ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 62. Вып. 3, 1998

УДК 532.5; 541.24

© 1998 г. Э.В. Теодорович

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С НЕЛИНЕЙНЫМ СТОКОМ: РЕНОРМГРУППОВОЙ ПОДХОД

Нелинейное обобщение уравнения диффузии, описывающее перенос вещества или тепла при наличии химических реакций, используется для рассмотрения процесса расплывания первоначально локализованного распределения. Применение метода ренормализационной группы позволило проанализировать характер решения при больших временах и выделить два режима его асимптотического поведения. В случае, когда размерность пространства выше некоторого критического значения, реализуется режим асимптотической свободы, при котором роль нелинейности мала и эволюция распределения плотности определяется диффузионными процессами. При размерности ниже критической нелинейный член остается существенным при больших временах и устанавливается режим неполной автомодельности эволюции распределения плотности. Для этого случая вычислен показатель степенной зависимости радиуса диффузионного пятна от времени. Обсуждаются связь метода ренормализационной группы и теории возмущений и проблемы обоснования метода в применении к данной задаче.

Интерес к задаче исследования асимптотического поведения частных автомодельных решений задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений связан с тем, что асимптотика автомодельного решения может оказаться относящейся к целому классу неавтомодельных начальных условий. Допустимые автомодельные асимптотики решений квазилинейных параболических уравнений, не зависящие от задающих начальное распределение характерных размерных параметров, подробно исследовались [1]. Однако подобные асимптотики не исчерпывают все возможные типы решений и могут существовать другие типы предельных решений, зависящие от некоторых интегральных характеристик начальных условий. Эти решения соответствуют режиму неполной автомодельности (автомодельности второго рода [2]), когда зависимость от задающих начальные распределения размерных параметров в пределе не исчезает и влияет на показатели степенного поведения в форме поправок к значениям, вытекающим из простых соображений размерности. Цель работы заключается в демонстрации возможностей использования метода ренормализационной группы при поиске решений, соответствующих режиму неполной автомодельности. В отличие от проводившихся ранее исследований [1, 3] при построении решения никаких предварительных предположений о форме решения не делается.

1. Постановка задачи. Квазилинейные параболические уравнения лежат в основе описания большой совокупности явлений, относящихся к механике, физике, технологии, биологии и проч. [1, 3, 4]. В частности, в теории гомогенного горения и химической кинетике рассматривается уравнение диффузии (тепла или вещества) с нелинейным источником ($\lambda < 0$) или стоком ($\lambda > 0$) (последующее рассмотрение будет относиться к случаю $\lambda > 0$)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + D_0\Delta\right]C(\mathbf{r},t) + \lambda C^{1+2\delta}(\mathbf{r},t) = 0 \qquad (1.1)$$

Физический смысл и размерность константы λ зависит от величины $n = 1 + 2\delta$. В частности, при $\delta = 0$ уравнение (1.1) линейно и пропорциональный λ член описывает процессы поглощения вещества средой. При $\delta = {}^1/_2$ нелинейный член описывает изменение концентрации за счет химических реакций бинарного типа, процессы коагуляции при диффузии аэрозольных частиц и др. При $\delta = 3/2$ уравнение (1.1) может быть использовано для анализа процессов теплопроводности при учете радиационных потерь или радиационном разогреве.

Для конкретности в дальнейшем будем пользоваться терминологией химической кинетики и в соответствии с этим будем называть $C(\mathbf{r}, t)$ концентрацией вещества, D_0 – коэффициентом диффузии, $n = 1 + 2\delta$ – порядком химической реакции.

Для выявления роли нелинейных эффектов и нахождения возможных асимптотик решений уравнения (1.1) рассматривается задача о нелинейном диффузионном расплывании в неограниченном пространстве первоначально локализованного распределения плотности и ищется решение задачи Коши для уравнения (1.1) с начальным распределением плотности дельтаобразного вида

$$C(\mathbf{r}, 0) = Q_0\delta(\mathbf{r}) \tag{1.2}$$

Подобная постановка задачи эквивалентна добавлению в правую часть уравнения (1.1) мгновенного источника вида

$$\rho(\mathbf{r}, t) = Q_0\delta(\mathbf{r})\delta(t) \tag{1.3}$$

Параметр Q_0 имеет смысл суммарного количества вещества в пространстве в начальный момент времени. Несмотря на весьма частный вид начальных условий (1.2), исследование задачи (1.1), (1.2) представляет более широкий интерес, поскольку эти условия вводят в рассмотрение новый размерный параметр Q_0, который может оказаться существенным. В более ранних исследованиях предполагалось, что асимптотика не должна зависеть от этого параметра и что она определяется только параметрами, входящими в уравнение.

При $\lambda = 0$ решение задачи (1.1), (1.2) выражается через функцию Грина уравнения диффузии $G(\mathbf{r}, t)$ согласно соотношению

$$C^{(0)}(\mathbf{r},t) = Q_0 G(\mathbf{r},t), \quad G(\mathbf{r},t) = \frac{\Theta(t)}{[4\pi D_0 t]^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4D_0 t}\right) \tag{1.4}$$

(d – размерность пространства, $\Theta(t)$ – ступенчатая функция Хевисайда).

При $\delta = 0$ решение уравнения (1.1) задается соотношением

$$C(\mathbf{r}, t) = Q_0\exp(-\lambda t)G(\mathbf{r}, t) \tag{1.5}$$

что соответствует экспоненциальному затуханию полного количества вещества в пространстве.

При $\delta \neq 0$ решение в общем виде не может быть получено, и целью данной работы будет построение приближенного решения задачи Коши. В случае малых δ можно предположить, что нелинейные эффекты будут невелики, и естественно искать решение в виде разложения по δ, а для случая произвольных δ использовать аналитическое продолжение по δ к заданному значению. Подобная процедура в некотором смысле аналогична успешно (но без достаточного обоснования) примененному в теории критических явлений методу ε-разложения [5, 6] и методу размерной регуляризации в квантовой теории поля [7].

При малых λ решение можно было бы искать с помощью теории возмущений [8], однако в данной задаче возмущение является сингулярным, поскольку при $\lambda = 0$ уравнение допускает группу симметрии типа масштабных преобразований $\mathbf{r} \to \alpha\mathbf{r}$, $t \to \alpha^2 t$, а нелинейный член нарушает указанную масштабную инвариантность. Сингулярный характер возмущения находит свое отражение в отсутствии равномерной сходимости ряда теории возмущений, что при разложении по системе собственных функций невозмущенной задачи проявляется в наличии секулярных членов в случае дискретного спектра собственных значений и расходимости коэффициентов разложения в случае непрерывного спектра. В частности, это видно из формулы (1.5), которую следует рассматривать как результат суммирования бесконечного ряда теории возмущений по степеням λ (фактически по степеням λt), не удовлетворяющего критерию равномерной сходимости и рассматриваемого как асимптотический.

Для суммирования бесконечного ряда теории возмущений и обхода трудностей, возникающих в связи с наличием секулярных членов, весьма удобным представляется метод ренормализационной группы (РГ), впервые возникший в квантовой теории поля [9] и затем успешно примененный в теории критических явлений при фазовых переходах второго рода [5, 6, 10]. Известны две несколько различающиеся формулировки метода РГ. В так называемой полевой формулировке метод РГ позволяет на основе знания первого члена ряда теории возмущений предсказать структуру последующих членов ряда и просуммировать определенную бесконечную подпоследовательность полного ряда исходя из наличия некоторого произвола в разбиении исследуемой системы на невозмущенную часть и возмущение (ренормализационная инвариантность) [9]. В рамках другой формулировки (вилсоновской) рассматривается соответствующая нелинейному уравнению система многих взаимодействующих мод, и уравнения для низкочастотных (медленных) мод получаются в результате последовательного итерационного усреднения по высокочастотным (быстрым) модам [10]. В случае, когда частоты медленных и быстрых мод разделены, идея этого метода эквивалентна используемому в теории нелинейных колебаний методу усреднения Крылова–Боголюбова [11]. В существенно многомодовой системе, когда моды всех масштабов одинаково важны для понимания поведения всей системы, свойство ренормализационной инвариантности заключается в независимости поведения системы в асимптотической области больших времен от способа разделения спектра на медленную и быструю части.

Ниже при исследовании задачи (1.1), (1.2) используется только первый (полевой) подход и дается подробное пояснение всех последовательных стадий применения метода РГ, при этом наличия каких-либо предварительных сведений об идеях и технике метода РГ у читателя не предполагается.

2. Построение перенормированной теории возмущений. От дифференциального уравнения (1.1) при начальном условии (1.2) перейдем к интегральному уравнению

$$C(\mathbf{r},t) = Q_0 G(\mathbf{r},t) - \lambda\int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') C^{1+2\delta}(\mathbf{r}',t') \tag{2.1}$$

Последовательное итерирование этого уравнения приводит к представлению решения в виде ряда по степеням параметра нелинейности λ (фактически по степеням $\lambda Q_0^{1+2\delta}$), при этом в качестве нулевого приближения используется решение линейной задачи. Для построения перенормированной теории возмущений выполним процедуру перенормировки параметра Q_0, заключающуюся в замене в (2.1) $Q_0 \to Q = ZQ_0$, где Z – константа перенормировки. Для компенсации эффекта перенормировки добавим к правой части (2.1) так называемый контрчлен вида $(Q_0 - Q)G(\mathbf{r}, t) = (Z^{-1} - 1)QG(\mathbf{r}, t)$ и будем рассматривать нелинейный член плюс контрчлен как возмущение. В результате последовательного итерирования получается ряд перенормированной теории возмущений по степеням параметра $\lambda Q^{1+2\delta}$. Однако выбор константы перенормировки Z (и тем самым параметра Q) неоднозначен, т.е. неоднозначно разбиение правой части (2.1) на невозмущенную часть и возмущение. Хотя каждый член ряда теории возмущений будет зависеть от выбора Z, однако полный ряд не должен зависеть от выбора константы перенормировки, т.е. полный ряд должен обладать ренормализационной инвариантностью. Требование ренормализационной инвариантности полного ряда теории возмущений ведет к наличию некоторой связи между разными членами ряда и тем самым появляется возможность на основе знания низших приближений теории возмущений найти последующие члены ряда не прибегая к процедуре итерирования и вычисления высших приближений.

В первом приближении теории возмущений решение представимо в виде

$$C^{(1)}(\mathbf{r},t) = QG(\mathbf{r},t) - \lambda Q^{1+2\delta}\int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') G^{1+2\delta}(\mathbf{r}',t') + (Z^{-1}-1)QG(\mathbf{r},t) \tag{2.2}$$

Используя конкретный вид функции Грина для уравнения диффузии (вторая формула (1.4)), можно убедиться в справедливости соотношения

$$G^{1+2\delta}(\mathbf{r},t)=\frac{A}{(D_0t)^{\delta d}}G\left(\mathbf{r},\frac{t}{1+2\delta}\right),\quad A=\frac{1}{(1+2\delta)^{d/2}(4\pi)^{\delta d}} \tag{2.3}$$

Функция Грина уравнения диффузии удовлетворяет так называемому полугрупповому закону, который в применении к марковским случайным процессам известен обычно как уравнение Эйнштейна–Колмогорова для условной вероятности [12]

$$C(\mathbf{r},t-t_0)=\int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')G(\mathbf{r}',t'-t_0)d\mathbf{r}'\quad (t\geqslant t'\geqslant t_0) \tag{2.4}$$

Используя (2.3), (2.4), выполним интегрирование по $\mathbf{r}'$ в уравнении (2.2) и найдем

$$C^{(1)}(\mathbf{r},t)=QG(\mathbf{r},t)-\frac{\lambda Q^{1+2\delta}}{D_0^{\delta d}}A\int_0^t\frac{1}{t'^{\delta d}}G\left(\mathbf{r},t-\frac{2\delta}{1+2\delta}t'\right)dt'+(Z^{-1}-1)QG(\mathbf{r},t) \tag{2.5}$$

При малых δ можно пренебречь зависимостью функции Грина от t' под знаком интеграла в правой части (2.5). При достаточно больших $\delta(\delta d\gg 1)$ основной вклад в интеграл по t' дает область $t'\approx 0$ и снова появляется возможность пренебречь зависимостью G от t' под знаком интеграла. В этом приближении

$$C^{(1)}(\mathbf{r},t)\equiv q^{(1)}(t)G(\mathbf{r},t),\qquad q^{(1)}(t)=Q\left[1-\frac{\lambda Q^{2\delta}}{D_0^{\delta d}}AI_{\delta d}(0,t)\right]$$

$$I_k(a,b)=\int_a^b\frac{d\eta}{\eta^k} \tag{2.6}$$

т.е. решение имеет форму диффузионно расплывающегося распределения плотности вещества с переменным полным содержанием $q(t)$.

В формуле (2.6) константа перенормировки Z и связанная с ней величина $Q=ZQ_0$ произвольны. Потребуем выполнения условия нормировки, согласно которому содержание вещества в момент времени $t=\tau$ должно равняться Q, т.е. $q(\tau)=Q$. Из этого условия найдем константу перенормировки Z и получим

$$q(t)\approx Q\left[1-\frac{\lambda Q^{2\delta}}{D_0^{\delta d}}AI_{\delta d}(\tau,t)\right]=Q\left[1-\frac{\lambda Q^{2\delta}\tau^{1-\delta d}}{D_0^{\delta d}}AI_{\delta d}(1,t/\tau)\right] \tag{2.7}$$

В результате произвол в выборе константы перенормировки Z заменяется на произвол в выборе точки нормировки τ.

3. Ренормгрупповая инвариантность и метод ренормгруппы. Зависимость содержания вещества от времени является некоторой функцией параметров λ, D_0, Q, τ, и при этом за счет произвола в выборе τ вид функции не должен меняться при переходе от одного набора параметров τ, Q к другому набору τ_1, Q_1, что и отражает свойство ренормализационной инвариантности. В более широком смысле это свойство получило название функциональной автомодельности [10], которая обобщает понятие обычной автомодельности (самоподобия), связанной с произволом только в выборе масштабов. Простейшим примером функциональной автомодельности является универсальность геометрии гидродинамических течений, зависящих только от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=lu/\nu$, а не отдельно от характерных масштабов длины l, скорости u и коэффициента кинематической вязкости ν.

На основании соображений размерности и требования ренормализационной инвариантности можно написать

$$q(t)=Qf(x,g)=Q_1f(x_1,g_1) \tag{3.1}$$

$$x=\frac{t}{\tau},\quad g=\frac{\lambda Q^{2\delta}\tau^{1-\delta d}}{D_0^{\delta d}},\quad x_1=\frac{t}{\tau_1},\quad g_1=\frac{\lambda Q_1^{2\delta}\tau_1^{1-\delta d}}{D_0^{\delta d}},\quad Q_1=Qf\left(\frac{\tau_1}{\tau},g\right)$$

Последнее равенство следует из соотношения $f(1, q) = 1$, вытекающего из условия нормировки $q(\tau) = Q$.

Введем новую безразмерную функцию

$$\tilde{g}=\lambda q(t)^{2\delta}t^{1-\delta d}\,/\,D_0^{\delta d}\equiv gf^{2\delta}(x,g)x^{1-\delta d} \tag{3.2}$$

Она оказывается инвариантом преобразования $\tau\to\tau_1$, $Q\to Q_1$, т.е.

$$\tilde{g}(x,g)=\tilde{g}(x_1,g_1) \tag{3.3}$$

Функция $\tilde{g}(x,g)$ представляет собой зависящий от времени безразмерный фактический параметр разложения в ряд теории возмущений. В силу условия $f(1, g) = 1$ эта функция подчиняется условию нормировки

$$\tilde{g}(1,g)=g \tag{3.4}$$

и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\tilde{g}(x,g)=\tilde{g}(x/\alpha,\ \tilde{g}(\alpha,g)),\qquad \alpha=\tau_1/\tau \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5) следует, что совокупность преобразований $(\tau, g)\to(\tau_1, g_1)$ удовлетворяет групповому закону композиции $(\tau, g)\to(\tau_2, g_2) = (\tau, g)\to(\tau_1, g_1)\to(\tau_2, g_2)$, имеет тождественный и обратный элементы и тем самым образует непрерывную однопараметрическую группу, называемую ренормализационной группой (РГ).

Дифференцируя (3.5) по α и положив затем $\alpha = 1$, найдем дифференциальное уравнение РГ

$$\left\{-x\frac{\partial}{\partial x}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right\}\tilde{g}(x,g)=0,\quad \beta(g)=\frac{\partial\tilde{g}(x,g)}{\partial x}\Big|_{x=1} \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) является слишком общим, вся конкретная информация о рассматриваемой системе содержится в так называемой ренормгрупповой функции (РГ-функции) $\beta(g)$, определяемой согласно (3.6) поведением функции $\tilde{g}(x,g)$ вблизи точки нормировки $x = 1$. РГ-функция $\beta(g)$ играет роль оператора инфинитезимальных преобразований (генератора) ренормализационной группы.

Метод РГ заключается в предложении использовать перенормированную теорию возмущений для вычисления функции $\beta(g)$ [9]. Если вычислить функцию β в низшем приближении теории возмущений, подставить в уравнение (3.6), то последующее решение этого уравнения будет соответствовать суммированию некоторой бесконечной подпоследовательности полного ряда теории возмущений.

Для пояснения можно привести следующий иллюстративный пример. Если известно, что некоторая величина представляет собой сумму геометрической прогрессии, то знание двух первых членов суммы дает возможность найти все остальные члены и сумму. Аналогом знания о том, что рассмотрение относится к геометрической прогрессии, при ренормгрупповом подходе является требование ренормгрупповой инвариантности, выражаемое уравнениями РГ (3.5), (3.6).

4. Решение уравнений ренормгруппы. Из (2.7) следует

$$f(x,g)\approx 1-AgI_{\delta d}(1,x) \tag{4.1}$$

Используя (3.6), (4.1), найдем

$$\beta(g)=-2\delta Ag(g-g^*),\quad g^*=(1-\delta d)/(2\delta A) \tag{4.2}$$

Решение задачи (3.6) для случая (4.2) будет приведено несколько позднее, а сейчас обсудим асимптотику решения для случае РГ-функции общего вида. Согласно методам классической механики асимптотическое решение уравнений типа (3.6) задается неподвижными точками g_i, удовлетворяющими условию $\beta(g_i) = 0$, при этом неподвижная точка является устойчивой (притягивающей) в области больших значений $x = t/\tau$ при условии $\partial\beta(g)/\partial g|_{g = g_i} < 0$ и неустойчивой (отталкивающей) в противоположном случае. Если имеется асимптотически устойчивая неподвижная точка, то асимптотика функции $f(x, g)$ согласно (3.2) будет иметь вид

$$f(x, g) \sim x^{-(1-\delta d)/(2\delta)} \tag{4.3}$$

Из (4.2) следует, что имеются две неподвижные точки: тривиальная $g = 0$, соответствующая отсутствию нелинейных взаимодействий (асимптотическая свобода) и нетривиальная $g = g^*$, когда нелинейный член оказывается существенным. Согласно (4.2) нетривиальная неподвижная точка g^* будет устойчивой в области больших времен при условии $\delta d < 1$, а при $\delta d > 1$ устойчивой оказывается тривиальная неподвижная точка. При $\delta d = 1$ тривиальная и нетривиальная неподвижные точки сливаются и для определения асимптотики следует искать новую устойчивую неподвижную точку на основе вычисления ренормгрупповой функции (РГ-функции) в высших приближениях теории возмущений. Значение размерности $d_c = 1/\delta$, при которой происходит смена устойчивости неподвижных точек (crossover), называется кроссоверной размерностью.

Для реакций бинарного типа $\delta = {}^1/_2$ кроссоверной размерности будет соответствовать плоский случай ($d_c = 2$). Таким образом, нетривиальный режим асимптотического поведения для реакций бинарного типа будет реализовываться только в одномерной задаче, двумерный случай требует особого рассмотрения, а трехмерному случаю будет соответствовать отсутствие нелинейного взаимодействия (асимптотическая свобода).

На фиг. 1 представлен вид РГ-функции для трех режимов асимптотического поведения решения.

Для исследования выхода на асимптотический режим найдем точное решение уравнения (3.6), соответствующее РГ-функции вида (4.2). Это решение находится методом характеристик и в неявном виде определяется формулой Гелл-Манна – Лоу [9]

$$\int\limits_{g}^{\tilde{g}(x,g)} \frac{dg'}{\beta(g')} = \ln x \tag{4.4}$$

Подставляя (4.2) в (4.4), выполняя интегрирование по g' и разрешая уравнение (4.4) относительно неизвестной функции, найдем функцию $\tilde{g}(x, g)$, знание которой позволяет с помощью (3.2) получить

$$f(x,g) = \left[1 + \frac{g}{g^*}(x^{1-\delta d} - 1)\right]^{-\xi}, \quad \xi = \frac{1}{2\delta} \tag{4.5}$$

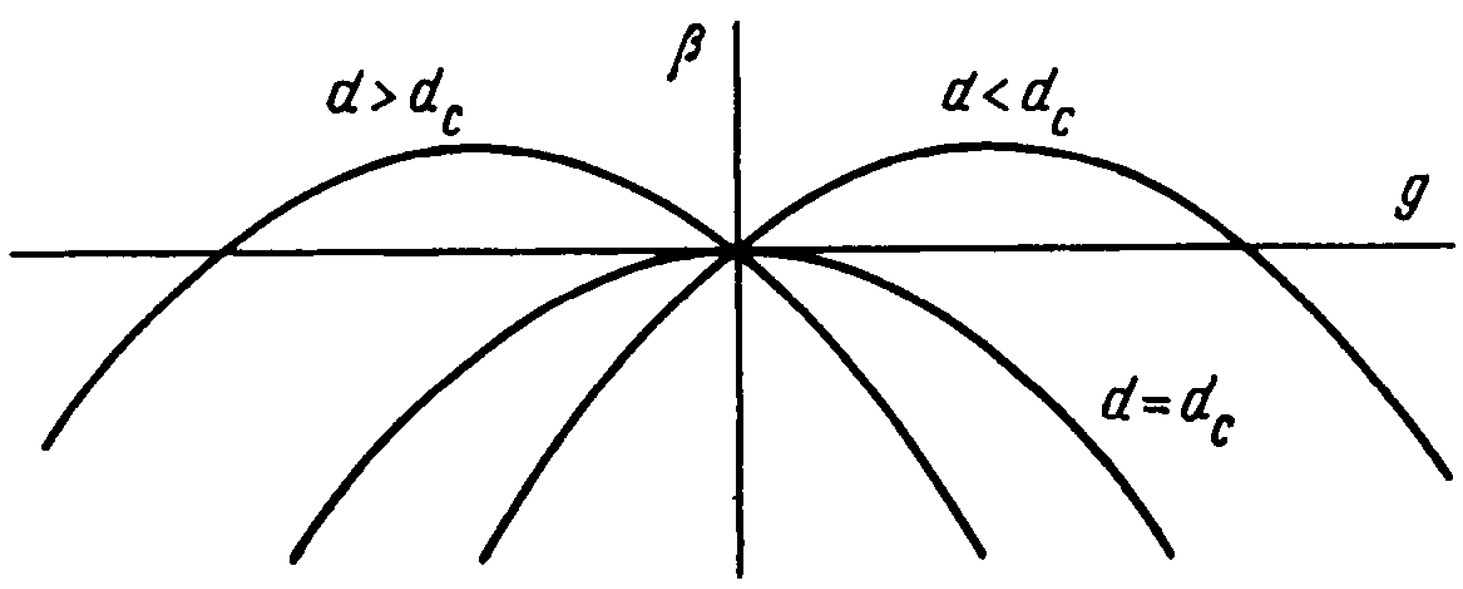
Возвращаясь к исходным (неперенормированным) параметрам и вводя характерное время T согласно соотношению $\lambda Q_0^{2\delta}/D_0^{\delta d} = T^{\delta d-1}$, найдем

$$q(t) = Q_0\left[1 + \frac{1}{g^*}\left(\frac{t}{T}\right)^{1-\delta d}\right]^{-\xi} \tag{4.6}$$

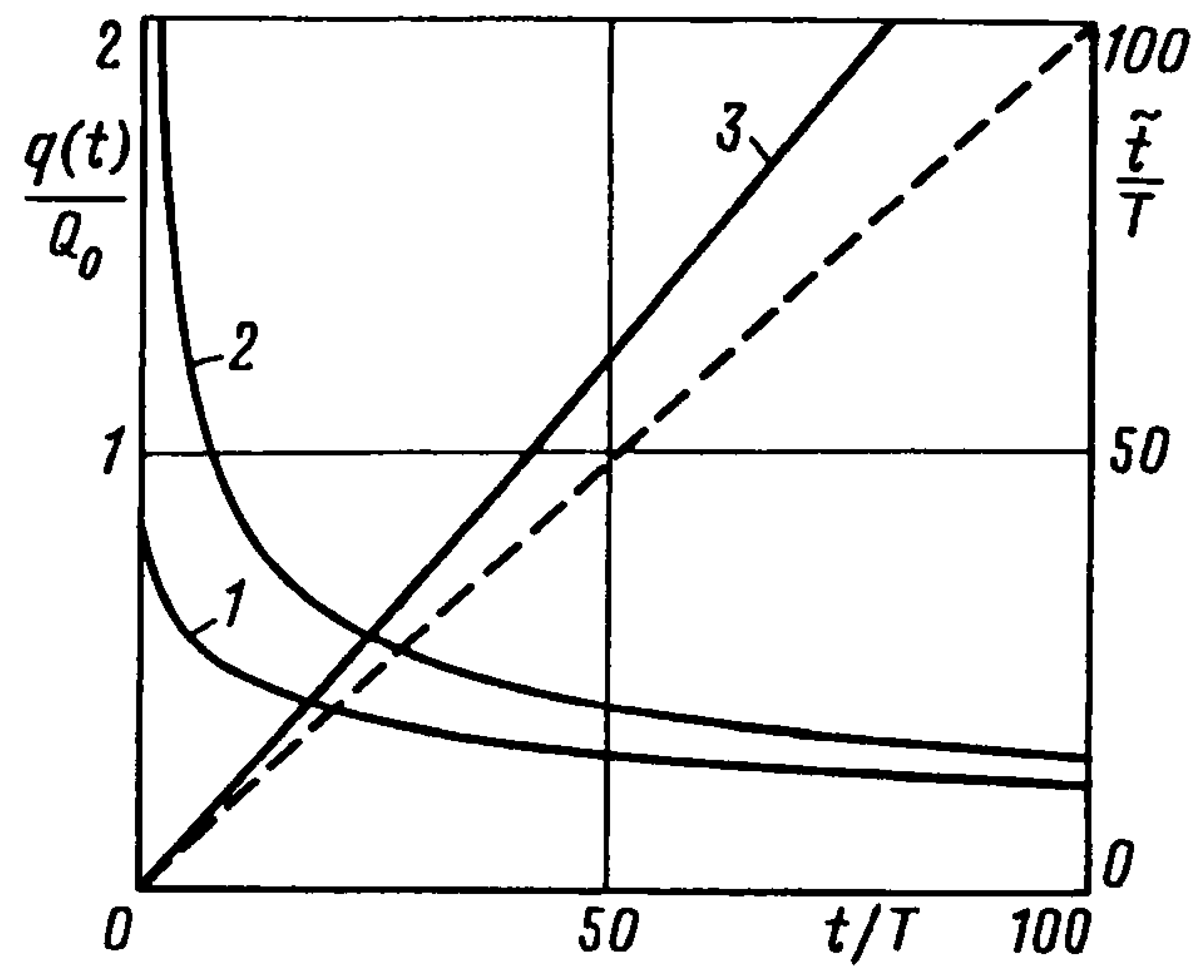
В предельном случае $\delta \to 0$ с помощью соотношения $[q(t)/Q_0]^{2\delta} \simeq 1 + 2\delta\ln[q(t)/Q_0]$ можно получить результат (1.5), соответствующий точному решению задачи. При $\delta = 0$ применение метода РГ фактически воспроизводит известный в теории линейных дифференциальных уравнений метод варьирования постоянной.

Соответствующая формуле (4.6) зависимость содержания вещества от безразмерного времени t/T для случая одномерного диффузионного процесса ($d = 1$) при наличии реакций бинарного типа ($\delta = {}^1/_2$) приведена на фиг. 2 (кривая 1). Для сравнения приведена также кривая 2, соответствующая асимптотическому степенному решению. Видно, что в рассматриваемом случае выход на асимптотический режим осуществляется достаточно медленно.

5. Уточнение приближения малых δ. В формуле первого приближения перенормированной теории возмущений (2.5) оказалось возможным при малых δ пренебречь зависимостью функции Грина под знаком интеграла от t'. В результате влияние нелинейности свелось к возникновению зависимости от времени амплитудного



Фиг. 1



Фиг. 2

множителя, связанного с количеством вещества в системе, и неизменности картины эволюции пространственного распределения плотности. Можно показать, что учет следующего члена разложения по δ в (2.5) сводится к замене коэффициента диффузии на некоторый зависящий от времени эффективный коэффициент диффузии $\tilde{D}(t)$, определяющий скорость расплывания распределения плотности вещества.

Ниже в рамках ренормгруппового подхода воспроизводится предыдущее рассмотрение при учете изменения скорости диффузионного расплывания за счет нелинейности без подробного изложения метода РГ при фиксировании внимания только на возникающих различиях. В основном эти различия заключаются в том, что в рассмотренном выше случае производилась перенормировка начальных условий, а при данном рассмотрении выполняется также перенормировка коэффициента диффузии в исходном дифференциальном уравнении.

Произведем перенормировку коэффициента диффузии в исходном уравнении (1.1) путем замены $D_0 \to D = Z_1 D_0$ и добавления в правую часть компенсирующего эту замену контрчлена. После перехода от дифференциального уравнения к интегральному и последующей перенормировки параметра Q, получим уравнение, отличающееся от (2.2) дополнительным слагаемым в правой части, равным

$$(Z_1^{-1} - 1)D\Delta\int_0^t dt'\int d\mathbf{r}'\, G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')C(\mathbf{r}', t')$$

Здесь функция Грина построена по перенормированному значению D, а не по D_0, как в разд. 2.

Проводя аналогичные вычисления, в низшем неисчезающем приближении теории возмущений при учете следующего члена разложения по δ аргумента функции Грина под знаком интеграла по t' и использовании уравнения для перенормированной функции Грина найдем

$$C^{(1)}(\mathbf{r},t)=\left\{Q-\frac{\lambda Q^{1+2\delta}}{D^{\delta d}}AI_{\delta d}(0,t)+(Z^{-1}-1)Q\right\}G(\mathbf{r},t)+$$

$$+\left\{-\frac{\lambda Q^{1+2\delta}}{D^{\delta d}}\frac{2\delta D}{(1+2\delta)^{\delta d}}AI_{\delta d-1}(0,t)+(Z_1^{-1}-1)QDt\right\}\Delta G(\mathbf{r},t) \tag{5.1}$$

Рассмотрение пропорциональных G членов проводится аналогично предыдущему.

Для определения константы перенормировки коэффициента диффузии Z_1 потребуем, чтобы при $t=\tau$ пропорциональная ΔG поправка к перенормированному коэффициенту диффузии обращалась в нуль. В результате в низшем приближении теории возмущений найдем

$$\frac{1}{Z_1(\tau)}=\frac{D_0}{D}=1+\frac{\lambda Q^{2\delta}}{D^{\delta d}}\frac{2\delta}{1+2\delta}\frac{A}{\tau}I_{\delta d-1}(0,\tau)=1+2aAgI_{\delta d}(0,\tau)$$

$$2a=\frac{2\delta}{1+2\delta}\frac{1-\delta d}{2-\delta d} \tag{5.2}$$

Требование обращения в нуль поправки к коэффициенту диффузии соответствует условию нормировки $\tilde{D}(t)|_{t=\tau}=D$, из которого следует

$$\tilde{D}(t)=D_0Z_1(t)=DZ_1(t)Z_1^{-1}(\tau)=Df_1(t/\tau,\lambda Q^{2\delta}\tau^{1-2\delta}/D^{\delta d}) \tag{5.3}$$

Функция $f_1(x, g)$ в низшем приближении теории возмущений согласно (5.2) имеет вид

$$f_1(x,g)=1+2aAgI_{\delta d}(1,x),\quad g=\frac{\lambda Q^{2\delta}\tau^{1-\delta d}}{D^{\delta d}} \tag{5.4}$$

Аналогично (3.2) введем функцию

$$\tilde{g}(x,g)=\frac{\lambda q^{2\delta}(t)t^{1-\delta d}}{\tilde{D}^{\delta d}(t)}=g\frac{f^{2\delta}(x,g)}{f_1^{\delta d}(x,g)}x^{1-\delta d} \tag{5.5}$$

которая является инвариантом ренормгруппового преобразования $\tau\to\tau_1$, $Q\to Q_1$, $D\to D_1$.

Вычисление $\tilde{g}(x, g)$ проводится аналогично проведенному в разд. 2 и единственное отличие будет заключаться в замене в соответствующих формулах $A\to A^*=$ $=A(1+ad)$. Однако теперь вычисление функций $f(x, g)$ и $f_1(x, g)$ оказывается не таким тривиальным и требуется дополнительно решать уравнения отдельно для f и f_1.

Из (3.1) следует, что функция $f(x, g)$ (так же как и функция $f_1(x, g)$) удовлетворяет функциональному уравнению РГ

$$f(x,g)=f(\alpha,g)f(x/\alpha,\tilde{g}(\alpha,g)) \tag{5.6}$$

Дифференцируя уравнение (5.6) по α и положив затем $\alpha=1$, получим дифференциальное уравнение РГ для $f(x, g)$ (такое же уравнение получается для $f_1(x, g)$)

$$\left\{-x\frac{\partial}{\partial x}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right\}\ln f(x,g)=-\gamma(g),\quad \gamma(g)=\left.\frac{\partial f(x,g)}{\partial x}\right|_{x=1} \tag{5.7}$$

Общее решение линейного уравнения (5.7) представимо в виде суммы частного решения неоднородного уравнения $\Phi(g)$ и общего решения однородного уравнения, являющегося произвольной функцией характеристики $F(\tilde{g}(x, g))$,

$$\ln f(x, g) = F(\tilde{g}(x, g)) + \Phi(g) \tag{5.8}$$

Положив в (5.8) $x = 1$ и воспользовавшись условиями нормировки (3.1) и (3.4), найдем

$$F(g) = -\Phi(g) \tag{5.9}$$

откуда следует

$$f(x, g) = \frac{\exp\{-\Phi(\tilde{g}(x, g))\}}{\exp\{-\Phi(g)\}}, \quad \Phi(g) = -\int \frac{\gamma(g)dg}{\beta(g)} \tag{5.10}$$

Вычисляя $\gamma(g)$ и $\gamma_1(g)$ из (4.1) и (5.4), с помощью (5.9), (5.10) получим формулы, аналогичные (4.5).

Возвращаясь от перенормированных значений Q, D к исходным параметрам Q_0, D_0, и используя характерное время T, для $f(x, g)$ и $f_1(x, g)$ найдем аналогичные (4.6) формулы, в которых

$$g^* = \frac{1 - \delta d}{2\delta(1 + ad)}, \quad \xi = \frac{1}{2\delta(1 + ad)}, \quad \xi_1 = -\frac{a}{\delta(1 + ad)} \tag{5.11}$$

Отметим, что при $a = 0$ воспроизводится формула (4.5), полученная без учета перенормировки коэффициента диффузии.

Если ввести эффективное время $\tilde{t}$ с помощью соотношения $\tilde{D}(t)\, t = D_0\, \tilde{t}$, то в терминах эффективного времени решение может быть представлено в виде

$$C(\mathbf{r}, t) = Q_0(\tilde{t}/t)^{-1/(2a)}G(\mathbf{r},\tilde{t} \tag{5.12}$$

Связь между безразмерным эффективным временем $\tilde{t}/T$ и безразмерным временем t/T задается соотношением

$$\frac{\tilde{t}}{T} = \frac{t}{T}\left[1 + \frac{1}{g^*}\left(\frac{t}{T}\right)^{1-\delta d}\right]^{-\xi_1} \tag{5.13}$$

Соответствующая кривая для случая $\delta = {}^1/_2$, $d = 1$ представлена на фиг. 2 (кривая *3*), для сравнения штриховой линией изображена зависимость $\tilde{t} = t$.

Поскольку согласно (5.13) $\tilde{t} > t$ при $d < d_c$, это означает, что учет нелинейных эффектов приводит к увеличению скорости расплывания первоначально локализованного распределения плотности и радиус области локализации растет соглано закону $r \sim t^{1/2+\alpha}$, где

$$\alpha = \frac{1 - \delta d}{2\delta}\frac{a}{1 + ad} \tag{5.14}$$

Отметим, что показатель α является универсальным, т.е. не зависящим от значений характерных параметров задачи Q_0, D_0, λ, он определяется только размерностью d и порядком реакции δ.

6. Обсуждение. Основная цель работы – демонстрация возможности использования ренормгруппового подхода в задаче (1.1), (1.2). Однако для выявления возможностей и способов применения метода РГ в других задачах математической физики полезно воспроизвести логическую основу примененного выше метода, которая не всегда была видна на фоне формальных вычислений, и обратить внимание на нетривиальные результаты, полученные выше с помощью метода РГ.

На первый взгляд может показаться, что за счет диффузионного расплывания первоначально локализованного распределения плотности вещества и уменьшения концентрации вследствие нелинейного затухания при больших временах должен реализовываться режим асимптотической свободы, при котором нелинейный член в уравнении (1.1) становится пренебрежимо малым по сравнению с диффузионным, эволюция распределения концентрации будет определяться только диффузионными процессами и асимптотика окажется автомодельной. Однако проведенный анализ показал, что автомодельный режим асимптотической свободы реализуется только в случае, когда размерность пространства превышает некоторые критическое значение $d_c = 1/\delta$. Полученный результат приводит к заключению, что при $d < d_c$ реализуется нетривиальный режим, при котором устанавливается некоторый устойчивый баланс между процессами диффузионного расплывания и нелинейного затухания. Эволюция пространственного распределения оказывается автомодельной, т.е. имеет место масштабное подобие (скейлинг) на разных временах. Согласно принятой терминологии эта автомодельность является неполной [2], поскольку показатель степенного поведения не определяется соображениями размерности. Найденное значение показателя неполной автомодельности оказывается универсальным, т.е. не зависящим от характерных параметров задачи и, в частности, от константы нелинейного взаимодействия λ. Данное обстоятельство указывает на то, что зависимость решения от λ не является аналитической в точке $\lambda = 0$, что и подтверждает сингулярную природу возмущений, связанную с нарушением упомянутых выше свойств симметрии невозмущенного уравнения.

Важным представляется вопрос о степени точности и области применимости полученного решения, а также о связи метода РГ с теорией возмущений. С одной стороны, использование итерационной процедуры при построении решения означает, что ищется ряд теории возмущений по величине константы нелинейного взаимодействия. Однако возникающий при этом формальный параметр разложения $\lambda Q_0^{2\delta}/D_0^{\delta d}$ имеет ненулевую размерность и фактическим параметром разложения является зависящая от времени величина $\lambda Q_0^{2\delta} t^{1-\delta d}/D_0^{\delta d}$. Хотя процедура перенормировки $Q_0 \to Q$, $D_0 \to D$ и приводит к тому, что фактический параметр разложения, построенный по перенормированным значениям параметров задачи, оказывается меньше параметра, построенного по исходным (неперенормированным) значениям, это ведет только к улучшению скорости сходимости ряда при заданном конечном времени, однако нахождение асимптотики больших времен остается вне пределов стандартной теории возмущений.

Для нахождения асимптотики весьма полезным оказывается свойство ренормализационной инвариантности, которое устанавливает определенную связь между различными членами ряда теории возмущений, в результате чего возникает возможность найти эти члены и просуммировать весь ряд (или его бесконечную подпоследовательность) без использования предположения о малости параметра разложения.

В данной задаче возможность осуществления процедуры перенормировки (перенормируемость) означает, что влияние нелинейных возмущений не меняет общей картины распределения плотности, а только ведет к появлению зависимостей от времени полного количества вещества и коэффициента диффузии. В результате поиск решения сводится к нахождению соответствующих зависимостей. Зависящие от времени величины $q(t)$ и $\tilde{D}(t)$ существенно отличаются от исходных постоянных значений Q_0 и D_0, и это является формальным указанием на неприменимость теории возмущений. Перенормировка означает замену исходных величин на перенормированные значения, которые выбираются таким образом, чтобы в точке нормировки $t = \tau$ перенормированные значения совпадали с эффективными. Согласно гипотезе перенормируемости вблизи точки нормировки решение будет иметь вид распределения при отсутствии нелинейных взаимодействий, но с перенормированными значениями параметров Q и D. Тем самым возникающие в ненулевом приближении большие поправки за счет перенормировки оказываются включенными в нулевое приближение перенормированной теории возмущений, которая может давать разумные результаты в ограниченной области и использоваться для вычисления РГ-функции, определяемой поведением решения в точке нормировки. В отличие от квантовой теории поля, где перенормируемость связана с возможностью устранения расходимостей, в рассматриваемой задаче перенормируемость может оказаться приближенной и справедливой только в некоторой асимптотической области. Из проведенных вычислений (формулы (2.6), (5.2)) видно, что перенормировка оказалась возможной в приближении малых значений степенного показателя δ, однако это не означает, что строится теория возмущений по δ, поскольку в качестве нулевого приближения не используется решение для случая $\delta = 0$. И более того, оказывается, что точно решаемый случай $\delta = 0$ получается в пределе $\delta \to 0$ методом РГ с использованием низшего по λ приближения теории возмущений при вычислении РГ-функции.

С ростом δ свойство перенормируемости, сводящееся в рассматриваемом случае к возможности пренебречь зависимостью от t' в функции Грина под знаком интеграла в формуле (2.5) и соответствующей ей невыписанной формуле разд. 5, становится все более приближенным. Однако с дальнейшим ростом δ при $\delta \geqslant 1/d$ интегралы по t' становятся сингулярными в точке $t' = 0$. В этом случае появляется возможность заменить функцию Грина на ее значение в сингулярной точке и вынести ее из под знака интеграла (формулы (2.6), (5.1)). Такая процедура применялась при анализе методом РГ некоторого варианта нелинейного обобщения уравнения диффузии и было получено значение показателя неполной автомодельности, хорошо согласующееся с результатами численного решения [14, 15]. Таким образом, использование полученных формул при произвольных δ представляет собой экстраполяцию свойства перенормируемости, имеющего место при $\delta \ll 1$ и при $\delta \geqslant 1/d$, на область произвольных δ. Подобный подход аналогичен используемому в квантовой теории поля методу размерной регуляризации [4, 14], согласно которому расходящиеся при физической размерности пространства интегралы заменяются на интегралы, полученные при аналитическом продолжении по размерности пространства соответствующих интегралов при размерности, когда эти интегралы хорошо определены (конечны). Для иллюстрации этой идеи укажем на определение гамма-функции при отрицательных значениях аргумента не посредством эйлерова интеграла (расходящегося), а по рекуррентной формуле $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ [16].

Отметим, что при размерности, близкой к критической, т.е. при $d = d_c + \varepsilon(\varepsilon \to 0)$, фактический параметр разложения в ряд теории возмущений в асимптотической области g^* оказывается пропорциональным ε. Успешно примененная в теории критических явлений процедура ε-разложения сводится к построению теории возмущений по степеням ε с последующим аналитическим продолжением по ε в точку, соответствующую размерности реального пространства [5, 6]. Аналогия с теорией критических явлений может служить некоторым обоснованием для приближений, использованных при получении формул (2.6), (5.2).

В заключение укажем, что аналогичное рассмотрение явлений переноса, сопровождаемых рождением вещества ($\lambda < 0$), приводит к тому, что нетривиальная неподвижная точка будет устойчивой при $d > d_c$, а при $d < d_c$ будет реализовываться режим асимптотической свободы. Эффективное время будет убывать с ростом реального времени, что означает тенденцию к локализации первоначально слабо локализованных распределений и рост их крутизны (режимы с обострением [1]).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00748, 96-01-01221).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с.
2. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 208 с.
3. *Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* Об асимптотических "собственных функциях" задачи Коши для одного нелинейного параболического уравнения // Мат. сб. 1986. Т. 126. № 4. С. 435–472.
4. *Франк-Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. 491 с.
5. *Вильсон К., Когут Дж.* Ренормализационная группа и ε-разложение. М.: Мир, 1975. 256 с.
6. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. М.: Мир. 1980. 228 с.
7. *Коллинз Дж.* Перенормировка. М.: Мир, 1988. 446 с.
8. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
9. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1984. 597 с.
10. *Wilson K.* Renormalization group methods // Adv. Math. 1975. V. 16. № 2. P. 170–186.
11. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
12. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965. 407 с.
13. *Ширков Д.В.* Ренормализационная группа, принцип инвариантности и функциональная автомодельность // ДАН СССР. 1982. Т. 263. № 1. С. 64–67.
14. *Гинзбург И.С., Ентов В.М., Теодорович Э.В.* Метод ренормгруппы в задаче конвективной диффузии с необратимой сорбцией // ПММ. 1992. Т. 52. № 1. С. 68–74.
15. *Ентов В.М., Теодорович Э.В.* Решение задачи конвективной нелинейной диффузии на основе ренормализационной группы // Теорет. основы. хим. технологии. 1993. № 3. С. 218–223.
16. *Рамон П.* Теория поля: Современный вводный курс. М.: Мир, 1984. 332 с.

Поступила в редакцию 14.VIII.1997

Москва