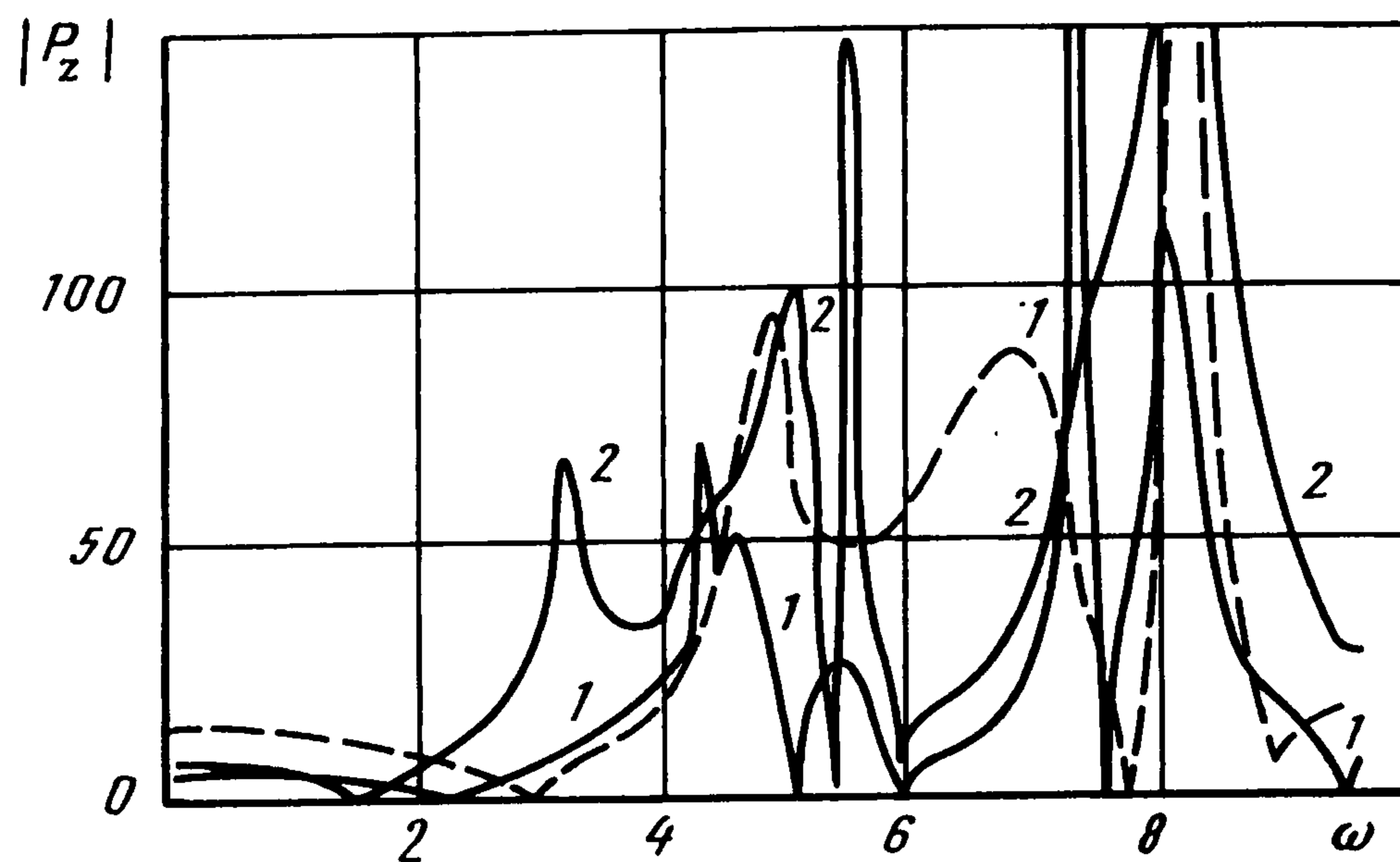
Система (3) при этом сводится к хорошо обусловленной асимптотически эквивалентной системе

$$\sum_{k=1}^{N_1} \mathbf{a}_{lk} s_k + \sum_{k=1}^{N_2} \mathbf{b}_{lj} c_j = \mathbf{f}_l, \quad l = 1, 2, \dots, N; \quad \mathbf{b}_{lj} = \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \mathbf{a}_{lk} \mathbf{d}_{kj}$$

сравнительно малой размерности  $N = N_1 + N_2$ . Прежний способ регуляризации получается, когда величина  $N_1$  достаточно велика, а  $N_2 = 1$  и значение интеграла в  $\mathbf{d}_{kj}$  заменяется его асимптотикой при  $|\zeta_k| \rightarrow \infty$ .

В качестве примера на фиг. 4 приведены частотные зависимости модуля динамической контактной жесткости

$$P_z = \frac{2\pi a}{w_0} \int_0^a q(r) r dr$$



Фиг. 4

(где  $w$  – вертикальные смещения жесткого штампа, контактирующего без трения:  $f = \{0, w\}$ ) для рассмотренного выше двуслойного пакета при  $\beta = 0,5$  (мягкий слой на жестком, линия 1) и  $\beta = 2$  (жесткий слой на мягком, линия 2); радиус  $a = 1$ . Штрихами нанесена зависимость  $|P_z|$  для однородного слоя  $\beta = 1$  [1, 2].

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (J5P100) и Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01620 и 96-01-00457).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. К определению динамической контактной жесткости упругого слоя // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 474–479.
2. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кириллова Е.В. Динамическая контактная задача для кругового штампа, сцепленного с упругим слоем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 780–785.
3. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей // М.: Наука, 1979. 320 с.
4. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред // М.: Наука, 1989. 344 с.
5. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.
6. Aki K., Richards P. Quantitative Seismology: Theory and Methods. Vol. 1. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1980 = Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. Т. 1. М.: Мир, 1983. 520 с.
7. Приварников А.К. Пространственная деформация многослойного основания // Устойчивость и прочность конструкций. Днепропетровск: Изд-во Днепр. ун-та, 1973. С. 27–45.
8. Тяпин А.Г. Комплексные корни дисперсионного уравнения для волн Рэлея в многослойном пакете на жестком полупространстве // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 139–143.
9. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Лапина О.Н. Дифракция нормальных мод в составных и ступенчатых упругих волноводах // ПММ. Т. 62. Вып. 2. С. 297–303.